PREMIERE COMPOSITION DE MATHEMATIQUES

Durée : 4 heures

Dans tout le problème, on désigne par V un espace vectoriel sur le corps commutatif $\mathbb{K}$ (qui sera toujours $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), de dimension finie n. Une partie $\mathcal{F}$ de l'ensemble $\mathcal{L}(V)$ des endomorphismes de V sera dite *trigonalisable* s'il existe une base de V dans laquelle la matrice de *tout* élément de $\mathcal{F}$ est *triangulaire supérieure*. On rappelle qu'un sous-espace W de V est dit *stable* par $\mathcal{F}$ si, pour tout $u \in \mathcal{F}$, W est *stable* par u, i.e. $u(x) \in W$ pour tout $x \in W$.

Le thème général du problème est la recherche de vecteurs propres communs aux éléments d'une partie $\mathcal{F}$ de $\mathcal{L}(V)$ possédant des propriétés convenables, avec, comme principale application, l'obtention de conditions suffisantes de trigonalisabilité.

PARTIE I

Dans les cinq premières questions de cette partie, $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

1°) Montrer que, pour qu'une partie $\mathcal{F}$ de $\mathcal{L}(V)$ soit trigonalisable, il est nécessaire que les éléments de $\mathcal{F}$ aient un vecteur propre commun.

On suppose, dans toute la suite de cette partie, que $\mathcal{F}$ est un sous-ensemble de $\mathcal{L}(V)$ tel que, quels que soient $u \in \mathcal{F}$ et $v \in \mathcal{F}$, on ait $u \circ v = v \circ u$. On se propose de prouver que $\mathcal{F}$ est trigonalisable.

2°) Soient $u \in \mathcal{F}$, λ une valeur propre de u et $V_u(\lambda)$ le sous-espace propre correspondant. Montrer que $V_u(\lambda)$ est stable par $\mathcal{F}$.

3°) Montrer que les éléments de $\mathcal{F}$ ont un vecteur propre commun.

4°) Montrer que $\mathcal{F}$ est trigonalisable.

5°) On suppose, de plus, que tout élément de $\mathcal{F}$ est diagonalisable. Peut-on trouver une base de V dans laquelle la matrice de tout élément de $\mathcal{F}$ est diagonale ?

6°) Reprendre le problème posé à la question 5°, en remplaçant $\mathbb{C}$ par $\mathbb{R}$.

PARTIE II

Dans toute cette partie, $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Etant donné $u \in \mathcal{L}(V)$ et $v \in \mathcal{L}(V)$, on pose $[u,v] = u \circ v - v \circ u$. On dit qu'un sous-ensemble $\mathcal{F}$ de $\mathcal{L}(V)$ est une *algèbre de Lie* (d'endomorphismes de V) si les conditions suivantes sont remplies :

(i) $\mathcal{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(V)$;

(ii) quels que soient $u \in \mathcal{F}$ et $v \in \mathcal{F}$, $[u,v] \in \mathcal{F}$.

On appelle *dimension* d'une algèbre de Lie $\mathcal{F}$, et on note $\dim(\mathcal{F})$, sa dimension en tant qu'espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

Etant donné une algèbre de Lie $\mathcal{F}$, on appelle *idéal* de $\mathcal{F}$ tout sous-espace vectoriel $\mathcal{I}$ de $\mathcal{F}$ tel que $[u,v] \in \mathcal{I}$ quels que soient $u \in \mathcal{F}$ et $v \in \mathcal{I}$.

1°) Soit $\mathcal{F}$ une algèbre de Lie de dimension 2, telle qu'il existe $u_0 \in \mathcal{F}$ et $v_0 \in \mathcal{F}$ vérifiant $[u_0, v_0] \neq 0$; soit d'autre part $\mathcal{F}'$ une seconde algèbre de Lie de dimension 2, possédant la même propriété. Démontrer qu'il existe un isomorphisme (d'espaces vectoriels) φ de $\mathcal{F}$ sur $\mathcal{F}'$ tel que $\varphi([u,v]) = [\varphi(u), \varphi(v)]$ quels que soient $u \in \mathcal{F}$ et $v \in \mathcal{F}$.

Soient $\mathcal{F}$ une algèbre de Lie et $\mathcal{I}$ un idéal de $\mathcal{F}$. Etant donné une forme linéaire ℓ sur $\mathcal{I}$, on désigne par W le sous-espace de V formé des vecteurs x tels que $v(x) = \ell(v)x$ pour tout $v \in \mathcal{I}$. Le but des questions 2° à 5° est de montrer que W est stable par $\mathcal{F}$.

Soit $u \in \mathcal{F}$, et soit x un élément non nul de W ; on définit par récurrence une suite (x_k) en posant $x_0 = x$ et $x_k = u(x_{k-1})$ pour tout entier $k \geq 1$.

2°) Démontrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $v \in \mathcal{I}$, $v(x_k) - \ell(v)x_k$ appartient au sous-espace engendré par $\{x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}\}$.

3°) Soit U le sous-espace de V engendré par les vecteurs x_k, où k décrit $\mathbb{N}$. Montrer que U est stable par $\mathcal{I} \cup \{u\}$.

4°) Etablir une relation entre $\ell([u,v])$ et la trace (i.e. la somme des valeurs propres) de la restriction à U de l'endomorphisme $[u,v]$.

Tournez la page S.V.P.

5°) Montrer que W est stable par $\mathcal{F}$.

On dit qu'une algèbre de Lie $\mathcal{F}$ est *résoluble* s'il existe une suite croissante

$$\{0\} = \mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \ldots \subset \mathcal{F}_p = \mathcal{F}$$

de sous-espaces de $\mathcal{F}$ tels que, pour tout entier k vérifiant $1 \leq k \leq p$, on ait :

$$[u,v] \in \mathcal{F}_{k-1} \text{ quels que soient } u \in \mathcal{F}_k \text{ et } v \in \mathcal{F}_k.$$

6°) Montrer que toute algèbre de Lie de dimension ≤ 2 est résoluble.

Le but des questions suivantes est de prouver le "théorème de Lie", qui affirme que *toute algèbre de Lie résoluble est trigonalisable.* Soit donc $\mathcal{F}$ une algèbre de Lie résoluble.

7°) Soit $d = \dim(\mathcal{F})$. Montrer qu'il existe un idéal $\mathcal{I}$ de $\mathcal{F}$, de dimension $d-1$. Montrer que $\mathcal{I}$ est aussi une algèbre de Lie résoluble.

8°) Montrer que les éléments de $\mathcal{F}$ ont un vecteur propre commun.

9°) Montrer que $\mathcal{F}$ est trigonalisable.

10°) Montrer que, réciproquement, toute algèbre de Lie trigonalisable est résoluble.

11°) Montrer que le résultat de I.4° est un corollaire du théorème de Lie.

PARTIE III

Dans cette partie, le corps de base $\mathbb{K}$ est indifféremment $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Pour tout $u \in \mathcal{L}(V)$, on notera ad_u l'élément de $\mathcal{L}(\mathcal{L}(V))$ défini par $ad_u(v) = [u,v]$ pour tout $v \in \mathcal{L}(V)$.

1°) Vérifier que, pour $u \in \mathcal{L}(V)$ et $v \in \mathcal{L}(V)$, on a $ad_{[u,v]} = [ad_u, ad_v]$.

2°) Montrer que, si u est un élément nilpotent de $\mathcal{L}(V)$, alors ad_u est un élément nilpotent de $\mathcal{L}(\mathcal{L}(V))$.

3°) Soient $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ deux algèbres de Lie (d'endomorphismes de V) telles que $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$. Soit $\mathcal{H}$ un supplémentaire de $\mathcal{G}$ dans $\mathcal{F}$, et soit q *la projection sur* $\mathcal{H}$ *parallèlement à* $\mathcal{G}$, i.e. l'application de $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{H}$ qui associe à tout $u \in \mathcal{F}$ l'unique $v \in \mathcal{H}$ tel que $u - v \in \mathcal{G}$. Montrer qu'il existe une et une seule application linéaire

$$\pi : \mathcal{G} \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$$

telle que, pour tout $g \in \mathcal{G}$ et tout $u \in \mathcal{F}$,

$$\pi(g)(q(u)) = q([g,u]).$$

On désigne désormais par $\mathcal{F}$ une algèbre de Lie (d'endomorphismes de V), telle que tout élément de $\mathcal{F}$ soit un endomorphisme nilpotent de V. On se propose de démontrer le "théorème d'Engel", qui affirme qu'*il existe un vecteur non nul* $x \in V$ *tel que* $u(x) = 0$ *pour tout* $u \in \mathcal{F}$.

4°) Soit $\mathcal{G}$ une seconde algèbre de Lie d'endomorphismes de V, telle que $\mathcal{G} \subsetneq \mathcal{F}$. On reprend les notations introduites dans la question précédente et on pose $\mathcal{F}' = \pi(\mathcal{G})$, $V' = \mathcal{H}$. Montrer que $\mathcal{F}'$ est une algèbre de Lie d'endomorphismes de V', que $\dim(\mathcal{F}') < \dim(\mathcal{F})$ et que tout élément de $\mathcal{F}'$ est nilpotent.

5°) Soit $d = \dim(\mathcal{F})$. On suppose que, pour tout espace vectoriel W de dimension finie sur $\mathbb{K}$, et toute algèbre de Lie $\mathcal{B}$ d'endomorphismes de W, formée d'éléments nilpotents et vérifiant $\dim(\mathcal{B}) \leq d-1$, il existe un vecteur non nul $x \in W$ tel que $u(x) = 0$ pour tout $u \in \mathcal{B}$. Par ailleurs, on reprend les hypothèses et notations de la question 4°. Montrer qu'il existe une algèbre de Lie $\mathcal{G}_1$ d'endomorphismes de V, vérifiant les propriétés suivantes :

$$\mathcal{G} \subset \mathcal{G}_1 \subset \mathcal{F}$$

$$\dim(\mathcal{G}_1) = \dim(\mathcal{G}) + 1$$

$$\mathcal{G}_1 \text{ est un idéal de } \mathcal{G}.$$

En déduire qu'il existe un idéal $\mathcal{F}_1$ de $\mathcal{F}$, tel que $\dim(\mathcal{F}_1) = d-1$.

6°) Démontrer le théorème d'Engel.

7°) Montrer que toute algèbre de Lie constituée d'endomorphismes nilpotents de l'espace vectoriel V est trigonalisable.

• • •