Deuxième composition
ESSEC 1998

On considère dans ce problème un guichet auquel se présentent aléatoirement des personnes. L'objectif est d'étudier la file d'attente se formant à ce guichet au cours du temps, ce qui est traité dans la partie II. Dans la partie I on étudie une suite récurrente utilisée ultérieurement.

PARTIE I

On considère un nombre réel strictement positif a et la fonction f définie pour tout nombre réel x par

$$f(x) = \exp(a(x-1)) \ .$$

On définit alors une suite $(u_k)_{k\in\mathbf{N}}$ par son premier terme $u_0 = 0$ et la relation

$$\forall k \in \mathbf{N} \qquad u_{k+1} = f(u_k) \ .$$

I.1. Convergence de la suite $(u_k)_{k\in\mathbf{N}}$.

a. Montrer que f est de classe C^∞, strictement croissante et strictement convexe sur $\mathbf{R}$, et qu'elle laisse le segment $[0;1]$ stable.

b. En déduire la convergence de la suite $(u_k)_{k\in\mathbf{N}}$, dont on notera $L(a)$ la limite.

I.2. Limite de la suite $(u_k)_{k\in\mathbf{N}}$.

a. Soit g la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $g(x) = f(x) - x$. Montrer que g est de classe C^∞ et strictement convexe sur $\mathbf{R}$.

b. Justifier l'existence de $r(a)$ défini par $r(a) = \min\{x \in [0;1] \,|\, g(x) = 0\}$.

c. Donner une équation de la tangente en 1 à la courbe représentative de f et en déduire les points fixes de f sur $[0;1]$ en fonction de a.

d. Déterminer $L(a)$ lorsque $0 < a \leq 1$.

e. Déterminer $L(a)$ lorsque $a > 1$.

I.3. On suppose dorénavant $a > 1$.

a. Étudier et représenter graphiquement sur $\mathbf{R}_+$ la fonction φ définie par $x \mapsto x\exp(-x)$.

b. Démontrer $ar(a) < 1$.

c. On pose $m = ae\exp(-a)$. Démontrer $0 < m < 1$ et, pour k dans $\mathbf{N}$, $0 \leq r(a) - u_{k+1} \leq m(r(a) - u_k)$.

d. Donner un programme en Python permettant de déterminer une valeur approchée de $L(a)$ à 10^{-2} près. On obtient ainsi $L(2) \simeq 0,20$ et $L(4) \simeq 0,02$.

e. Montrer que la restriction de φ à $[0;1]$ réalise une bijection de $[0;1]$ sur $\left[0;\dfrac{1}{e}\right]$, de bijection réciproque continue et strictement croissante. On notera ψ cette bijection réciproque.

f. Comparer les images de a et de $ar(a)$ par φ.

g. Démontrer $r(a) = \dfrac{1}{a}\psi(a\exp(-a))$ puis déterminer un équivalent de $r(a)$ lorsque a tend vers $+\infty$.

PARTIE II

Dans toute cette partie, on se place dans un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ et on modélise le temps par une succession d'instants 0, 1, 2, 3, ..., n, ... On considère un guichet auquel peut se présenter au plus une personne dans l'intervalle de temps compris entre deux instants successifs $[n-1; n[$, pour n entier naturel strictement positif.

On suppose qu'une première personne est au guichet à l'instant 0 et, pour tout entier naturel strictement positif n, on désigne par B_n la variable aléatoire prenant la valeur 1 si une personne se présente au guichet entre les instants $n-1$ et n, et 0 sinon. La personne ainsi arrivée se place au bout de la file attendant devant le guichet.

Ces variables aléatoires B_1, B_2, ..., B_n, ... sont supposées identiquement distribuée selon une loi de Bernoulli de paramètre p, avec $0 < p < 1$.

On appelle durée de service d'une personne au guichet le temps passé par l'employé(e) du guichet à la servir, une fois l'attente dans la file achevée. Plus précisément, si la durée de service de la première personne, arrivée à l'instant 0, est égale à n, le guichet est libre pour le service de la personne suivante à partir de l'instant n. On admettra que les durées de services de chaque personne sont des variables aléatoires et on suppose qu'elles forment, avec les variables $(B_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une famille de variables mutuellement indépendantes.

Ces variables aléatoires, indiquant les durées de service au guichet des personnes successives, sont supposées suivre la même loi de Poisson de paramètre λ. On notera D la variable aléatoire donnant la durée de service de la première personne.

On convient d'appeler première vague l'ensemble des personnes arrivées au guichet pendant la durée de service de la personne arrivée initialement, puis, de façon générale, on appelle $(k+1)^{\text{e}}$ vague l'ensemble des personnes arrivées pendant la durée de service des personnes de la k^{e} vague. On désigne alors par N_k le nombre de personnes de la k^{e} vague, étant entendu qu'on pose $N_k = 0$ s'il n'y a personne dans la k^{e} vague. Par convention on pose $N_0 = 1$. On admettra que les N_k sont des variables aléatoires.

II.1. Loi de la variable aléatoire N_1.

a. Étant donné un nombre entier naturel n, déterminer la loi de la variable aléatoire N_1 conditionnée par l'évènement $(D = n)$ et préciser la valeur de $\mathbf{P}(N_1 = k \mid D = n)$ pour k entier naturel.

b. En déduire que N_1 suit une loi de Poisson dont on précisera le paramètre et l'espérance.

II.2. On pose pour k dans $\mathbf{N}$, $p_k = \mathbf{P}(N_k = 0)$.

a. Démontrer que l'évènement *La file d'attente au guichet s'achève au bout d'un temps fini* (autrement dit : il n'y a plus personne au guichet au bout d'un temps fini) est la réunion des évènements $(N_k = 0)$ pour $k \geq 1$.

b. Démontrer que la suite d'évènements $(N_k = 0)_{k \geq 1}$ est croissante.

c. En déduire que la suite $(p_k)_{k \in \mathbf{N}}$ est convergente vers une limite L vérifiant $L \leq 1$ et que la probabilité pour que la file d'attente au guichet s'achève au bout d'un temps fini est égale à cette limite L.

II.3. Probabilité pour que la file d'attente au guichet s'achève.

a. Justifier, pour tout couple (j, k) de nombres entiers naturels, les formules

$$\mathbf{P}(N_{k+1} = 0 \mid N_1 = 1) = \mathbf{P}(N_k = 0) \text{ et } \mathbf{P}(N_{k+1} = 0 \mid N_1 = j) = \mathbf{P}(N_k = 0)^j \ .$$

b. En déduire, pour k entier naturel, l'expression de p_{k+1} en fonction de p_k.

c. Préciser p_0 et, en utilisant les résultats de la partie I, donner la limite de la suite $(p_k)_{k\in\mathbf{N}}$ et la probabilité pour que la file d'attente au guichet s'achève au bout d'un temps fini. On discutera le résultat obtenu en fonction des valeurs de λp.

II.4. Déterminer des valeurs exactes ou approchées à 10^{-2} près des probabilités pour que la file d'attente au guichet s'achève au bout d'un temps fini lorsque la durée moyenne de service d'une personne au guichet est égale à 1, 2, 4 ou 8 tandis que la probabilité pour qu'une personne se présente au guichet entre deux instants consécutifs données est égale à 0,5 d'abord, à 0,25 ensuite.

II.5. Soit k un entier naturel.

On convient d'appeler « espérance de la variable aléatoire N_{k+1} conditionnée par l'évènement $(N_k = i)$ », et de noter $\mathbf{E}\left(N_{k+1} \,\middle|\, N_k = i\right)$ l'espérance de N_{k+1} lorsque la probabilité est la probabilité conditionnelle sachant l'évènement $(N_k = i)$ réalisé. Autrement dit on définit, si elle l'existe, l'espérance par la formule

$$(*) \qquad \mathbf{E}\left(N_{k+1} \,\middle|\, N_k = i\right) = \sum_{j=0}^{+\infty} j\,\mathbf{P}\left(N_{k+1} = j \,|\, N_k = i\right) .$$

a. On suppose l'évènement $(N_k = i)$ réalisé. Déterminer alors la loi de la durée de service de ces i personnes de la k^{e} vague en distinguant les cas $i = 0$ et $i \geq 1$.

b. En déduire la loi de la variable aléatoire N_{k+1} conditionnée par l'évènement $(N_k = i)$ et vérifier

$$\mathbf{E}\left(N_{k+1} \,\middle|\, N_k = i\right) = i\lambda p .$$

II.6. Soit k un entier naturel. On suppose que l'espérance $\mathbf{E}(N_k)$ existe.

a. Établir

$$\mathbf{E}(N_k) = \frac{1}{\lambda p} \sum_{i=0}^{+\infty} \mathbf{P}\left(N_k = i\right) \mathbf{E}\left(N_{k+1} \,\middle|\, N_k = i\right) .$$

b. Établir l'existence de l'espérance $\mathbf{E}(N_{k+1})$ et donner son expression en fonction de λ, p et $\mathbf{E}(N_k)$.

II.7. En déduire l'existence et l'expression de $\mathbf{E}(N_k)$ pour tout entier naturel k.

II.8. Déterminer l'espérance du nombre de personnes qui se présentent au guichet jusqu'à celles de la n^{e} vague incluse, où n est un entier naturel non nul.

II.9. Discuter et interpréter la limite de cette espérance quand n tend vers $+\infty$ et pour $\lambda p < 1$. Qu'obtient-on numériquement dans les cas étudiés en II.4 ?

Deuxième composition – ESSEC 1998

PARTIE I

I.1.

a. La fonction f est composée d'une fonction affine strictement croissante (puisque a est strictement positif) et de la fonction exponentielle qui est de classe C^∞, strictement positive, strictement croissante et strictement convexe sur $\mathbf{R}$. Par conséquent

$\boxed{f \text{ est également de classe } C^\infty\text{, strictement positive, strictement croissante et strictement convexe sur } \mathbf{R}.}$

De plus $0 < \exp(-a) = f(0) < f(1) = 1$ et donc, par croissance de f, l'intervalle $\boxed{[0;1] \text{ est } f\text{-stable.}}$

b. Puisque f est croissante la suite $(u_k)_{k\in\mathbf{N}}$ est monotone et puisqu'on a $f(0) \in [0;1]$ et que l'intervalle $[0;1]$ est f-stable, la suite $(u_k)_{k\in\mathbf{N}}$ est monotone et à valeurs dans $[0;1]$, et donc en particulier bornée. D'après le théorème de convergence monotone, elle est $\boxed{\text{convergente.}}$

I.2.

a. Une fonction affine étant convexe et de classe C^∞ sur $\mathbf{R}$, g est somme d'une fonction de classe C^∞ et strictement convexe et d'une fonction de classe C^∞ et convexe, elle est donc $\boxed{\text{de classe } C^\infty \text{ et strictement convexe sur } \mathbf{R}.}$

b. Puisque $g(1) = 0$, $\{x \in [0;1] \,|\, g(x) = 0\}$ est non vide. Puisque g est strictement convexe la fonction pente par rapport à 1, i.e. $x \mapsto \dfrac{g(x)}{x-1}$ prolongée par $g'(1)$ en 1, est strictement croissante. Elle est donc injective et admet ainsi au plus un point d'annulation. Il en résulte que $\{x \in [0;1] \,|\, g(x) = 0\}$ est de cardinal compris entre 1 et 2 et admet donc un minimum, i.e. $\boxed{r(a) \text{ est bien défini.}}$

c. Puisque $f(1) = 1$ et $f'(1) = af(1) = a$, la tangente au graphe de f au point d'abscisse 1 est la droite d'équation cartésienne $y - 1 = a(x-1)$ ou encore $\boxed{y = ax + 1 - a.}$

Par stricte convexité de g, la fonction pente par rapport à 1 est strictement croissante. Sa valeur en 0 est égale à $-\exp(-a)$, donc strictement négative, et à $g'(1)$, i.e. $a-1$, en 1. En particulier $x \mapsto \dfrac{g(x)}{x-1}$, étant continue sur $[0;1[$, réalise une bijection entre $[0;1[$ et $[-\exp(a); a-1[$ et donc s'annule sur $[0;1[$ si et seulement si $a > 1$. Autrement dit $\boxed{\text{si } a \leq 1,\ f \text{ admet 1 comme unique point fixe sur } [0;1]}$

et $\boxed{\text{si } a > 1,\ f \text{ admet deux points fixes sur } [0;1] : 1 \text{ et } r(a).}$

d. Par continuité de f, la suite $(u_k)_{k\in\mathbf{N}}$ converge nécessairement vers un point fixe de f. Comme elle est à valeurs dans $[0;1]$, sa limite y appartient par préservation des inégalités par passage à la limite. D'après la question précédente, si $0 < a \leq 1$, f admet un unique point fixe dans $[0;1]$, à savoir 1, et donc $\boxed{\text{si } a \leq 1,\ L(a) = 1.}$

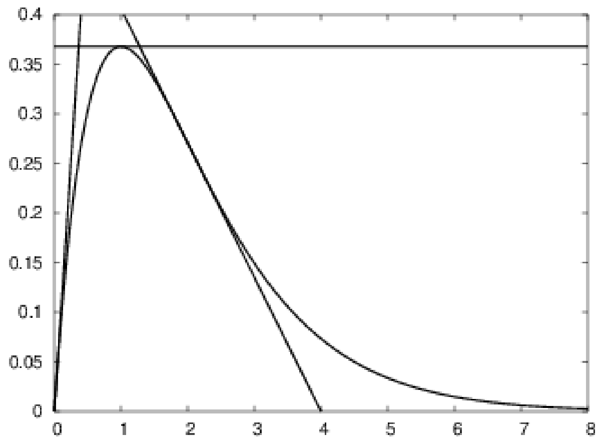
e. On suppose $a > 1$. Puisque $r(a)$ est point fixe de f et qu'on a $0 < f(0) \leq r(a) = f(r(a))$, l'intervalle $[0; r(a)]$ est f-stable et donc la suite $(u_k)_{k\in\mathbf{N}}$ est à valeurs dans ce segment. Par définition de $r(a)$, f y admet un unique point fixe et donc, par continuité de f, la suite $(u_k)_{k\in\mathbf{N}}$ converge nécessairement vers ce point fixe, i.e. $\boxed{\text{si } a > 1,\ L(a) = r(a).}$

I.3.

a. La fonction φ est de classe C^∞ sur $\mathbf{R}$ en tant que produit de composées de telles fonctions. Au voisinage de 0, on a $\varphi(x) = x + o(x)$ et donc le graphe de f est tangent à la première bissectrice en $(0,0)$. Par croissance comparée entre l'exponentielle et les fonctions polynomiales, φ tend vers 0 en $+\infty$ et le graphe de f est donc asymptote à l'axe des abscisses en $+\infty$.

La dérivée de φ est donnée par $\varphi'(x) = (1-x)\exp(-x)$ pour x dans $\mathbf{R}_+$ et donc φ est strictement croissante sur $[0;1]$ et strictement décroissante sur $[1;+\infty[$. En particulier elle atteint son maximum en 1 où elle vaut $1/e$.

La dérivée seconde de φ est donnée par $(x-2)\exp(-x)$ et donc φ possède un unique point d'inflexion en 2 et sa tangente y admet comme équation $y = (4-x)\exp(-2)$. À cet endroit le graphe de φ traverse sa tangente et φ est strictement concave sur $[0;2]$ et strictement convexe sur $[2;+\infty[$.



b. Comme f est strictement convexe, son taux d'accroissement est strictement compris entre ses dérivées. Comme $r(a) < 1$, il vient

$$ar(a) = af(r(a)) = f'(r(a)) < \frac{f(1) - f(r(a))}{1 - r(a)} = \frac{1 - r(a)}{1 - r(a)} = 1 < f'(1) = a$$

et donc $\boxed{ar(a) < 1.}$

c. Puisque $a > 1$ et par φ décroissance stricte de φ sur $[1;+\infty[$, on a $\varphi(a) < \varphi(1) = \dfrac{1}{e}$ et donc, par positivité de e et φ, $\boxed{0 < m < 1.}$

Puisque $f' = af$, on a, par croissance de f et pour x dans $\left[0; \dfrac{1}{a}\right]$,

$$0 < a\exp(-a) = af(0) \leq af(x) = f'(x) \leq af\left(\frac{1}{a}\right) = ae\exp(-a) = m\ .$$

Comme la suite $(u_k)_{k\in\mathbf{N}}$ est croissante et à valeurs dans $[0; r(a)]$, elle est inférieure à sa limite et le théorème de LAGRANGE, dit des accroissements finis, fournit, pour k dans $\mathbf{N}$,

$$|r(a) - u_{k+1}| = |f(r(a)) - f(u_k)| \leq \sup_{x \in \left[0; \frac{1}{a}\right]} |f'(x)| \times |r(a) - u_k|$$

et donc, d'après ce qui précède et par positivité, $\boxed{0 \leq r(a) - u_{k+1} \leq m(r(a) - u_k).}$

d. Soit k dans $\mathbf{N}$ et ε dans $\mathbf{R}_+^*$. On a $u_k < f(u_k) = u_{k+1} < r(a)$ puisque g est strictement négatif sur $[0; r(a)[$. Si, de plus, $u_{k+1} < u_k + \varepsilon$, alors, d'après le théorème de LAGRANGE, dit des accroissements finis, $0 < u_{k+2} - u_{k+1} < m(u_{k+1} - u_k)$ et donc $u_{k+1} < u_{k+2} < u_{k+1} + m\varepsilon < u_k + (1+m)\varepsilon$. Une récurrence immédiate donne, pour p dans $\mathbf{N}$, $u_{k+p} < u_k + (1 + m + \cdots + m^{p-1})\varepsilon$ et donc, par passage à la limite en p, $r(a) \leq u_k + \dfrac{\varepsilon}{1-m}$.

Autrement dit, $0 < r(a) - u_k \leq \dfrac{u_{k+1} - u_k}{1-m}$. On en déduit

$$u_{k+1} - u_k < (1 - ae\exp(-a))10^{-2} \Rightarrow 0 < r(a) - u_k \leq 10^{-2},$$

d'où le test d'arrêt et le programme suivant

```
#!/usr/bin/python3
import numpy as np
def f(a,x):                          # f
 return np.exp(a*(x-1))
def L(a,epsilon):                    # Calcule L(a) a epsilon pres
  if a<=0 : return "Erreur"          # Il faut a>0 !
  if a<=1 : return 1                 # Si a<=1, L(a)=1
 m=a*exp(1-a)
  arret=epsilon*(1-m)                #
  u=0                                # u_0
  v=f(a,u)                           # u_1
  while v-u>arret :                  # Arret si u_{k+1}-u_k<=(1-m)epsilon
   u=v
   v=f(a,u)
  return v                           # renvoie u_{k+1}
def L2(a):                           # Ici epsilon=0,01
 return L(a,10**(-2))
```

e. Comme φ est une application continue strictement croissante sur $[0; 1]$ et $\varphi(0) = 0$ et $\varphi(1) = \dfrac{1}{e}$, il résulte du théorème de caractérisation des bijections bicontinues que

$\boxed{\varphi \text{ est une bijection bicontinue de } [0;1] \text{ sur } [\varphi(0);\varphi(1)], \text{ d'application réciproque continue strictement croissante de } \left[0; \frac{1}{e}\right] \text{ sur } [0;1].}$

f. Puisqu'on a $f(r(a)) = r(a)$, il vient $\exp(ar(a) - a) = r(a)$ et donc $\varphi(ar(a)) = a\exp(-a)$. Par conséquent $\boxed{a \text{ et } ar(a) \text{ ont même image par } \varphi.}$

g. Par définition de ψ et puisque $ar(a)$ appartient à $[0;1]$, il vient $\psi(\varphi(a)) = \psi(\varphi(ar(a)) = ar(a)$ et donc $\boxed{r(a) = \frac{1}{a}\psi(a\exp(-a)).}$
Comme on a $\varphi(0) = 0$ et $\varphi'(0) = 1$, on a aussi $\psi(0) = \psi(\varphi(0)) = 0$ et $\psi'(0) = \psi'(\varphi(0)) = (\varphi'(0))^{-1} = 1$, donc, au voisinage de 0 on a $\psi(x) \sim x$ et donc $\boxed{r(a) \sim \exp(-a).}$

PARTIE II

II.1.

a. Soit n et k deux entiers naturels. Par définition, on a

$$(D = n, N_1 = k) = \left(D = n, \sum_{i=1}^{n} B_i = k\right) .$$

Les variables aléatoires $(B_i)_{i\in\mathbf{N}^*}$ et les divers temps de services, donc en particulier D, sont supposées mutuellement indépendantes. De plus, par indépendance des lois de BERNOULLI, $\sum_{i=1}^{n} B_i$ suit une loi binomiale de paramètres n et p et donc

$$\mathbf{P}\left(D = n, N_1 = k\right) = \mathbf{P}\left(D = n\right)\mathbf{P}\left(\sum_{i=1}^{n} B_i = k\right) = \mathbf{P}\left(D = n\right)\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} ,$$

avec la convention que le coefficient binomial est nul si $k > n$.
L'évènement $(D = n)$ est de probabilité $\exp(-\lambda)\lambda^n/n!$ et est donc de probabilité non nulle. On peut donc parler de probabilité conditionnelle sachant cet évènement et on a, $\mathbf{P}\left(N_1 = k \,|\, D = n\right) = \dfrac{\mathbf{P}\left(D = n, N_1 = k\right)}{\mathbf{P}\left(D = n\right)}$, d'où $\boxed{\mathbf{P}\left(N_1 = k \,|\, D = n\right) = \tbinom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}.}$

b. Puisque D est à valeurs entières, la famille $(D = n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une partition de l'univers Ω, formée d'évènements de probabilités non nulles ainsi qu'il a été remarqué précédemment. La formule des probabilités totales permet d'écrire, pour k entier naturel, puisque la série est à termes positifs,

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}\left(N_1 = k\right) &= \sum_{n=0}^{+\infty}\mathbf{P}\left(N_1 = k \,|\, D = n\right)\mathbf{P}\left(D = n\right) = \sum_{n=k}^{+\infty}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}\exp(-\lambda)\frac{\lambda^n}{n!}\\
&= \sum_{n=k}^{+\infty}p^k(1-p)^{n-k}\exp(-\lambda)\frac{\lambda^n}{k!(n-k)!} = \sum_{n=0}^{+\infty}p^k(1-p)^{n}\exp(-\lambda)\frac{\lambda^{n+k}}{k!n!}\\
&= \exp(-\lambda)\frac{(\lambda p)^k}{k!}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{((1-p)\lambda)^n}{n!} = \exp(-\lambda)\frac{(\lambda p)^k}{k!}\exp((1-p)\lambda)\\
&= \exp(-p\lambda)\frac{(\lambda p)^k}{k!}
\end{aligned}$$

et donc $N_1 \sim \mathcal{P}\left(\lambda p\right)$, i.e.

$\boxed{N_1 \text{ suit une loi de POISSON de paramètre } \lambda p\text{, d'espérance égale à son paramètre, i.e. } \mathbf{E}\left(N_1\right) = \lambda p.}$

II.2.

a. L'évènement *La file d'attente au guichet s'achève au bout d'un temps fini* est la réunion, pour k entier naturel, des évènements *La file d'attente au guichet s'achève avant le temps k* ou encore *Au temps k, il n'y a personne au guichet*, c'est-à-dire que c'est la réunion des évènements $(N_k = 0)$ pour k entier naturel. Comme $(N_0 = 1)$, c'est aussi la $\boxed{\text{réunion des évènements } (N_k = 0) \text{ pour } k \text{ entier supérieur à 1.}}$

b. Soit k un entier naturel. S'il n'y a pas de personne à la k^{e} vague, il n'y a personne à servir et donc pas de temps de service. Par conséquent personne ne peut se présenter durant le temps de service de la k^{e} vague et ainsi le nombre de personnes de la $(k+1)^{\text{e}}$ vague est également nul. Il en résulte $(N_k = 0) \subset (N_{k+1} = 0)$. En particulier $\boxed{\text{la suite } (N_k = 0)_{k\in\mathbf{N}^*} \text{ est croissante.}}$

c. Par croissance de la probabilité, il résulte de la question précédente que la suite $(p_k)_{k\in\mathbf{N}^*}$ est croissante. Étant majorée par 1, puisqu'on a affaire à des probabilités, elle converge et sa limite est inférieure à 1, par convergence monotone et passage à la limite dans les inégalités, i.e. $\boxed{\text{la suite } (p_k)_{k\in\mathbf{N}^*} \text{ converge vers } L \text{ vérifiant } L \leq 1.}$

Puisque la suite $(N_k = 0)_{k\in\mathbf{N}}$ est croissante, le théorème de limite monotone fournit

$$\mathbf{P}\left(\lim \uparrow (N_k = 0)\right) = \lim \uparrow p_k\,,$$

i.e.

$\boxed{\text{la probabilité pour que la file d'attente au guichet s'achève au bout d'un temps fini est égale à } L.}$

II.3.

a. Soit k dans $\mathbf{N}$. Puisque les variables de Bernoulli et les durées de services sont toutes indépendantes les unes des autres, et que les paramètres des lois de Bernoulli sont tous égaux à p et ceux des durées de services à λ, si $(N_1 = 1)$ est vérifié, alors on peut renuméroter les vagues comme si cette unique personne était la première (donc en décrémentant de 1 tous les numéros de vagues) et les personnes dans les files d'attentes. Ainsi la loi de N_{k+1} sachant $(N_1 = 1)$ est celle de N_k. En particulier $\boxed{\mathbf{P}\left(N_{k+1} = 0 \,|\, N_1 = 1\right) = \mathbf{P}\left(N_k = 0\right).}$

Si $(N_1 = 0)$ est vérifié, d'après II.b et par hypothèse sur N_0, $(N_k = 0)$ et $(N_{k+1} = 0)$ aussi, donc $\mathbf{P}\left(N_{k+1} = 0 \,|\, N_1 = 0\right) = 1 = \mathbf{P}\left(N_k = 0\right)^0$.

Si l'événement $(N_1 = j)$ est vérifié, avec j entier supérieur à 2, alors on peut créer virtuellement j guichets et placer j files d'attente derrière chacun d'eux. Ainsi la seconde vague sera séparée en j files qui seront en fait servies de la façon suivante : d'abord la file derrière le premier guichet, puis celle derrière le second, etc. jusqu'au j^{e} guichet. On fera de même pour les autres vagues. Chacune des files d'attentes derrière chacun des j guichets a la même loi que la file initiale et en particulier, la $(k+1)^{\text{e}}$ vague est vide si et seulement si toutes les k^{e} vagues derrière chacun des j guichets est vide. Par indépendance, la probabilité de cet événement est donc le produit des j événements correspondant à la vacuité de la k^{e} vague derrière chacun des j guichets et chacune vaut $\mathbf{P}\left(N_k = 0\right)$ d'après ce qui précède.

On en déduit, pour tout j dans $\mathbf{N}$, $\boxed{\mathbf{P}\left(N_{k+1} = 0 \,|\, N_1 = j\right) = \mathbf{P}\left(N_k = 0\right)^j.}$

Remarque : écrire ces arguments de façon plus formelle est assez difficile et n'est sans doute pas attendu. Néanmoins c'est un bon exercice d'essayer de le faire. Il faut alors, à ω fixé, créer un découpage en j parties de chacune des vagues, c'est-à-dire des entiers naturels servant à indexer les variables de Bernoulli.

b. Soit k un entier naturel non nul. En utilisant la formule des probabilités totales et le fait que les événements $(N_1 = j)_{j\in\mathbf{N}}$ sont de probabilités non nulles et forment une partition de l'univers Ω, il vient

$$p_{k+1} = \sum_{j=0}^{+\infty} \mathbf{P}\left(N_{k+1} = 0 \,|\, N_1 = j\right) \mathbf{P}\left(N_1 = j\right)$$

i.e. en utilisant la question précédente et II.1.b,

$$p_{k+1} = \sum_{j=0}^{+\infty} p_k^j \exp(-\lambda p) \frac{(\lambda p)^j}{j!} = \exp(-\lambda p) \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{(\lambda p p_k)^j}{j!} = \exp(-\lambda p) \exp(\lambda p p_k) \ .$$

Et donc $\boxed{p_{k+1} = \exp(\lambda p(p_k - 1)).}$

c. On a posé $N_0 = 1$ et on a donc $\boxed{p_0 = \mathbf{P}\left(N_0 = 0\right) = 0.}$

La formule précédente est donc valable y compris lorsque k est nul. Par conséquent la suite $(p_k)_{k\in\mathbf{N}}$ est la suite récurrente définie en première partie pour a égal à λp. Par conséquent $\boxed{\text{la suite } (p_k)_{k\in\mathbf{N}} \text{ converge vers } L(\lambda p).}$

D'après I.2.d, si $\lambda p \leq 1$, $(p_k)_{k\in\mathbf{N}}$ tend vers 1, i.e.

$\boxed{\text{l'événement « la file d'attente s'achève en un temps fini » est de probabilité 1.}}$

Par contre, d'après I.2.e, si $\lambda p > 1$, $L(\lambda p) < 1$, i.e.

$\boxed{\text{l'événement « la file d'attente s'achève en un temps fini » est de probabilité strictement inférieure à 1.}}$

II.4. On trouve ci-dessous le tableau croisant les diverses valeurs de p (en ligne) et celles de λ (en colonne) et donnant la valeur de $L(\lambda p)$, i.e. la valeur de la probabilité que la file d'attente au guichet s'achève au bout d'un temps fini. Les valeurs précédées du symbole $\simeq$ sont des valeurs approchées à 10^{-2} de $L(\lambda p)$, données en I.3.d.

$p\backslash\lambda$	1	2	4	8
0.5	1	1	$\simeq 0.20$	$\simeq 0.02$
0.25	1	1	1	$\simeq 0.20$

II.5.

a. Lorsque l'événement $(N_k = 0)$ est réalisé, il n'y a aucune personne à servir et le temps de service associé est donc nul : la loi de la durée de service est celle de la variable aléatoire certaine égale à 0.

Soit i un entier naturel non nul. Si l'événement $(N_k = i)$ est réalisé, cela signifie qu'il y a i personnes à servir, dont les temps de service sont des variables aléatoires indépendantes de loi de Poisson de paramètre λ : la durée de service de ces i personnes est donc la somme de i variables aléatoires indépendantes de loi de Poisson de paramètre λ. Elle suit donc une loi de Poisson de paramètre $i\lambda$, puisque la somme de deux variables aléatoires indépendantes suivant chacune une loi de Poisson de paramètres λ_1 et λ_2, suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda_1 + \lambda_2$.

$\boxed{\text{La durée de service des } i \text{ personnes de la } k^{\text{e}} \text{ vague suit une loi de Poisson de paramètre } i\lambda, \text{ en convenant que pour } i = 0, \text{ c'est la loi de la variable presque sûrement égale à } 0.}$

b. Si l'événement $(N_k = 0)$ est réalisé, on a vu en II.2.b que l'évènement $(N_{k+1} = 0)$ est également réalisé.

Soit i un entier naturel non nul. Si l'événement $(N_k = i)$ est réalisé, d'après ce qui précède la durée de service de ces i personnes suit une loi de Poisson de paramètre $i\lambda$. D'après II.1.b, N_{k+1} suit donc, sachant l'événement $(N_k = i)$, une $\boxed{\text{loi de Poisson de paramètre } i\lambda p.}$

On en déduit immédiatement $\boxed{\mathbf{E}\left(N_{k+1} \mid N_k = i\right) = i\lambda p.}$

II.6.

a. On suppose que l'espérance $\mathbf{E}(N_k)$ existe, c'est-à-dire que la famille $(i\mathbf{P}\left(N_k = i\right))_{i\in\mathbf{N}}$ est sommable et que sa somme est $\mathbf{E}(N_k)$. Pour i dans $\mathbf{N}$, d'après la question précédente on a

$$i = \frac{1}{\lambda p}\mathbf{E}\left(N_{k+1} \mid N_k = i\right)$$

et donc, puisque l'espace des familles sommables est un espace vectoriel et que la somme est une forme linéaire $\boxed{\mathbf{E}(N_k) = \frac{1}{\lambda p}\sum_{i=0}^{\infty}\mathbf{P}\left(N_k = i\right)\mathbf{E}\left(N_{k+1} \mid N_k = i\right).}$

b. La famille $\left(\frac{j}{\lambda p}\mathbf{P}\left(N_k = i\right)\mathbf{P}\left(N_{k+1} = j \mid N_k = i\right)\right)_{(i,j)\in\mathbf{N}^2}$ est à termes positifs. D'après le théorème de sommation par paquets dans le cas positif, elle est sommable puisque la somme, à i fixé, existe en vertu de II.5.b et que la somme de ces sommes existe en vertu de la question précédente. Or la somme à j fixé vaut $\frac{j}{\lambda p}\mathbf{P}\left(N_{k+1} = j\right)$ d'après la formule des probabilités totales et la somme de ces sommes est, par définition, $\frac{1}{\lambda p}\mathbf{E}\left(N_{k+1}\right)$. Ceci démontre au passage que l'espérance précédente existe et est finie, et d'après le théorème de sommation par paquets (cas positif) : $\boxed{\mathbf{E}\left(N_{k+1}\right) \text{ existe et } \mathbf{E}\left(N_{k+1}\right) = \lambda p\mathbf{E}\left(N_k\right).}$

II.7. Pour k entier naturel, soit (H_k) la propriété « N_k a une espérance et $\mathbf{E}\left(N_k\right) = (\lambda p)^k$ ». Puisque N_0 est la variable aléatoire presque sûrement égale à 1, elle admet une espérance et on a $\mathbf{E}(N_0) = 1$. La propriété (H_0) est donc vraie. La question précédente montre que (H_k)

est une propriété héréditaire et il résulte donc du principe de récurrence que pour tout k dans $\mathbf{N}$, $\boxed{N_k \text{ a une espérance et } \mathbf{E}(N_k) = (\lambda p)^k.}$

II.8. Soit n un entier naturel non nul. Le nombre de personnes qui se présentent au guichet depuis la personne initiale incluse jusqu'à celles de la n^{e} vague incluse est égal à la somme $\sum_{k=0}^{n} N_k$. L'espérance de ce nombre de personnes est donc, par linéarité de l'espérance, $\sum_{k=0}^{n} (\lambda p)^k$. L'espérance recherchée est donc $\boxed{n+1, \text{ si } \lambda p = 1, \text{ et } \dfrac{1-(\lambda p)^{n+1}}{1-\lambda p} \text{ sinon.}}$

II.9. Conformément aux résultats de la question II.3,

si on a $\lambda p < 1$, l'espérance du nombre de personnes total est finie et vaut $\dfrac{1}{1-\lambda p}$. Ceci entraîne que la file d'attente a une probabilité 1 de s'arrêter en un temps fini.

Numériquement, si $(\lambda, p) = (1, 0.5)$ ou si $(\lambda, p) = (2, 0.25)$, l'espérance du nombre de personnes est 2 et si $(\lambda, p) = (1, 0.25)$, cette espérance est $4/3$. Il y a donc très probablement peu de personnes en tout : $\boxed{\text{les files d'attente se résorbent très vite.}}$

Lorsque $\lambda p > 1$, le nombre moyen de personnes sur l'ensemble des vagues est infini, ce qui est évident puisque la file d'attente a une probabilité strictement positive de ne pas s'arrêter en un temps fini. Par contre pour le cas limite $\lambda p = 1$, le nombre moyen de personnes de l'ensemble des vagues est infini bien que la file d'attente ait une probabilité 1 de s'arrêter en un temps fini.