Première épreuve
Mines-Ponts MP 2003

Soit E un espace préhilbertien réel muni d'un produit scalaire noté $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ et de la norme hilbertienne associée à ce produit scalaire, notée $\|\cdot\|$.

Étant donné un réel μ supérieur ou égal à 1, une famille au plus dénombrable $(x_i)_{i\in I}$ de vecteurs **unitaires** de E est dite **μ-presque orthogonale** si et seulement si pour toute partie **finie** J de I on a

$$\forall (a_j)_{j\in J} \in \mathbf{R}^J \qquad \frac{1}{\mu}\sum_{j\in J} a_j^2 \leq \left\| \sum_{j\in J} a_j x_j \right\|^2 \leq \mu \sum_{j\in J} a_j^2 \ .$$

PARTIE I

Le but de cette première partie est d'établir des résultats qui seront utiles dans la seconde partie.

Étant donné un entier n strictement positif ($n \geq 1$), soit I_n, S_n et J_n les trois réels définis par les relations ci-dessous :

$$I_n = \int_0^n \left(\int_0^n \frac{\mathrm{d}y}{x+y+1} \right) \mathrm{d}x \qquad S_n = \sum_{i=0}^{n-1} \left(\sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{i+j+1} \right) \qquad J_n = \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{n-1} x^k \right)^2 \mathrm{d}x \ .$$

Intégrale I_n

1. Calculer, pour toute valeur de l'entier strictement positif n, l'intégrale I_n.
2. Déterminer les constantes A, B, C et D telles qu'on ait

$$I_n = An + B\ln(n) + C + \frac{D}{n} + \mathrm{o}_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\right) \ .$$

Somme S_n

3. Établir un encadrement de S_n à l'aide de I_n.
4. En déduire $S_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 2n\ln(2)$.

Intégrale J_n

5. Déterminer la relation liant J_n à S_n. En déduire un équivalent de J_n en l'infini.

PARTIE II

Premières propriétés

Soit E_n un espace euclidien de dimension n et $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ une famille de vecteurs de E_n.

6. Démontrer que $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est une base orthonormée de E_n si et seulement si elle est 1-presque orthogonale.
7. Démontrer que si $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est μ-presque orthogonale, alors c'est une famille libre.

Un exemple

Soit E l'espace vectoriel des fonctions réelles définies et continues sur le segment $[0;1]$ muni du produit scalaire donné par

$$\langle f \mid g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x)\,\mathrm{d}x \ .$$

Soit $(P_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite des fonctions de E définies par la relation suivante :

$$P_n(x) = \sqrt{2n+1}x^n \ .$$

8. Démontrer que, bien que la suite des fonctions P_n de norme unité soit libre, la suite $(P_n)_{n\in\mathbf{N}}$ n'est pas presque orthogonale.

Cas de la dimension finie

Soit E_n un espace euclidien de dimension n et $(V_1, V_2, \dots, V_n)$ une famille libre de vecteurs unitaires de E_n. Étant donné n réels $a_1, a_2, \dots, a_n$, on note A et W les vecteurs et M la matrice carrée d'ordre n donné·e·s par

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \quad , \quad W = \sum_{i=1}^{n} a_i V_i \quad \text{et} \quad M = (m_{ij}) \quad \text{avec} \quad m_{ij} = \langle V_i \,|\, V_j \rangle \ .$$

9. En considérant son noyau, montrer que M est inversible, puis démontrer l'existence de matrices carrées P orthogonale et D diagonale dont tous les éléments de la diagonale sont différents de 0, telles que $M = {}^{\mathrm{t}}PDP$.
10. Établir la relation qui lie la norme du vecteur W au réel ${}^{\mathrm{t}}AMA$.
11. On note B le vecteur donné par $B = PA$, et on pose

$$B = PA = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \quad , \quad \|B\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix} \ .$$

Montrer que, pour tout entier i entre 1 et n, on a $\lambda_i > 0$ et donner un encadrement de la norme du vecteur W à l'aide des réels $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ et de la norme euclidienne canonique $\|B\|_2$ de B.

12. En déduire que la suite $(V_1, V_2, \dots, V_n)$ est μ-presque orthogonale ; préciser des valeurs possibles pour le réel μ.

Une condition suffisante

Soit maintenant $(V_n)_{n \geq 1}$ une famille dénombrable de vecteurs unitaires d'un espace préhilbertien réel E.

13. On suppose qu'il existe un réel α vérifiant

$$\alpha > 3 \quad \text{et} \qquad \forall (p,q) \in \mathbf{N}^* \times \mathbf{N}^* \ \ |\langle V_p \,|\, V_q \rangle| \leq \frac{1}{\alpha^{|p-q|}} \ .$$

Démontrer que la famille $(V_n)_{n \geq 1}$ est presque orthogonale.

Deux questions préliminaires

14. Soit f la fonction définie dans le quart de plan $[1;+\infty[\times [1;+\infty[$ par la relation suivante :

$$f(x,y) = \frac{\sqrt{2y+1}\sqrt{2xy+1}}{y + xy + 1} \ .$$

Pour a et b dans $[1;+\infty[$, étudier les variations des fonctions définies sur $[1;+\infty[$ par :

$$g_b \ : \ x \mapsto f(x,b) \ ; \quad h_a \ : \ y \mapsto f(a,y) \ ; \quad G \ : \ x \mapsto \lim_{y \to +\infty} f(x,y) \quad H \ : y \mapsto \lim_{x \to +\infty} f(x,y) \ .$$

15. Soit γ un réel vérifiant $0 < \gamma < 1$. Démontrer l'existence d'une fonction φ_γ, définie sur $[1;+\infty[$ vérifiant

$$\forall y \in [1;+\infty[\qquad f(\varphi_\gamma(y), y) = \gamma \ .$$

Démontrer l'existence d'un réel β strictement supérieur à 1 vérifiant $G(\beta) = \gamma$ et minorant l'image par φ_γ de la demi-droite fermée $[1;+\infty[$.

Retour à l'exemple

On considère à nouveau la suite de fonctions polynomiales considérées à la question 8. Soit $(k_i)_{i \in \mathbf{N}}$ une suite strictement croissante d'entiers et, pour i entier, $Q_i = P_{k_i}$. On suppose que $(Q_i)_{i \geq 0}$ est μ-presque orthogonale.

16. Démontrer $\mu > 1$ puis qu'il existe un réel β, strictement supérieur à 1, tel que, pour tout indice i, on ait

$$k_{i+1} \geq \beta k_i \ .$$

Première épreuve – Mines-Ponts MP 2003

PARTIE I

1. Pour x dans $\mathbf{R}_+$, la fonction $y \mapsto \dfrac{1}{x+y+1}$ est une fraction rationnelle définie sur $\mathbf{R}_+$, car le dénominateur y est strictement positif, donc intégrable et une primitive est donnée par $y \mapsto \ln(x+y+1)$. Pour y fixé dans $\mathbf{R}_+$, la fonction $x \mapsto \ln(x+y+1)$ est continue sur $\mathbf{R}_+$ car l'argument du logarithme est une fonction affine strictement positive sur $\mathbf{R}_+$, et une primitive en est donnée par $x \mapsto (x+y+1)\ln(x+y+1) - x$. Il en résulte
$$I_n = \int_0^n \left(\ln(x+n+1) - \ln(x+1)\right) \mathrm{d}x = (2n+1)\ln(2n+1) - 2(n+1)\ln(n+1)\,,$$
i.e. $\boxed{I_n = (2n+1)\ln(2n+1) - 2(n+1)\ln(n+1).}$

2. Par équation fonctionnelle du logarithme il vient
$$I_n = (2n+1)\ln(n) + (2n+1)\ln(2) + (2n+1)\ln\left(1+\frac{1}{2n}\right) - 2(n+1)\ln(n) - 2(n+1)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$$
puis, comme $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \mathrm{o}_{x\to 0}\left(x^{-2}\right)$
$$I_n = 2n\ln(2) - \ln(n) + \ln(2) + \frac{2n+1}{2n} - \frac{2n+1}{8n^2} - 2\frac{n+1}{n} + \frac{n+1}{n^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)$$
et donc $\boxed{A = 2\ln(2),\ B = -1,\ C = \ln(2) - 1 \text{ et } D = -\frac{3}{4}.}$

3. Soit i et j des entiers naturels. Par comparaison entre série et intégrale, puisque la fonction inverse est continue, strictement positive et strictement décroissante sur $\mathbf{R}_+^*$, il vient en appliquant deux fois l'inégalité de la moyenne
$$\int_i^{i+1} \left(\int_j^{j+1} \frac{\mathrm{d}y}{x+y+1}\right) \mathrm{d}x < \int_i^{i+1} \frac{\mathrm{d}x}{x+j+1} < \frac{1}{i+j+1}$$
et, si $i \geq 1$ et $j \geq 1$,
$$\frac{1}{i+j+1} < \int_{i-1}^{i} \frac{\mathrm{d}x}{x+j+1} < \int_{i-1}^{i} \left(\int_{j-1}^{j} \frac{\mathrm{d}y}{x+y+1}\right) \mathrm{d}x\,.$$
En sommant ces inégalités et par relation de Chasles, il vient pour j dans $[\![0;n]\!]$
$$\int_0^n \left(\int_j^{j+1} \frac{\mathrm{d}y}{x+y+1}\right) \mathrm{d}x < \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{i+j+1}$$
puis, par linéarité de l'intégrale et relation de Chasles, $I_n < S_n$. Si $j \geq 1$ on a de plus
$$\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i+j+1} \leq \frac{1}{j+1} + \int_0^n \left(\int_{j-1}^{j} \frac{\mathrm{d}y}{x+y+1}\right) \mathrm{d}x$$
et donc, par positivité des termes,
$$S_n < S_n + 2\sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n+1+i} + \frac{1}{2n+1} = S_{n+1} \leq \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i+1} + \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j+1} + I_n < I_n + 1 + 2\int_1^n \frac{\mathrm{d}x}{x}$$

soit $\boxed{I_n < S_n < I_n + 2\ln(n) + 1.}$

Remarque : on pourrait affiner en tenant compte de $S_{n+1} - S_n > \dfrac{1}{2n+1} + 2\displaystyle\int_n^{2n} \frac{\mathrm{d}x}{x}$, et obtenir $S_n < I_n + \dfrac{2n}{2n+1} + 2\ln(n/2)$.

4. D'après les deux questions précédentes et puisque $2\ln(n) + 1 = \mathrm{o}\,(n)$, S_n est encadré par deux termes, tous deux équivalents à $2n\ln(2)$, et donc $\boxed{S_n \sim 2n\ln(2).}$

5. On a, en développant le carré et par linéarité,

$$J_n = \int_0^1 \sum_{0\le i,j\le n-1} x^{i+j}\,\mathrm{d}x = \sum_{0\le i,j\le n-1} \int_0^1 x^{i+j}\,\mathrm{d}x$$

et donc $\boxed{J_n = S_n \text{ et } J_n \sim 2n\ln(2).}$

PARTIE II

6. Remarquons qu'avec les notations du préambule, une famille est 1-presque orthogonale si et seulement si pour toute partie finie J de I et tout $(a_j)_{j\in J}$ dans $\mathbf{R}^J$, on a

$$\left\|\sum_{j\in J} a_j x_j\right\|^2 = \sum_{j\in J} a_j^2 \left\|x_j\right\|^2 \ .$$

Cette dernière égalité est vraie, d'après le théorème de Pythagore, dès que la famille $(a_j x_j)_{j\in J}$ est orthogonale, et donc dès que $(x_j)_{j\in J}$ l'est. Réciproquement en prenant tous les a_j nuls sauf deux égaux à 1, le théorème de Pythagore montre que les vecteurs d'une famille 1-presque orthogonale sont orthogonaux deux à deux. Comme elle est formée de vecteurs non nuls car unitaires, c'est une famille libre et par cardinalité, c'est une base de E_n. Par conséquent

$\boxed{(x_1,\ldots,x_n) \text{ est une base orthonormée si et seulement si c'est une famille 1-presque orthogonale.}}$

7. Soit $(a_1,\ldots,a_n)$ dans $\mathbf{R}^n$. Par positivité des termes, on a

$$\left\|\sum_{i=1}^n a_i x_i\right\|^2 = 0 \Longrightarrow \frac{1}{\mu}\sum_{i=1}^n a_i^2 = 0 \Longrightarrow \forall i\in [\![1;n]\!] \ \ a_i = 0$$

et donc $\boxed{(x_1,\ldots,x_n) \text{ est une famille libre.}}$

8. La famille $(P_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est libre car formée de fonctions polynomiales non nulles et étagée en degré. On a, pour n entier,

$$\|P_n\|^2 = (2n+1)\int_0^1 x^{2n}\,\mathrm{d}x = 1 \ .$$

En prenant $J = [\![0;n-1]\!]$ et $(a_j)_{0\le j\le n-1} = (1/\sqrt{2j+1})_{0\le j\le n-1}$, il vient

$$\left\|\sum_{i=0}^{n-1} a_i P_i\right\|^2 = J_n \sim 2n\ln(2) \quad \text{et} \quad \sum_{i=0}^{n-1} a_i^2 = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{2i+1} \ .$$

Or la série harmonique est divergente et $\dfrac{1}{2n+1} \sim \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{n}$. Par comparaison de séries à termes positifs divergentes, on a donc

$$\sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{2i+1} \sim \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{2i} \sim \frac{1}{2}\ln(n)$$

par comparaison entre série et intégrale, dans le cas divergent, appliqué à la fonction inverse, qui est continue, strictement positive et strictement décroissante sur $\mathbf{R}_+^*$. En particulier on ne saurait avoir

$$\left\|\sum_{i=0}^{n-1} a_i P_i\right\|^2 = \mathrm{O}\left(\sum_{i=0}^{n-1} a_i^2\right)$$

et ainsi $\boxed{(P_n)_{n\in\mathbf{N}} \text{ n'est pas presque orthogonale.}}$

9. Soit X un élément du noyau de M, en notant (a_i) ses coordonnées, celles de MX sont $(\sum_{j=1}^{n} \langle V_i \,|\, V_j\rangle\, a_j)$ i.e. en notant $W = \sum_{j=1}^{n} a_j V_j$, $(\langle V_i \,|\, W\rangle)$. On en déduit que W est orthogonal à tous les (V_i). Comme on a affaire à une famille libre de cardinal la dimension de E_n, $(V_i)_{1\le i\le n}$ est une base de E_n et donc W est nul. Encore par indépendance des (V_i), on en déduit que tous les (a_i) sont nuls et donc X aussi. Par conséquent $\boxed{M \text{ est inversible.}}$

   Par symétrie du produit scalaire, M est une matrice symétrique. Étant réelle elle est orthodiagonalisable d'après le théorème spectral et on dispose de P orthogonale et de D diagonale telles que $M = {}^{\mathrm{t}}PDP$ et la diagonale de D est formée du spectre de M. Comme ce dernier ne contient pas 0, la diagonale de D non plus, i.e. $\boxed{M = {}^{\mathrm{t}}PDP \text{ avec } P \text{ orthogonale, } D \text{ diagonale à éléments diagonaux non nuls.}}$

10. Les calculs précédents montrent que MA est le vecteur de coordonnées $(\langle V_i \,|\, W\rangle)$ et donc ${}^{\mathrm{t}}AMA = \sum_{i=1}^{n} a_i \langle V_i \,|\, W\rangle = \langle W \,|\, W\rangle$ par linéarité. D'où $\boxed{{}^{\mathrm{t}}AMA = \|W\|^2.}$

11. D'après les questions 9 et 10, on a ${}^{\mathrm{t}}BDB = \|W\|^2$, i.e. $\sum_{i=1} \lambda_i b_i^2 = \|W\|^2$. Puisque P est orthogonale, elle est inversible d'inverse ${}^{\mathrm{t}}P$, de sorte qu'en notant $(e_i)_{1\le i\le n}$ la base canonique de $\mathbf{R}^n$ et en choisissant pour $a_1, \ldots, a_n$ les réels tels que $A = {}^{\mathrm{t}}Pe_i$, on a $B = e_i$ et $\lambda_i = \|W\|^2$. On en déduit que, pour tout entier i entre 1 et n, on a $\boxed{\lambda_i > 0.}$

    Par positivité des carrés, il vient également $\inf_{1\le i\le n} \lambda_i \|B\|_2^2 \le \|W\|^2 \le \max_{1\le i\le n} \lambda_i \|B\|_2^2$ et donc, par croissance de la racine carrée et positivité des λ_i, $\boxed{\sqrt{\inf_{1\le i\le n} \lambda_i}\, \|B\|_2 \le \|W\| \le \sqrt{\max_{1\le i\le n} \lambda_i}\, \|B\|_2}$

    Remarque : si A est un vecteur propre de M associé à une valeur propre λ de A, on a ${}^{\mathrm{t}}AMA = {}^{\mathrm{t}}A(\lambda A) = \lambda \|A\|^2$ et donc le spectre de M est inclus dans $\mathbf{R}_+^*$.

12. Puisque P est orthogonale, on a $\|PA\|_2 = \|A\|_2$ et donc la question précédente montre qu'on a

$$\inf_{1\le i\le n} \lambda_i \sum_{j=1}^{n} a_j^2 \le \left\|\sum_{j=1}^{n} a_j V_j\right\|^2 \le \max_{1\le i\le n} \lambda_i \sum_{j\in J} a_j^2$$

   et donc, puisque le spectre de M est fini et inclus dans $\mathbf{R}_+$, on dispose du réel μ_M donné par

$$\mu_M = \max\left(\lambda_1, \frac{1}{\lambda_1}, \ldots, \lambda_n, \frac{1}{\lambda_n}\right)$$

   et alors pour $\mu \ge \mu_M$, puisqu'on a affaire à une famille unitaire, $\boxed{V_1, \ldots, V_n \text{ est } \mu\text{-presque orthogonale}}$ et $V_1, \ldots, V_n$ est μ-presque orthogonale si et seulement si $\boxed{\mu \ge \max(\mathrm{Sp}(M) \cup \mathrm{Sp}(M^{-1})).}$

13. Soit J une partie finie de $\mathbf{N}^*$, $(a_j) \in j \in J$ dans $\mathbf{R}^J$ et k dans $\mathbf{Z}$, on a, par inégalité triangulaire et par hypothèse sur $(V_n)_{n\ge1}$,

$$\left|\sum_{\substack{(p,q)\in J^2\\ p-q=k}} \langle a_p V_p \,|\, a_q V_q\rangle\right| \le \sum_{\substack{(p,q)\in J^2\\ p-q=k}} \frac{|a_p|\,|a_q|}{\alpha^{|k|}}$$

ou encore, en notant $\mathbb{1}_J$ la fonction indicatrice de J,

$$\left| \sum_{\substack{(p,q)\in J^2 \\ p-q=k}} \langle a_p V_p \,|\, a_q V_q \rangle \right| \leq \alpha^{-|k|} \sum_{q\in J} |a_{q+k}| \, \mathbb{1}_J(q+k) \, |a_q| \ ,$$

et donc, par inégalité de Cauchy-Schwarz et positivité des termes rajoutés,

$$\left| \sum_{\substack{(p,q)\in J^2 \\ p-q=k}} \langle a_p V_p \,|\, a_q V_q \rangle \right| \leq \alpha^{-|k|} \sqrt{\sum_{q\in J} a_q^2} \sqrt{\sum_{q\in J} a_{q+k}^2 \mathbb{1}_J(q+k)} \leq \alpha^{-|k|} \sqrt{\sum_{q\in J} a_q^2} \sqrt{\sum_{p\in J} a_p^2}$$

et on en déduit, par sommation de série géométrique de raison $\dfrac{1}{\alpha}$,

$$\left| \sum_{\substack{(p,q)\in J^2 \\ p\neq q}} \langle a_p V_p \,|\, a_q V_q \rangle \right| \leq \left(\sum_{k\in \mathbf{N}^*} \alpha^{-k} + \sum_{-k\in \mathbf{N}^*} \alpha^{k} \right) \sum_{q\in J} a_q^2 = \frac{2}{\alpha-1} \sum_{q\in J} a_q^2 \ .$$

Comme on a, puisqu'on a affaire à une famille unitaire,

$$\left\| \sum_{j\in J} a_j V_j \right\|^2 = \sum_{j\in J} a_j^2 + \sum_{\substack{(p,q)\in J^2 \\ p\neq q}} \langle a_p V_p \,|\, a_q V_q \rangle \ ,$$

il vient, par inégalité triangulaire,

$$\left(1 - \frac{2}{\alpha-1}\right) \sum_{q\in J} a_q^2 \leq \left\| \sum_{j\in J} a_j V_j \right\|^2 \leq \left(1 + \frac{2}{\alpha-1}\right) \sum_{q\in J} a_q^2 \ .$$

On en déduit, puisque $\alpha - 3$ est strictement positif,

$$\boxed{(V_n)_{n\geq 1} \text{ est } \mu\text{-presque orthogonale pour } \mu \geq \max\left(\frac{\alpha+1}{\alpha-1}, \frac{\alpha-1}{\alpha-3}\right).}$$

14. Par croissances comparées, H est bien définie et nulle sur $[1;+\infty[$. Pour $x \geq 1$, on a

$$f(x,y) \underset{y\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{2y}\sqrt{2xy}}{(1+x)y} \ ,$$

et donc G est bien définie et on a $G(x) = 2\dfrac{\sqrt{x}}{1+x}$. Les fonctions f et G sont donc toutes deux données par des rapports entre moyennes géométrique et arithmétique. Pour u et v deux réels strictement positifs, avec $u \geq v$, on pose $t = \frac{u}{v}$ et il vient

$$\left(\frac{2\sqrt{uv}}{u+v}\right)^2 = \frac{(u+v)^2 - (u-v)^2}{(u+v)^2} = 1 - \left(\frac{u-v}{u+v}\right)^2 = 1 - \left(1 - 2\frac{v}{u+v}\right)^2 = 1 - \left(1 - \frac{2}{1+t}\right)^2 \ .$$

On note φ la fonction donnée par le membre de droite. Elle est strictement décroissante sur $[1;+\infty[$ car la fonction carré est strictement croissante sur $\mathbf{R}_+$ et que pour $t \geq 1$ on a $1 - \frac{2}{1+t} \in \mathbf{R}_+$. Par définition, pour $x \geq 1$ et $y \geq 1$, on a, en considérant $u = x \geq 1 = v$, $G(x) = \varphi(x)$ et, en considérant $u = 2xy + 1 \geq 2x + 1 = v$, $f(x, y) = \varphi\left(\dfrac{2xy+1}{2y+1}\right)$.

Pour $b \geq 1$, comme on a $\dfrac{2xb+1}{2b+1} = \dfrac{2b}{2b+1}x + \dfrac{1}{2b+1}$ et $\dfrac{2b}{2b+1} > 0$, la fonction g_b est la composée de la fonction affine strictement croissante avec φ et est donc strictement croissante.

Pour $a \geq 1$, comme on a $\dfrac{2ay+1}{2y+1} = a - \dfrac{a-1}{2y+1}$, la fonction h_a est la composée d'une fonction affine strictement croissante ($y \mapsto 2y+1$), de la fonction inverse et d'une fonction affine $u \mapsto -(a-1)u - a$ strictement décroissante si $a > 1$ et constante sinon, avec φ. Elle est donc strictement décroissante si $a > 1$ et constante sinon : $\boxed{h_1 \text{ et } H \text{ sont constantes et les autres fonctions sont strictement décroissantes.}}$

15. Soit y dans $[1; +\infty[$. Comme g_y est continue, strictement décroissante et vérifie $g_y(1) = 1$ et $\lim_{+\infty} g_y = H(y) = 0$ le théorème de la bijection assure que g_y réalise une bijection de $]1; +\infty[$ sur $]0; 1[$, d'où l'existence d'un unique x dans $]1; +\infty[$ tel que $f(x, y) = \gamma$ et $\boxed{\text{l'existence de } \varphi_\gamma.}$

 Par décroissance de h_x on a également $\gamma = f(x, y) \geq G(x)$. Comme G est également continue, strictement décroissante et vérifie $G(1) = 1$ et $\lim_{+\infty} G = 0$, on dispose d'un unique β dans $]1; +\infty[$, tel que $G(\beta) = \gamma$ et alors, par décroissance stricte de G et puisque $G(\beta) = \gamma \geq G(\varphi_\gamma(y))$, on a $\varphi_\gamma(y) \geq \beta$, i.e. $\boxed{G(\beta) = \gamma \text{ et } \beta \leq \inf \varphi_\gamma.}$

16. Soit i un entier naturel. On a $k_{i+1} > k_i$ par stricte croissance de la suite (k_n). On choisit $J = \{i, i+1\}$, $a_i = 1$ et $a_{i+1} = -1$. Il vient alors

$$0 \leq \|Q_i - Q_{i+1}\|^2 - \frac{1}{\mu}(a_i^2 + a_{i+1}^2) = 2 - 2\frac{\sqrt{2k_i+1}\sqrt{2k_{i+1}+1}}{k_i + k_{i+1} + 1} - \frac{2}{\mu}$$

 et donc $\dfrac{\sqrt{2k_i+1}\sqrt{2k_{i+1}+1}}{k_i + k_{i+1} + 1} \leq \dfrac{\mu - 1}{\mu}$. Comme le membre de gauche est strictement positif, on en déduit $\boxed{\mu > 1.}$

 Si $k_i = 0$, l'inégalité $k_{i+1} \geq \beta k_i$ est vraie pour toute valeur de β car $k_{i+1} > k_i = 0$. On suppose dorénavant $k_i > 0$. On pose $\gamma = \dfrac{\mu - 1}{\mu}$, de sorte qu'on a $0 < \gamma < 1$. On a également $\dfrac{k_{i+1}}{k_i} > 1$ par croissance stricte de la suite (k_n) et stricte positivité de k_i. Le calcul précédent permet alors d'obtenir

$$f\left(\frac{k_{i+1}}{k_i}, k_i\right) \leq \gamma = f(\varphi_\gamma(k_i), k_i)$$

 et donc, par décroissance stricte de g_{k_i}, il vient $\dfrac{k_{i+1}}{k_i} \geq \varphi_\gamma(k_i)$. Grâce à la question précédente on dispose d'un réel β vérifiant $\beta > 1$, $G(\beta) = \gamma$ et $\beta \leq \inf \varphi_\gamma$. En particulier $\beta \leq \dfrac{k_{i+1}}{k_i}$, i.e. $\boxed{k_{i+1} \geq \beta k_i.}$