# Deuxième composition de mathématiques
# Mines-Ponts 2003 – MP

L'objet du problème est l'étude de méthodes analytiques (méthodes du gradient, du Lagrangien) pour résoudre l'équation linéaire $A.x = b$ où $A$ est une matrice symétrique positive, inversible, $b$ un vecteur donné de $\mathbf{R}^n$ et $x$ un vecteur inconnu de $\mathbf{R}^n$ ou d'un sous-espace vectoriel $F$ de $\mathbf{R}^n$.

Dans tout le problème, l'entier $n$ est un entier naturel supérieur ou égal à 2 ; la base canonique de $\mathbf{R}^n$ est notée $e_1, e_2, \ldots, e_n$ ; le produit scalaire de deux vecteurs $x$ et $y$ de $\mathbf{R}^n$ est noté $\langle x \,|\, y\rangle$. La norme d'un vecteur $x$ est notée $\|x\|$.

Les matrices considérées sont réelles ; l'espace vectoriel des matrices carrées réelles d'ordre $n$ est noté $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$. Il est admis que l'application qui, à une matrice $M$ de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$, associe $N(M)$ défini par $N(M) = \sup\limits_{\|x\|=1} \|M.x\|$ est une norme.

Une matrice symétrique $A$ est dite positive lorsque, pour tout vecteur $x$ de $\mathbf{R}^n$, $\langle A.x \,|\, x\rangle \geq 0$.

## PARTIE 1

Le but de cette partie est la résolution de l'équation $A.x = b$ où $A$ est une matrice carrée d'ordre $n$ symétrique positive et inversible, $b$ un vecteur donné de $\mathbf{R}^n$ et $x$ un vecteur inconnu.

**Résultats préliminaires**

Soit $M$ une matrice carrée symétrique d'ordre $n$.

1. Démontrer qu'il existe un plus grand réel $p$ et un plus petit réel $q$ tels que,
$$\forall x \in \mathbf{R}^n,\ p\,\|x\|^2 \leq \langle M.x \,|\, x\rangle \leq q\,\|x\|^2.$$
Préciser ces deux réels $p$ et $q$ en fonction des valeurs propres de la matrice $M$.

2. Montrer que, pour que cette matrice $M$ soit inversible et positive, il faut et il suffit que toutes ses valeurs propres soient strictement positives.

3. Démontrer $N(M) = \sup\limits_{1\leq i\leq n} |\lambda_i|$, où $(\lambda_i)_{1\leq i\leq n}$ sont les valeurs propres de $M$.

Étant donné la matrice carrée, d'ordre $n$, symétrique positive et inversible $A$ et le vecteur $b$, soit $\alpha$ un réel vérifiant $0 < \alpha < 2/\lambda_n$ où $\lambda_n$ est la plus grande valeur propre de la matrice $A$ ; soit $(x^k)_{k\in\mathbf{N}}$ la suite définie par un premier vecteur $x^0$ choisi arbitrairement dans $\mathbf{R}^n$ et par la relation de récurrence suivante : $\forall k \in \mathbf{N},\ x^{k+1} = x^k + \alpha(b - A.x^k)$.

**Etude de la suite $(x^k)_{k\in\mathbf{N}}$**

4. Démontrer que la suite $(x^k)_{k\in\mathbf{N}}$ est une suite convergente de limite le vecteur $z$ de l'espace $\mathbf{R}^n$, solution de l'équation $A.x = b$.

Soit $f$ la fonction réelle, définie dans $\mathbf{R}^n$, par la relation : $f(x) = \dfrac{1}{2}\langle A.x \,|\, x\rangle - \langle b \,|\, x\rangle$.

**Minimum de $f$**

5. Calcul préparatoire : démontrer que l'expression $f(x+u) - f(x)$ se calcule en fonction des expressions $\langle A.u \,|\, u\rangle$, $\langle A.x \,|\, u\rangle$ et $\langle b \,|\, u\rangle$.

6. Démontrer que la fonction $f$ admet des dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x_k}$ $(1 \leq k \leq n)$.

Étant donné un vecteur $x$ de $\mathbf{R}^n$, soit $g(x)$ le vecteur de $\mathbf{R}^n$ donné par $g(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}(x) e_k$.

7. Exprimer ce vecteur $g(x)$ au moyen de la matrice $A$ et des vecteurs $x$ et $b$.

Étant donné deux vecteurs $x$ et $u$ de $\mathbf{R}^n$, soit $I(x,u)$ l'expression suivante :

$$I(x,u) = f(x+u) - f(x) - \langle g(x) \,|\, u \rangle \ .$$

8. Démontrer que, pour tout vecteur $x$ donné, il existe deux constantes positives ou nulles $r$ et $s$ telles que, pour tout vecteur $u$, $I(x,u)$ vérifie la relation suivante :

$$r \, \|u\|^2 \leq I(x,u) \leq s \, \|u\|^2 \ .$$

9. Démontrer que, pour que la fonction $f$ admette en $z$ un minimum, il faut et il suffit que le vecteur $z$ vérifie la relation $A.z = b$.

**Recherche du minimum de f**

Soit $\alpha$ un réel compris strictement entre 0 et $2/\lambda_n$.

10. Étant donné un vecteur $x$ de $\mathbf{R}^n$, déterminer le signe de l'expression suivante

$$f(x - \alpha g(x)) - f(x) \ .$$

11. Proposer, à partir de ce résultat, une méthode pour construire une suite de vecteurs $(y^k)_{k \in \mathbf{N}}$ qui converge vers le vecteur $z$ en lequel la fonction $f$ atteint son minimum ; la justication de la convergence n'est pas demandée.

## PARTIE 2

Le but de cette partie est de rechercher un vecteur $x$ appartenant à un sous-espace vectoriel $F$ de $\mathbf{R}^n$ qui vérifie l'équation $A.x = b$ où $A$ est une matrice carrée d'ordre $n$ symétrique positive et inversible. Le sous-espace vectoriel $F$ de $\mathbf{R}^n$ est supposé être le noyau d'une matrice $B$ appartenant à $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ ; ce noyau est supposé différent de tout l'espace $\mathbf{R}^n$ ($\mathrm{Ker}(B) \neq \mathbf{R}^n$).

L'équivalence, établie dans la première partie, entre d'une part résoudre l'équation $A.x = b$ et d'autre part chercher le vecteur $z$ rendant minimum la fonction $f$ définie sur $\mathbf{R}^n$ par la relation suivante $f(x) = \dfrac{1}{2} \langle A.x \,|\, x \rangle - \langle b \,|\, x \rangle$, conduit à se poser le problème suivant :

Soit $B$ une matrice appartenant à $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ dont le noyau $F$ est différent de $\mathbf{R}^n$ ; rechercher un vecteur $\overline{x}$ appartenant à $F$ rendant minimum la restriction de la fonction $f$ au sous-espace vectoriel $F$.

**Existence du minimum de la fonction $f$ dans $F$**

12. Démontrer que la fonction $f$ possède la propriété suivante : pour tout réel $c$, il existe un réel $\rho$ tel que, pour tout vecteur $x$ de $F$ de norme supérieure ou égale à $\rho$, on a $f(x) \geq c$.

13. En déduire que, si $y$ est un point de $F$, il existe un réel $r$ tel que pour tout vecteur $x$ de $F$ de norme supérieure ou égale à $r$, $f(x) \geq f(y)$.

14. Démontrer à l'aide du résultat précédent qu'il existe au moins un vecteur $\overline{x}$ du sous-espace vectoriel $F$ en lequel la restriction de la fonction $f$ à ce sous espace $F$ atteint un minimum.

15. Démontrer qu'il existe un seul vecteur $\overline{x}$ en lequel la fonction $f$ atteint son minimum dans $F$, en admettant que la fonction $f$ est strictement convexe ; c'est-à-dire : pour tout couple $(x,y) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$ de vecteurs et tout réel $\lambda$ appartenant à l'intervalle ouvert $]0,1[$, les valeurs prises par la fonction $f$ vérifient la relation suivante :

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) \,,$$

où l'inégalité est stricte si et seulement si les vecteurs $x$ et $y$ sont différents.

**Propriétés du point $\overline{x}$**

16. Démontrer que, pour qu'un vecteur $y$ de $F$ rende minimum la restriction de la fonction $f$ au sous-espace vectoriel $F$, il faut et il suffit que le vecteur $Ay-b$ soit orthogonal à ce sous-espace $F$ de $\mathbf{R}^n$.

17. Démontrer que la valeur prise par la fonction $f$ au point $\overline{x}$, en lequel elle atteint son minimum dans $F$, est donnée par la relation suivante :

$$f(\overline{x}) = -\frac{1}{2}\langle A\overline{x} \,|\, \overline{x}\rangle = -\frac{1}{2}\langle b \,|\, \overline{x}\rangle \ .$$

**Le Lagrangien $L$**

Soit $L$ la fonction définie sur l'espace produit $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$ par la relation suivante :

$$L(x,y) = f(x) + \langle y \,|\, Bx\rangle \ .$$

Un point $(x^*, y^*)$ de l'espace produit $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$ est dit point selle de la fonction $L$, s'il posséde la propriété suivante : quel que soit le point $(x,y)$ de l'espace produit $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$, les valeurs prises par la fonction $L$ aux points $(x^*, y)$, $(x^*, y^*)$ et $(x, y^*)$ vérifient la double inégalité suivante :

$$L(x^*, y) \leq L(x^*, y^*) \leq L(x, y^*) \ .$$

**Propriétés du Lagrangien et de ses points selles**

18. Établir l'inégalité suivante :

$$\sup_{y\in\mathbf{R}^n}\left(\inf_{x\in R^n} L(x,y)\right) \leq \inf_{x\in\mathbf{R}^n}\left(\sup_{y\in R^n} L(x,y)\right) \ .$$

Il est supposé dans toute la suite qu'il existe un point selle $(x^*, y^*)$ de la fonction $L$.

19. Démontrer que la valeur prise par la fonction $L$ en un point selle $(x^*, y^*)$ vérifie les égalités suivantes :

$$L(x^*, y^*) = \sup_{y\in\mathbf{R}^n}\left(\inf_{x\in R^n} L(x,y)\right) = \inf_{x\in\mathbf{R}^n}\left(\sup_{y\in R^n} L(x,y)\right) \ .$$

20. Démontrer, pour tout point $(x_1, y_1)$ de $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$, les équivalences suivantes :

$$\forall y \in R^n\,, \quad L(x_1, y) \leq L(x_1, y_1) \Leftrightarrow Bx_1 = 0$$

$$\forall x \in R^n\,, \quad L(x_1, y_1) \leq L(x, y_1) \Leftrightarrow Ax_1 + {}^{\mathrm{t}}By_1 = b \ .$$

21. Soit $x_1$ un vecteur du sous-espace vectoriel $F$ et $y_1$ un vecteur de $\mathbf{R}^n$. Démontrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour que le couple $(x_1, y_1)$ soit un point selle du Lagrangien $L$ est que le vecteur $x_1$ réalise le minimum de la restriction de la fonction $f$ à $F$ et que les vecteurs $x_1$ et $y_1$ vérifient la relation suivante :

$$Ax_1 + {}^{\mathrm{t}}By_1 = b \ .$$

La suite logique est la recherche d'un point selle du Lagrangien $L$.

**Algorithme d'Uzawa** : soit toujours $(x^*, y^*)$ un point selle, supposé exister ; étant donné un vecteur $y^0$ arbitraire de $\mathbf{R}^n$, une suite $(\rho_m)_{m\in\mathbf{N}}$ de réels, qui seront précisés plus loin, soit $(x^m)_{m\in\mathbf{N}}$ et $(y^m)_{m\in\mathbf{N}}$ les deux suites de vecteurs définies par les conditions suivantes :

- Pour tout entier naturel $m$, le vecteur $x^m$ est le vecteur qui rend minimum la fonction $x \mapsto L(x, y^m)$.
- Pour tout entier naturel m, le vecteur $y^{m+1}$ est défini par la relation suivante :

$$y^{m+1} = y^m + \rho_m B x^m \ .$$

**Existence des deux suites $(x^m)_{m\in\mathbf{N}}$ et $(y^m)_{m\in\mathbf{N}}$**

22. Démontrer que les conditions énoncées permettent de déterminer tous les termes de ces deux suites $(x^m)_{m\in\mathbf{N}}$ et $(y^m)_{m\in\mathbf{N}}$ et que les vecteurs de ces suites vérifient, pour tout entier naturel $m$, les relations suivantes :

$$A(x^m - x^*) + {}^{\mathrm{t}}B(y^m - y^*) = 0\,,$$

$$y^{m+1} - y^* = y^m - y^* + \rho_m B(x^m - x^*)$$

où $x^*$ et $y^*$ sont les deux vecteurs d'un point selle de $L$.

23. En déduire l'égalité ci-dessous :

$$\left\| y^{m+1} - y^* \right\|^2 = \|y^m - y^*\|^2 - 2\rho_m \langle A(x^m - x^*) \,|\, x^m - x^* \rangle + \rho_m^2 \, \|B(x^m - x^*)\|^2 \ .$$

**Convergence de la suite numérique de terme général $\|y^m - y^*\|^2$, $m \in \mathbf{N}$**

24. Un résultat préliminaire : démontrer l'existence d'une matrice carrée d'ordre $n$ symétrique positive inversible, notée $A^{1/2}$, telle que :

$$(A^{1/2})^2 = A \ .$$

Soit $C$ la matrice définie par la relation suivante :

$$C = A^{-1/2}.\,{}^{\mathrm{t}}B.B.A^{-1/2}\,,$$

où la matrice $A^{-1/2}$ est la matrice inverse de la matrice $A^{1/2}$.

25. Démontrer que la matrice $C$ est une matrice symétrique positive. Établir qu'il existe une constante $\nu$ telle que, pour tout vecteur $u$ de $\mathbf{R}^n$, l'inégalité ci-dessous soit vraie :

$$\|Bu\|^2 \leq \nu \, \langle Au \,|\, u \rangle \ .$$

Soit $\alpha$ et $\beta$ deux réels tels que le segment $[\alpha, \beta]$ soit contenu dans l'intervalle ouvert $]0, 2/\nu[$, $(0 < \alpha < \beta < 2/\nu)$. La suite des réels $\rho_m$ est supposée vérifier pour tout entier naturel $m$ l'inégalité suivante :

$$\alpha \leq \rho_m \leq \beta \ .$$

26. Démontrer que la suite de terme général $\|y^m - y^*\|^2$, $m \in \mathbf{N}$ est monotone décroissante ; utiliser, pour simplifier, la suite $(u^m)_{m\in\mathbf{N}}$ dont le terme général est défini par la relation suivante :

$$u^m = x^m - x^* \ .$$

**Convergence de la suite $(x^m)_{m\in\mathbf{N}}$**

27. En déduire la convergence et la limite de la suite $(x^m)_{m\in\mathbf{N}}$.

# Deuxième composition de mathématiques – Mines-Ponts 2003 – MP

## PARTIE 1

1. Puisque $M$ est symétrique réelle, on dispose d'une base orthonormée $(u_1,\ldots,u_n)$ de diagonalisation de (l'endomorphisme canoniquement associé à) $M$ et des valeurs propres $(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$ associées. Quitte à renuméroter, on peut supposer les valeurs propres de $M$ ordonnées de sorte qu'on ait $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n$. Soit alors $x$ dans $\mathbf{R}^n$. On dispose de ses coordonnées $(x_1,\ldots,x_n)$ dans la base $(u_1,\ldots,u_n)$ et alors

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \quad \text{et} \quad \langle M.x \,|\, x\rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2$$

de sorte qu'on a $\lambda_1 \|x\|^2 \leq \langle M.x \,|\, x\rangle$ avec égalité si $x = e_1$ par exemple et $\langle M.x \,|\, x\rangle \leq \lambda_n \|x\|^2$ avec égalité si $x = e_n$ par exemple. Il en résulte

$\boxed{\forall x \in \mathbf{R}^n,\ p\,\|x\|^2 \leq \langle M.x \,|\, x\rangle \leq q\,\|x\|^2}$, où $p$ est la plus petite des valeurs propres de $M$ et $q$ la plus grande.

2. Par définition et d'après 1., $M$ est positive si et seulement si $p \geq 0$ et elle est inversible si et seulement si 0 n'est pas valeur propre de $M$. Par conséquent elle est inversible et positive si et seulement si $p > 0$, autrement dit si et seulement si

toutes ses valeurs propres sont strictement positives.

3. Avec les notations de 1., on a $\|M.x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 x_i^2$ et donc $\|M.x\| \leq \max(|\lambda_1|,\ldots,|\lambda_n|)\,\|x\|$ avec égalité si $x$ est l'un des vecteurs de la base, selon la valeur du maximum. Il en résulte, puisqu'on a affaire à une base de vecteurs unitaires, qu'on a $\boxed{N(M) = \sup_{1\leq i\leq n} |\lambda_i|.}$

4. Puisque $A$ est inversible l'équation $A.x = b$ admet comme unique solution $z$ défini par $z = A^{-1}.b$. Il en résulte, pour $k$ dans $\mathbf{N}$,

$$\left\|x^{k+1} - z\right\| = \left\|x^k - z + \alpha(Az - Ax^k)\right\| \leq N(I_n - \alpha A)\left\|x^k - z\right\| .$$

Or $I_n - \alpha A$ est symétrique réelle, semblable à la matrice de diagonale $(1-\alpha\lambda_1,\ldots,1-\alpha\lambda_n)$ et donc ses valeurs propres vérifient

$$-1 < 1 - \alpha\lambda_n = \inf_{1\leq i\leq n}(1-\alpha\lambda_i) \leq \sup_{1\leq i\leq n}(1-\alpha\lambda_i) = 1 - \alpha \inf_{1\leq i\leq n} \lambda_i < 1$$

et donc, daprès 3., $N(I_n - \alpha A) < 1$. Par comparaison avec la suite géométrique de raison $N(M)$, la suite $(x^k - z)_{k\in\mathbf{N}}$ converge donc vers 0, i.e.

$\boxed{(x^k)_{k\in\mathbf{N}} \text{ converge vers l'unique solution de l'équation } A.x = b.}$

5. On a directement, par symétrie de $A$, $\boxed{f(x+u) - f(x) = \frac{1}{2}\langle A.u \,|\, u\rangle + \langle A.x \,|\, u\rangle - \langle b \,|\, u\rangle.}$

6. D'après les théorèmes généraux $f$ est de classe $C^\infty$. Mais on peut retrouver le résultat demandé directement. Soit $k$ dans $[\![1,n]\!]$ et $h$ dans $\mathbf{R}$, on a $f(x+he_k) = f(x) + h\left(\langle A.x \,|\, e_k\rangle - \langle b \,|\, e_k\rangle\right) + \dfrac{h^2}{2}\langle A.e_k \,|\, e_k\rangle$ et donc $f(x+he_k) = f(x) + h\,\langle A.x - b \,|\, e_k\rangle + o(h)$. Il en résulte que $f$ admet une dérivée directionnelle selon $e_k$ égale à $\langle A.x - b \,|\, e_k\rangle$, ou encore que $f$ est différentiable en $x$ et $\mathrm{d}f_x$ est l'application linéaire $u \mapsto \langle A.x - b \,|\, u\rangle$ (i.e. $\nabla f_x = A.x - b$). Par conséquent $\boxed{f \text{ admet des dérivées partielles.}}$

7. D'après ce qui précède $g(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \langle A.x - b \,|\, e_k\rangle\, e_k$ et donc, puisqu'on a affaire à une base orthonormée, $\boxed{g(x) = A.x - b.}$

8. D'après ce qui précède, on a $I(x,u) = \dfrac{1}{2}\langle A.u \,|\, u\rangle$ et donc, d'après 1. et puisque $A$ est positive, avec $r$ et $s$ les plus petite et plus grande valeurs propres de $A$, $\boxed{r\,\|u\|^2 \le I(x,u) \le s\,\|u\|^2.}$

9. Pour que $f$ admette un minimum en $z$, il est nécessaire que ses dérivées partielles s'y annule et donc qu'on ait $g(z) = 0$ (ou plus directement que $\mathrm{d}f$ s'y annule), i.e. puisque le produit scalaire est défini, $A.z = b$. Dans ce cas $f$ y admet un minimum si et seulement si $I(z,u)$ est positive pour tout $u$ dans $\mathbf{R}^n$, ce qui est le cas d'après ce qui précède. Il en résulte que $\boxed{f \text{ admet en } z \text{ un minimum si et seulement si } A.z = b.}$

10. D'après 5. l'expression étudiée est égale à $\langle g(x) \,|\, -\alpha g(x)\rangle + \dfrac{\alpha^2}{2}\langle A.g(x) \,|\, g(x)\rangle$, i.e. $-\dfrac{\alpha}{2}$ fois la quantité $\langle (2I_n - \alpha A).g(x) \,|\, g(x)\rangle$. D'après le calcul fait en 8. la matrice $2I_n - \alpha A$ est symétrique positive et inversible donc, d'après 1.,
$\boxed{\text{le signe de } f(x - \alpha g(x)) - f(x) \text{ est strictement négatif si } g(x) \neq 0 \text{ et nul sinon.}}$

11. On se donne $\alpha$ vérifiant $0 < \alpha < 2/\lambda_n$ et $y^0$ dans $\mathbf{R}^n$. On pose alors, pour $k$ dans $\mathbf{N}$,
$y^{k+1} = y^k - \alpha g(y^k)$. Alors $(f(y^k))_{k\in\mathbf{N}}$ est une suite décroissante, minorée par $f(z)$. Elle converge donc. Si $(y^k)_{k\in\mathbf{N}}$ converge, par continuité de $g$, elle converge vers un zéro de $g$ et donc vers le point où $f$ admet son minimum.
En fait cette méthode est celle du 4., d'après l'expression de $g$ trouvée en 7. et donc il y a bien convergence.

## PARTIE 2

12. Soit $p$ et $q$ associés à $A$ grâce à 1. et $x$ dans $\mathbf{R}^n$. Il vient d'après 1. et l'inégalité de Cauchy-Schwarz,
$$f(x) \ge \frac{p}{2}\|x\|^2 - \|b\|\cdot\|x\| \;.$$
Puisque $p$ est strictement positif d'après 2., pour $\|x\| \ge \dfrac{2(\|b\|+1)}{p}$, on a $f(x) \ge \|x\|$. Soit alors $c$ un réel et $\rho = \max(c, 2(\|b\|+1)/p)$, alors pour tout vecteur $x$ de $F$ de norme supérieure ou égale à $\rho$, on a $\boxed{f(x) \ge c.}$

13. Soit $y$ un point de $F$ et $c$ donné par $c = f(y)$. D'après 12., il existe un réel $r$ tel que pour tout vecteur $x$ de $F$ de norme supérieure ou égale à $r$, $\boxed{f(x) \ge f(y).}$

14. Soit $y$ dans $F$. On dispose de $r$ donné par 13. Alors, puisque $F$ est de dimension finie, la boule $\overline{B}_r$ fermée de centre 0 et de rayon $r$, dans $F$, est un compact. Comme $\|f\|$ est continue, car $f$ est de classe $C^\infty$ et la norme est continue, elle atteint son minimum sur $\overline{B}_r$ d'après le théorème de Weierstrass. Soit donc $u$ dans $F$ tel que, pour $x$ dans $F$ avec $\|x\| \geq r$, $f(u) \leq f(x)$. D'après ce qui précède, on en déduit que pour tout $x$ dans $F$, $f(x)$ est supérieur à $\min(f(u), f(y))$ avec égalité si $x = u$ ou $x = y$, selon la valeur du minimum. Par conséquent $\boxed{\text{la restriction de la fonction } f \text{ à ce sous espace } F \text{ atteint un minimum.}}$

15. Dans une base de diagonalisation de $A$, la fonction $f$ s'écrit comme la somme de $n$ fonctions convexes, i.e. $x \mapsto \lambda_i x_i^2$, et d'une fonction linéaire. Elle est donc convexe. De plus, les applications $t \mapsto \lambda_i t^2$ étant strictement convexes, $f$ est en fait strictement convexe.

    Par convexité, si $f$ atteint son minimum en deux points $x$ et $y$ distincts, elle l'atteint sur tout le segment $[x, y]$ et ceci contredit la stricte convexité. Autrement dit

    $\boxed{\text{le minimum est atteint en un unique vecteur } \overline{x}.}$

16. Soit $y$ un vecteur de $F$ rendant minimum la restriction de la fonction $f$ au sous-espace vectoriel $F$, $u$ dans $F$ et $t$ dans $\mathbf{R}$. On a, d'après 5.,

$$f(y + tu) - f(y) = t \langle Ay - b \,|\, u\rangle + t^2 I(y, u)$$

    et donc il est nécessaire, pour que cette fonction ait un minimum en $t = 0$, que $Ay - b$ et $u$ soient orthogonaux. On en déduit que $Ay - b$ est orthogonal à $F$. Réciproquement on aura alors $f(u) = f(y) + I(y, u - y) \geq f(y)$ avec égalité si et seulement si $u = y$, d'après 8. : $\boxed{f_{|F} \text{ admet un minimum en } y \text{ si et seulement si } Ay - b \in F^\perp.}$

17. Puisque $\overline{x} \in F$, d'après ce qui précède, $\langle A.\overline{x} - b \,|\, \overline{x}\rangle = 0$, i.e. $\langle A.\overline{x} \,|\, \overline{x}\rangle = \langle b \,|\, \overline{x}\rangle$ et il vient, par définition de $f$, $\boxed{f(\overline{x}) = -\frac{1}{2}\langle A\overline{x} \,|\, \overline{x}\rangle = -\frac{1}{2}\langle b \,|\, \overline{x}\rangle.}$

18. Puisque $\overline{x} \in F$ et $F = \operatorname{Ker}(B)$, on a $B.\overline{x} = 0$. Il vient, pour tout $y$ dans $\mathbf{R}^n$, $L(\overline{x}, y) = f(\overline{x})$ et donc $\inf_{x \in \mathbf{R}^n} L(x, y) \leq f(\overline{x})$. Ce majorant étant indépendant de $y$, il vient $\sup_{y \in \mathbf{R}^n}\left(\inf_{x \in R^n} L(x, y)\right) \leq f(\overline{x})$.

    En tant que fonction de $y$, $L$ est une fonction affine et donc son supremum est infini sauf si elle est constante. Il en résulte $\inf_{x \in \mathbf{R}^n}\left(\sup_{y \in R^n} L(x, y)\right) = \inf_{x \in F}\left(\sup_{y \in R^n} L(x, y)\right)$ puisque $y \mapsto L(x, y)$ est constante si et seulement si $B.x = 0$, i.e. $x \in F$. De plus, pour $x$ dans $F$, $L(x, y) = f(x)$ et donc ce dernier infimum est égal à l'infimum de $f$ sur $F$. Par définition c'est $f(\overline{x})$ et donc

    $\boxed{\sup_{y \in \mathbf{R}^n}\left(\inf_{x \in R^n} L(x, y)\right) \leq \inf_{x \in \mathbf{R}^n}\left(\sup_{y \in R^n} L(x, y)\right).}$

19. Par définition d'un supremum, on a $\inf_{x \in R^n} L(x, y^*) \leq \sup_{y \in \mathbf{R}^n}\left(\inf_{x \in R^n} L(x, y)\right)$ et donc par définition d'un point selle $L(x^*, y^*) \leq \sup_{y \in \mathbf{R}^n}(\inf_{x \in R^n} L(x, y))$.

    De même, par définition d'un infimum, on a $\sup_{y \in R^n} L(x^*, y) \geq \inf_{x \in \mathbf{R}^n}\left(\sup_{y \in R^n} L(x, y)\right)$ et donc par définition d'un point selle $L(x^*, y^*) \geq \inf_{x\in\mathbf{R}^n}\Big(\sup_{y\in R^n} L(x,y)\Big)$. Ces deux inégalités, jointes à 18., donnent $\boxed{L(x^*, y^*) = \sup\limits_{y\in\mathbf{R}^n}\left(\inf\limits_{x\in R^n} L(x,y)\right) = \inf\limits_{x\in\mathbf{R}^n}\left(\sup\limits_{y\in R^n} L(x,y)\right).}$

20. Soit $(x_1, y_1)$ dans $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$. On a déjà mentionné que $L$ est une fonction affine de la seconde variable. Elle ne peut donc être majorée que si elle est constante, i.e. si sa première variable est dans le noyau de $B$. On en conclut $\boxed{\forall y \in R^n,\ L(x_1, y) \leq L(x_1, y_1) \Leftrightarrow Bx_1 = 0.}$

    Par symétrie du produit scalaire, on a $\langle y \,|\, Bx\rangle = \langle {}^{\mathrm{t}}By \,|\, x\rangle$ pour tout $x$ et $y$ dans $\mathbf{R}^n$ (i.e. l'adjoint de $B$ est ${}^{\mathrm{t}}B$). On en conclut qu'en tant que fonction de $x$, $L$ est la fonction $f$ de la première partie associée à $A$ et $b - {}^{\mathrm{t}}By$. D'après 9. on a donc

    $\boxed{\forall x \in R^n,\ L(x_1, y_1) \leq L(x, y_1) \Leftrightarrow Ax_1 + {}^{\mathrm{t}}By_1 = b.}$

21. D'après les calculs effectués en 18. et d'après 19. on a $L(x^*, y^*) = f(\overline{x})$.

    Si $(x_1, y_1)$ est un point selle, d'après 20., $Ax_1 + {}^{\mathrm{t}}By_1 = b$. De plus comme $x_1 \in F$, $L(x_1, y_1) = f(x_1)$ et donc $f(x_1) = f(\overline{x})$ d'après la remarque précédente, i.e. $f$ admet un minimum sur $F$ en $x_1$.

    Réciproquement puisque $x_1 \in F$, on a $Bx_1 = 0$ et donc, d'après 20., $(x_1, y_1)$ est un point selle de $L$ :

    $\boxed{\text{$(x_1, y_1)$ soit un point selle de $L$ si et seulement si $x_1$ réalise le minimum de la restriction de la fonction $f$ à $F$ et on a : $Ax_1 + {}^{\mathrm{t}}By_1 = b$.}}$

22. Pour $y$ fixé, la fonction $x \mapsto L(x, y)$ est la fonction $f$ de la première partie associée à $A$ et $b - {}^{\mathrm{t}}By$ et donc, d'après 9., on peut toujours effectuer la première étape de l'algorithme d'Uzawa. On peut alors effectuer la seconde et donc

    $\boxed{\text{les conditions énoncées permettent de déterminer tous les termes des suites $(x^m)_{m\in\mathbf{N}}$ et $(y^m)_{m\in\mathbf{N}}$.}}$

    Soit $m$ dans $\mathbf{N}$, d'après 9., on a $Ax^m = b - {}^{\mathrm{t}}By^m$. De plus, puisque $(x^*, y^*)$ est un point selle de $L$, on a $x^* \in F$ et donc, d'après 21., $b = Ax^* + {}^{\mathrm{t}}By^*$. Il vient, en remplaçant $b$ dans $Ax^m = b - {}^{\mathrm{t}}By^m$ et en utilisant la définition de $y^{m+1}$,

    $\boxed{A(x^m - x^*) + {}^{\mathrm{t}}B(y^m - y^*) = 0 \text{ et } y^{m+1} - y^* = y^m - y^* + \rho_m B(x^m - x^*).}$

23. On a, puisque l'adjoint de $B$ est ${}^{\mathrm{t}}B$, en utilisant la première égalité

    $$\langle y^m - y^* \,|\, B(x^m - x^*)\rangle = \langle {}^{\mathrm{t}}B(y^m - y^*) \,|\, x^m - x^*\rangle = -\langle A(x^m - x^*) \,|\, x^m - x^*\rangle$$

    et donc, en utilisant la seconde et l'identité de polarisation

    $\boxed{\left\|y^{m+1} - y^*\right\|^2 = \|y^m - y^*\|^2 - 2\rho_m \langle A(x^m - x^*) \,|\, x^m - x^*\rangle + \rho_m^2 \|B(x^m - x^*)\|^2.}$

24. Puisque $A$ est symétrique réelle positive et inversible, on dispose d'une matrice $P$ orthogonale et d'une matrice $D$ diagonale à diagonale strictement positive telles que $A = P^{-1}DP$. Soit alors $\Delta$ la matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont les racines carrées de ceux de $D$ et $B = P^{-1}\Delta P$. On a alors $B^2 = P^{-1}\Delta^2 P = A$. De plus $B$ est semblable à $\Delta$ donc a des valeurs propres strictement positives et $B = {}^{\mathrm{t}}P\Delta P$, puisque $P$ est orthogonale, et donc $B$ est symétrique réelle. D'après 2. elle est donc symétrique positive et inversible. En conclusion $\boxed{\text{il existe une matrice carrée d'ordre $n$ symétrique positive inversible et de carré $A$.}}$

25. Puisque $A^{1/2}$ est symétrique (et inversible), $A^{-1/2}$ l'est aussi et on a donc $C = {}^{\mathrm{t}}MM$ pour $M = BA^{-1/2}$. Il en résulte que $C$ est symétrique. Elle est également positive puisque, pour $x$ dans $\mathbf{R}^n$, $\langle C.x \mid x \rangle = \|Mx\|^2$ : $\boxed{C \text{ est symétrique positive.}}$

Soit $\nu$ la plus grande des valeurs propres de $C$ et $u$ dans $\mathbf{R}^n$. En appliquant 1. à $C$ et $A^{1/2}u$, il vient

$$\left\langle CA^{1/2}u \;\middle|\; A^{1/2}u \right\rangle \leq \nu \left\langle A^{1/2}u \;\middle|\; A^{1/2}u \right\rangle = \nu \langle Au \mid u \rangle$$

puisque $A^{1/2}$ est auto-adjoint. Pour la même raison il vient

$$\left\langle CA^{1/2}u \;\middle|\; A^{1/2}u \right\rangle = \left\langle A^{1/2}CA^{1/2}u \;\middle|\; u \right\rangle = \langle {}^{\mathrm{t}}BBu \mid u \rangle = \|Bu\|^2$$

et donc $\boxed{\|Bu\|^2 \leq \nu \langle Au \mid u \rangle.}$

26. Pour $m$ dans $\mathbf{N}$, on note $a_m = \|y^m - y^*\|$ et $u^m = x^m - x^*$. Il vient, en utilisant la question précédente et 23.,

$$a_{m+1} - a_m \leq -\rho_m(2 - \rho_m\nu) \langle A(x^m - x^*) \mid x^m - x^* \rangle \leq 0$$

puisque $0 < \rho_m < \dfrac{2}{\nu}$ et puisque $A$ est positive. Il en résulte que

$\boxed{\left(\|y^m - y^*\|^2\right)_{m\in\mathbf{N}} \text{ est décroissante.}}$

27. Puisque cette suite est minorée par 0, elle est convergente et donc, en reprenant les notations précédentes, $(a_{m+1} - a_m)_{m\in\mathbf{N}}$ converge vers 0. D'après le théorème d'encadrement des limites, il en va de même pour la quantité $-\rho_m(2-\rho_m\nu) \langle A(x^m - x^*) \mid x^m - x^* \rangle$. Comme $0 \leq \dfrac{1}{\rho_m} \leq \dfrac{1}{\alpha}$ et $0 \leq \dfrac{1}{2 - \rho_m\nu} \leq \dfrac{1}{2 - \beta\nu}$, on en déduit $\lim \langle Au^m \mid u^m \rangle = 0$ et donc, par encadrement des limites et en utilisant 1., $\lim p \|u_m\|^2 = 0$ où $p$ est la plus petite valeur propre de $A$. Comme celle-ci est strictement positive, $\lim u^m = 0$, i.e. $\boxed{\text{la suite } (x^m)_{m\in\mathbf{N}} \text{ est convergente de limite } x^*.}$