Lycée Clemenceau MP*

MATHÉMATIQUES

DEVOIR EN TEMPS LIBRE 3

9 novembre 2018 – À rendre pour le 23 novembre 2018

Mines-Ponts MP 2006 – Première composition
Questions 1, 8 à 9, & 11 à 13 obligatoires

Merci d'indiquer sur chacune des copies (de préférence doubles) : le nom de la personne ayant rédigé, celui de son binôme éventuel et enfin celui de la personne ayant corrigé.

Chaque membre d'un binôme doit rendre une copie séparée, afin de faciliter la correction.

Première composition de mathématiques
Mines- Ponts – MP – 2006

Pour $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{K} = \mathbf{C}$, on note $\mathscr{M}_{n,\ell}(\mathbf{K})$ l'ensemble des matrices à n lignes et ℓ colonnes à coefficients dans $\mathbf{K}$. Un élément de $\mathscr{M}_{n,\ell}(\mathbf{R})$ sera considéré comme élément de $\mathscr{M}_{n,\ell}(\mathbf{C})$.

Dans la suite, on identifie les matrices carrées (respectivement les matrices colonnes) et les endomorphismes (respectivement les vecteurs) canoniquement associés dans $\mathbf{C}^n$: par exemple, on note par la même lettre une matrice T de $\mathscr{M}_{n,n}(\mathbf{R})$ et l'endomorphisme de $\mathbf{C}^n$ dont T est la matrice dans la base canonique de $\mathbf{C}^n$.

Si $M \in \mathscr{M}_{n,\ell}(\mathbf{K})$ et $x \in \mathbf{K}^\ell$, $(Mx)_i$ désigne la i-ième composante du vecteur Mx de $\mathbf{K}^n$. On note I_n la matrice identité de $\mathscr{M}_{n,n}(\mathbf{C})$. Pour $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{K}^n$ et M dans $\mathscr{M}_{n,n}(\mathbf{K})$, on note

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \ \text{ et } \ \|M\|_1 = \sup_{x \in \mathbf{K}^n \setminus \{0\}} \frac{\|Mx\|_1}{\|x\|_1} \ .$$

On admet que l'on définit ainsi des normes sur $\mathbf{K}^n$ et $\mathscr{M}_{n,n}(\mathbf{K})$ respectivement.

Définition. *Soit M une matrice dans $\mathscr{M}_{n,\ell}(\mathbf{R})$, de coefficients notés $(m_{i,j})$ pour $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq \ell$. On dit que M est positive (respectivement strictement positive), ce que l'on note $M \geq 0$ (respectivement $M > 0$), lorsque tous ses coefficients sont positifs (respectivement strictement positifs) :*

$$\forall (i,j) \in [\![1;n]\!] \times [\![1;\ell]\!] \quad m_{i,j} \geq 0 \ (\textit{resp. } m_{i,j} > 0) \ .$$

Pour N dans $\mathscr{M}_{n,\ell}(\mathbf{R})$, on note $M \geq N$ (respectivement $M > N$) lorsque $M - N \geq 0$ (respectivement $M - N > 0$).
Si $n = \ell$, on dit que M est stochastique lorsqu'elle est positive et que de plus

$$\forall j \in [\![1;n]\!] \quad \sum_{i=1}^{n} m_{i,j} = 1 \ .$$

On définit les ensembles B, B^+ et Σ par :

$$\begin{aligned} B &= \{x \in \mathbf{R}^n \,|\, x \geq 0 \text{ et } x \neq 0\} \ , \\ B^+ &= \{x \in \mathbf{R}^n \,|\, x > 0\} \ , \\ \Sigma &= \{x \in \mathbf{R}^n \,|\, \|x\|_1 = 1\} \ . \end{aligned}$$

Nous souhaitons montrer le résultat suivant :

Théorème (Perron-Frobenius). *Soit T dans $\mathscr{M}_{n,n}(\mathbf{R})$ stochastique vérifiant $(I_n + T)^{n-1} > 0$.*
Il existe un vecteur strictement positif x_0 satisfaisant $Tx_0 = x_0$.
Toutes les valeurs propres de T sont de module inférieur à 1 et pour tout vecteur y de $\Sigma \cap B$,

$$\lim \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} T^j y = \frac{x_0}{\|x_0\|_1} \ .$$

Les deux parties sont dans une large mesure indépendantes.

PARTIE I - Un vecteur propre strictement positif

Soit T un élément positif de $\mathscr{M}_{n,n}(\mathbf{R})$ et $P = (I_n + T)^{n-1}$. On suppose P strictement positive. On note $T = (t_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ et $P = (p_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$.

1) Montrer que pour tout x dans B, l'ensemble donné par $\Gamma_x = \{\theta \in \mathbf{R}_+ \mid \theta x \leq Tx\}$ est non vide, fermé et borné.

   On note $\theta(x)$ son plus grand élément.

2) Montrer que pour tout x dans B, on peut calculer $\theta(x)$ de la manière suivante :

$$\theta(x) = \min\left\{ \frac{(Tx)_i}{x_i} \;\middle|\; 1 \leq i \leq n \text{ et } x_i \neq 0 \right\} .$$

   On note θ l'application de B dans $\mathbf{R}_+$ qui à x associe $\theta(x)$.

3) Montrer que pour tous α dans $\mathbf{R}_+^*$ et x dans B, on a $\theta(\alpha x) = \theta(x)$.
4) Montrer $P(B) \subset B^+$.
5) Montrer que pour tout x dans B, on a $\theta(Px) \geq \theta(x)$ et $\theta(Px) > 0$.
6) Soit x dans B un vecteur propre de T. Montrer $\theta(Px) = \theta(x)$.
7) Soit x dans B tel que $\theta(Px) = \theta(x)$, montrer que x est un vecteur propre de T pour la valeur propre $\theta(x)$.
8) Soit $C = B \cap \Sigma$. Montrer que l'application θ est continue de $P(C)$ dans $\mathbf{R}$.
9) Justifier l'existence de x_0 dans $P(C)$ tel qu'on ait $\theta(x_0) = \sup\limits_{x\in P(C)} \theta(x)$.
10) Montrer $\sup\limits_{x\in P(C)} \theta(x) \geq \sup\limits_{x\in C} \theta(x)$.
11) Montrer $\sup\limits_{x\in B} \theta(x) = \sup\limits_{x\in C} \theta(x)$.
12) Montrer $\sup\limits_{x\in C} \theta(x) = \sup\limits_{x\in P(C)} \theta(x)$ et $\theta(x_0) = \sup\limits_{x\in C} \theta(x)$.

    On pose $\theta_0 = \theta(x_0)$.

13) Montrer que x_0 est un vecteur propre, strictement positif, de T pour la valeur propre θ_0 et $\theta_0 > 0$.

PARTIE II - Une méthode d'approximation

On suppose toujours que $P = (I_n+T)^{n-1}$ est strictement positive et on suppose de plus que T est stochastique.

Pour un vecteur $x = (x_1, \ldots, x_n)$ de $\mathbf{C}^n$, on note x^+ le vecteur $(|x_1|, \ldots, |x_n|)$, où $|z|$ est le module du nombre complexe z. Pour tout entier $k \geq 1$, on pose

$$R_k = \frac{1}{k}\sum_{j=0}^{k-1} T^j .$$

14) Soit θ dans $\mathbf{C}$ et x dans $\mathbf{C}^n$ un vecteur propre de T pour la valeur propre θ.

    Montrer $|\theta|\, x^+ \leq Tx^+$.

15) En déduire $|\theta| \leq \theta_0$.
16) Montrer $|\theta| \left\|x^+\right\|_1 \leq \left\|x^+\right\|_1$ et en déduire $|\theta| \leq 1$.
17) En déduire $\theta_0 = 1$.
18) Montrer que pour tout $j \geq 1$, T^j et R_j sont des matrices stochastiques.
19) Établir, pour tout $k \geq 1$, les inégalités suivantes :

$$\left\|T^k\right\|_1 \leq 1 \text{ et } \left\|R_k\right\|_1 \leq 1 .$$

20) Montrer que pour tout $k \geq 1$, $\|TR_k - R_k\|_1 \leq \dfrac{2}{k}$.

21) Soit x dans $\mathbf{C}^n$, montrer que la suite $(R_k x)_{k\geq 1}$ a au moins une valeur d'adhérence.

22) Soit y une valeur d'adhérence de la suite $(R_k x)_{k\geq 1}$, montrer $Ty = y$ et, pour tout $k \geq 1$, $R_k y = y$.

23) Soit y et z deux valeurs d'adhérence de $(R_k x)_{k\geq 1}$, montrer pour tous les entiers m et ℓ, l'identité suivante :

$$y - z = R_\ell \left(R_m x - z\right) - R_m \left(R_\ell x - y\right) \ .$$

24) Montrer que la suite $(R_k x)_{k\geq 1}$ a exactement une valeur d' adhérence.

25) Montrer qu'il existe une matrice R dans $\mathscr{M}_{n,n}(\mathbf{C})$ telle que, pour tout x dans $\mathbf{C}^n$, on ait $Rx = \lim R_k x$ et $\lim \|R_k - R\|_1 = 0$.

26) Montrer que T et R commutent.

27) Montrer $RT = R$ et $R^2 = R$.

28) Caractériser R en fonction de $\mathrm{Ker}(T - I_n)$ et $\mathrm{Im}(T - I_n)$.

29) On admet que $\mathrm{Ker}\,(T - I_n)$ est de dimension 1. Pour x dans B, expliciter Rx en fonction de $\|x\|_1$, $\|x_0\|_1$ et x_0.

Ce théorème possède d'innombrables applications. L'une des dernières est son utilisation dans le classement (PageRank) des pages Web effectué par le plus connu des moteurs de recherche.

Première composition de mathématiques – Mines- Ponts – MP – 2006

PARTIE I - Un vecteur propre strictement positif

1) Soit x dans B, alors pour tout i dans $[\![1;n]\!]$ on a $(Tx)_i = \sum_{j=1}^{n} t_{i,j}x_j$. Comme on a affaire à une somme d'éléments positifs $(Tx)_i$ l'est aussi et donc $Tx \geq 0$, i.e. $0 \in \Gamma_x$.
Puisque x est non nul on dispose de i dans $[\![1;n]\!]$ tel que x_i soit non nul, et donc $x_i > 0$ puisque x est positif. On en déduit $\theta \in \Gamma_x \Longrightarrow 0 \leq \theta \leq \dfrac{(Tx)_i}{x_i}$ et, en particulier Γ_x est borné.
Enfin l'application $\theta \mapsto Tx - \theta x$ est une application affine donc continue de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}^n$ et $(\mathbf{R}_+)^n$ est fermé en tant que produit cartésien de fermés. Comme Γ_x est l'image réciproque de ce fermé par cette application continue, il est fermé, i.e. $\boxed{\Gamma_x \text{ est non vide, fermé et borné.}}$

2) Soit x dans B, on a vu précédemment que Tx est positif. Il en résulte

$$\begin{aligned}
\theta \in \Gamma_x \quad &\Longleftrightarrow \quad \theta \geq 0 \wedge \forall i \in [\![1;n]\!]\, \theta x_i \leq (Tx)_i \\
&\Longleftrightarrow \quad \theta \geq 0 \wedge \forall i \in [\![1;n]\!]\, (x_i \neq 0 \Longrightarrow \theta x_i \leq (Tx)_i) \\
&\Longleftrightarrow \quad \theta \geq 0 \wedge \forall i \in [\![1;n]\!] \left(x_i \neq 0 \Longrightarrow \theta \leq \frac{(Tx)_i}{x_i} \right) \\
&\Longleftrightarrow \quad 0 \leq \theta \leq \min_{i \in [\![1;n]\!], x_i \neq 0} \frac{(Tx)_i}{x_i}
\end{aligned}$$

Autrement dit $\boxed{\theta(x) = \min \left\{ \frac{(Tx)_i}{x_i} \;\middle|\; 1 \leq i \leq n \text{ et } x_i \neq 0 \right\}.}$

3) Soit x dans B et α dans $\mathbf{R}_+^*$. Puisque α est strictement positif, αx est dans B et on a, pour tout i dans $[\![1;n]\!]$, $x_i > 0 \Longleftrightarrow (\alpha x)_i > 0$. De plus, dans ces conditions, par linéarité de T on a $(T(\alpha x))_i = \alpha(Tx)_i$ et donc $\dfrac{(T(\alpha x))_i}{(\alpha x)_i} = \dfrac{(Tx)_i}{x_i}$. Par conséquent les ensembles dont ils sont les minima, d'après la question précédente, étant égaux, on a $\boxed{\theta(\alpha x) = \theta(x).}$

4) Soit x dans B. On dispose de i_0 tel que $x_{i_0} > 0$. Alors, pour tout i dans $[\![1;n]\!]$, puisque P est strictement positive on a

$$(Px)_i = p_{i,i_0}x_{i_0} + \sum_{1 \leq j \leq n, j \neq i_0}^{n} p_{i,j}x_j \geq p_{i,i_0}x_{i_0} > 0$$

par positivité de tous les termes et stricte positivité de p_{i,i_0} et x_{i_0}, i.e. $\boxed{P(B) \subset B^+.}$

5) Soit x dans B et θ dans Γ_x. On a donc $(T - \theta I_n)x \geq 0$ et donc, par positivité de P, $PTx \geq P(\theta x)$. Comme P est linéaire et commute à T, en tant que polynôme en T, il vient $TPx \geq \theta Px$ et donc $\theta \in \Gamma_{Px}$. Par passage au supremum il vient $\boxed{\theta(Px) \geq \theta(x).}$
Si $n = 1$ et $T = 0$, on a $P = I_1 > 0$ mais l'énoncé est en défaut car θ est identiquement nulle. Si T n'est pas nulle, θ est identiquement égale à son facteur d'homothétie et les deux propriétés sont immédiates. On suppose par la suite $n > 1$.
Remarquons que si T a une ligne nulle, disons la i^{e}, alors $\mathrm{V}ect\,(e_j)_{j \neq i}$ est stable par $I + T$ et donc par P et donc $p_{ij} = 0$ pour $j \neq i$, ce qui est contraire à l'hypothèse de positivité stricte de P. Comme par ailleurs $P(B) \subset B^+$, tous les coefficients de Px sont strictement positifs et la formule de la question 2) montre $\boxed{\theta(Px) > 0.}$

6) Puisque P est un polynôme en T, les vecteurs propres de T sont des vecteurs propres de P. Comme Px est à coordonnées strictement positives, d'après la question 4) , la valeur propre associée à x est strictement positive puisque x est à coordonnées positives par hypothèse (et est en fait dans B^+). Il résulte de la question 3) qu'on a $\boxed{\theta(Px) = \theta(x).}$

7) On note $y = Tx - \theta(x)$. Par définition de $\theta(x)$, le vecteur y est positif. Il en résulte qu'on a deux possibilités exclusives l'une de l'autre, à savoir soit x est vecteur propre de T associé à la valeur propre $\theta(x)$, soit y appartient à B et donc, d'après la question 4) , soit $y = 0$, soit $Py \in B^+$. Or, comme P et $T - \theta(x)I_n$ sont des polynômes en T, ils commutent et on a

$$Py \in B^+ \iff (T - \theta(x)I_n)Px > 0 \iff T(Px) > \theta(Px)Px$$

et cette dernière condition est impossible d'après les questions 4) et 2) : comme toutes les coordonnées de Px sont non nulles, $\theta(Px)$ est égal à l'un des rapports $(TPx)_i/(Px)_i$, i.e. l'une des coordonnées de $TPx - \theta(Px)Px$ est nulle. Par conséquent $\boxed{x \text{ est vecteur propre de } T \text{ associé à la valeur propre } \theta(x).}$

8) Comme $\mathbf{R}^n$ est de dimension finie, T est continu, tout comme les formes coordonnées. Il en résulte que $x \mapsto (Tx)_i/x_i$ est continu sur son domaine de définition pour tout i dans $[\![1;n]\!]$. Comme le minimum de fonctions continues l'est aussi, θ est continu sur B^+ d'après la formule de la question 2) . Comme $C \subset B$, il résulte de la question 4) que $P(C)$ est inclus dans B^+ et donc, par restriction, $\boxed{\theta \text{ est continu sur } P(C).}$

9) On a $C = \Sigma \cap (\mathbf{R}_+)^n$ puisque 0 n'appartient pas à Σ. Comme Σ est une sphère unité d'un espace de dimension finie, il résulte du théorème de Heine-Borel que c'est un compact. Comme $\mathbf{R}_+$ est fermé, $\mathbf{R}_+^n$ est fermé en tant que produit cartésien de fermés et donc C est compact en tant qu'intersection d'un compact avec un fermé. Il résulte alors du théorème de Weierstrass que $\theta(P(C))$ est compact puisque P est continu en tant qu'endomorphisme d'un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension finie et θ est continu sur $P(C)$ d'après la question précédente. Comme C contient les vecteurs de la base canonique, il est non vide, donc $P(C)$ non plus, et donc $\theta(P(C))$ est un compact non vide et contient donc sa borne supérieure, i.e. on dispose de x_0 dans $P(C)$ tel que $\boxed{\theta(x_0) = \sup_{x \in P(C)} \theta(x).}$

10) On a $\sup_{x \in P(C)} \theta(x) = \sup_{x \in C} \theta(Px)$ et il résulte donc de la question 5) , par passage au supremum, $\boxed{\sup_{x \in P(C)} \theta(x) \geq \sup_{x \in C} \theta(x).}$

11) Tout vecteur y non nul de $\mathbf{R}^n$ s'écrit de façon unique $\|y\|_1 u$ avec u dans Σ et si y est positif, u aussi, i.e. si $y \in B$, alors $u \in C$ et il résulte de la question 3) qu'on a $\theta(y) = \theta(u)$. On en déduit $\{\theta(y) \,|\, y \in B\} \subset \{\theta(u) \,|\, u \in C\}$ et l'inclusion réciproque est directe puisque C est inclus dans B. Les suprema de ces deux ensembles sont donc égaux, i.e. $\boxed{\sup_{x \in B} \theta(x) = \sup_{x \in C} \theta(x).}$

12) Comme $P(C)$ est inclus dans B^+, d'après la question 4) , et donc dans B, par passage au supremum on a $\sup_{x \in P(C)} \theta(x) \leq \sup_{x \in B} \theta(x)$. Il résulte alors de la question précédente $\sup_{x \in P(C)} \theta(x) \leq \sup_{x \in C} \theta(x)$ et donc, en utilisant la question 10) , il vient $\boxed{\sup_{x \in P(C)} \theta(x) = \sup_{x \in C} \theta(x)}$ et donc, par définition de x_0, $\boxed{\theta(x_0) = \sup_{x \in C} \theta(x).}$

13) Si $n = 1$ et $T = 0$, le résultat est en défaut. Si $n = 1$ et $T > 0$, il est immédiat. On suppose maintenant $n > 1$. Comme x_0 appartient à $P(C)$, il appartient à B^+ d'après la question 4) et donc aussi à B. Il en résulte pour la même raison $Px_0 \in B$ et, d'après la question 5) , $\theta(x_0) \leq \theta(Px_0) \leq \sup_{x \in B} \theta(x) = \theta(x_0)$. Il y a donc égalité dans toutes les inégalités et donc $\theta(x_0) = \theta(Px_0)$. Il résulte de la question 7) et de la question 5) que $\boxed{x_0 \text{ est un vecteur propre strictement positif de } T \text{ pour la valeur propre } \theta_0 \text{ et } \theta_0 > 0.}$

PARTIE II - Une méthode d'approximation

14) L'inégalité triangulaire et la positivité des coefficients de T donnent, pour i dans $[\![1;n]\!]$,

$$|\theta|\,(x^+)_i = |\theta x_i| = \left|\sum_{j=1}^{n} t_{i,j}x_j\right| \leq \sum_{j=1}^{n} |t_{i,j}x_j| = \sum_{j=1}^{n} t_{i,j}\,|x_j|$$

et donc $\boxed{|\theta|\,x^+ \leq Tx^+.}$

15) On en déduit $|\theta| \leq \theta(x^+)$. Comme les coordonnées de x^+ sont positives par construction et comme x est non nul, car c'est un vecteur propre, x^+ appartient à B et donc par définition de θ_0 on a $\theta(x^+) \leq \theta_0$. Il vient ainsi $\boxed{|\theta| \leq \theta_0.}$

16) Par positivité des coefficients de T on a

$$\begin{aligned} |\theta|\,\|x^+\|_1 &= \sum_{i=1}^{n} |\theta x_i| = \|\theta x\|_1 = \|Tx\|_1 = \sum_{i=1}^{n}\left|\sum_{j=1}^{n} t_{i,j}x_j\right| \\ &\leq \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} t_{i,j}\,|x_j| = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} t_{i,j}\right)|x_j| = \sum_{j=1}^{n} |x_j| = \|x\|_1 = \|x^+\|_1 \end{aligned}$$

puisque T est stochastique. De plus x étant un vecteur propre, x^+ est non nul et, par stricte positivité de $\|x^+\|_1$, on en déduit $\boxed{|\theta|\,\|x^+\|_1 \leq \|x^+\|_1 \text{ et } |\theta| \leq 1.}$

17) Comme le résultat précédent est vrai pour toute valeur propre, la question 13) entraîne $0 < \theta_0 \leq 1$. Or puisque T est stochastique le vecteur $(1,1,\ldots,1)$ est propre pour ${}^{\mathrm{t}}T$ et est associé à la valeur propre 1. On en déduit que 1 annule $\chi_{{}^{\mathrm{t}}T}$ et donc aussi χ_T et ainsi 1 est valeur propre de T. On en conclut $\boxed{\theta_0 = 1.}$

18) On note $u = (1,1,\ldots,1)$. Alors M dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ est stochastique si et seulement si ses coefficients sont positifs et si u est vecteur propre pour la valeur propre 1 de ${}^{\mathrm{t}}M$. On remarque que I_n est stochastique, i.e. T^0 l'est. Soit j dans $\mathbf{N}^*$. Puisque $\mathbf{R}_+$ est stable par addition et multiplication, T^j est positive et donc R_j aussi. Puisque ${}^{\mathrm{t}}T^j = ({}^{\mathrm{t}}T)^j$ on a ${}^{\mathrm{t}}T^j u = u$ et donc aussi ${}^{\mathrm{t}}R_j u = u$. Par conséquent $\boxed{T^j \text{ et } R_j \text{ sont stochastiques.}}$

19) Les calculs de la question 16) montrent $\|Tx\|_1 \leq \|x\|_1$ sans utiliser le fait que x est vecteur propre de T et uniquement l'aspect stochastique de T. Autrement dit si M est stochastique, alors $\|M\|_1 \leq 1$. On en conclut, en utilisant la question précédente, pour k dans $\mathbf{N}^*$, $\boxed{\|T^k\|_1 \leq 1 \text{ et } \|R_k\|_1 \leq 1.}$

20) Par définition on a $(T - I_n)(kR_k) = T^k - T^0$ et donc, par inégalité triangulaire et en utilisant la question précédente $\|TR_k - R_k\|_1 \leq \dfrac{1}{k}(\|T^k\|_1 + \|I_n\|_1) \leq \dfrac{2}{k}$, i.e. $\boxed{\|TR_k - R_k\|_1 \leq \dfrac{2}{k}.}$

21) Soit k dans $\mathbf{N}^*$. Par définition de la norme $\|R_k\|_1$, $\|R_k x\|_1 \leq \|x\|_1$ et donc $(R_k x)_{k\geq 1}$ est bornée. Puisque $\mathbf{C}^n$ est de dimension finie, il résulte du théorème de Bolzano-Weierstrass qu'elle admet $\boxed{\text{au moins une valeur d'adhérence.}}$

22) soit alors φ une injection strictement croissante de $\mathbf{N}^*$ dans lui-même telle que $(R_{\varphi(k)})_{k\geq 1}$ converge vers y. Par continuité de T, puisqu'elle est 1-lipschitzienne, $(TR_{\varphi(k)})_{k\geq 1}$ converge vers Ty et la question précédente donne, par passage à la limite, $\|Ty - y\|_1 \leq 0$. Il en résulte $\boxed{Ty = y.}$ On a alors, pour tout k dans $\mathbf{N}$, $T^k y = y$ et donc, pour $k \geq 1$, $\boxed{R^k y = y.}$

23) Soit ℓ et m deux entiers. Par définition de R_ℓ et R_m, ce sont des polynômes en T et donc ils commutent entre eux. Il résulte alors de la question précédente qu'on a $\boxed{y - z = R_\ell\,(R_m x - z) - R_m\,(R_\ell x - y).}$

24) Par inégalité triangulaire et puisqu'on a affaire à des applications 1-lipschitziennes, il vient pour ℓ et m entiers et y et z deux valeurs d'adhérence de $(R_k x)_{k\geq 1}$, $\|y - z\|_1 \leq \|R_m x - z\|_1 + \|R_\ell x - y\|_1$. En faisant tendre ℓ et m vers l'infini de sorte que $R_m x$ tende vers z et $R_\ell x$ tende vers y, on en déduit $y = z$, i.e. $\boxed{(R_k x)_{k\geq 1} \text{ a exactement une valeur d'adhérence.}}$

25) D'après la réciproque partielle du théorème de Bolzano-Weierstrass on en conclut que la suite $(R_k x)_{k\geq 1}$ converge. Par linéarité de la limite et linéarité des applications R_k, on en déduit que $\lim R_k x$ est linéaire par rapport à x, i.e. on dispose de R dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{C})$ tel que $\boxed{\lim R_k x = Rx.}$

Soit x dans $\mathbf{C}^n$ avec $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ où $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ est la base canonique de $\mathbf{C}^n$; on a par inégalité triangulaire,

$$\|(R_k - R)x\|_1 \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i|\, \|(R_k - R)e_i\|_1 \leq \|x_1\|_1 \sup_{1\leq i\leq n} \|(R_k - R)e_i\|_1$$

et donc $\|R_k - R\|_1 \leq \displaystyle\sup_{1\leq i\leq n} \|(R_k - R)e_i\|_1 = o\,(1)$, d'après ce qu'on vient de faire. Il en résulte $\boxed{\lim \|R_k - R\|_1 = 0.}$

26) On a déjà remarqué que pour k dans $\mathbf{N}^*$, T et R_k commutent puisque ce dernier est un polynôme en T. Par bilinéarité et donc continuité du produit matriciel, le passage à la limite dans l'égalité $R_k T = T R_k$ montre que $\boxed{R \text{ et } T \text{ commutent.}}$

27) Toujours par continuité du produit matriciel et passage à la limite dans l'inégalité de la question 20) , il vient $\|TR - R\|_1 \leq 0$ et donc $TR = R$. La question précédente permet d'en conclure $\boxed{RT = R}$ puis, pour k dans $\mathbf{N}$, $RT^k = R$ et donc, en prenant la moyenne, $\boxed{R^2 = R.}$

28) On en déduit que R est un projecteur vérifiant $(T - I_n)R = 0$ et donc l'image de R est incluse dans le noyau de $T - I_n$. Réciproquement si x vérifie $Tx = x$, alors la suite $(R_k x)$ est constante égale à x et ainsi $Rx = x$. On en conclut $\mathrm{Im}(R) = \mathrm{Ker}(T - I_n)$. Comme on a aussi $R(T - I_n) = 0$, on a $\mathrm{Im}(T - I_n) \subset \mathrm{Ker}(R)$. Or l'égalité $\mathrm{Im}(R) = \mathrm{Ker}(T - I_n)$ donne, en passant aux dimensions et en utilisant le théorème du rang, l'égalité des dimensions des deux espaces précédents et donc leur égalité, i.e. $\boxed{R \text{ est le projecteur sur } \mathrm{Ker}(T - I_n) \text{ parallèlement à } \mathrm{Im}(T - I_n).}$

29) D'après les questions 13) et 17) , x_0 est un vecteur non nul de $\mathrm{Ker}(T - I_n)$. C'en est donc une base puisqu'on a admis que cet espace est une droite. D'après la question précédente on a donc $\mathrm{Im}(R) = \mathrm{V}ect\,(x_0)$. Soit alors α un réel tel que $Rx = \alpha x_0$. Comme x et x_0 sont dans B, il en va de même de Rx car R est à coefficients positifs et donc $\alpha = \|Rx\|_1 / \|x_0\|_1$. Or puisque R est stochastique car le passage à la limite préserve la positivité des coefficients (puisque $\mathbf{R}_+$ est fermé) et l'égalité ${}^{\mathrm{t}}Ru = u$ par continuité de la transposition et du produit matriciel. Il résulte donc des calculs effectués en question 19) , et donc plutôt en question 16) , qu'on a $\|Rx\|_1 = \|x\|_1$ puisque x est dans B. On en conclut $\boxed{Rx = \dfrac{\|x\|_1}{\|x_0\|_1} x_0.}$