

PREMIÈRE COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES MINES-PONTS MP 2007

Dans tout le problème, \mathbf{N} désigne l'ensemble des entiers, \mathbf{Z} , l'ensemble des entiers relatifs et N un entier supérieur ou égal à 2. Si a divise b dans \mathbf{Z} , on notera $a \mid b$.

L'ensemble des classes d'équivalence pour la division euclidienne par N est noté $\mathbf{Z}/N\mathbf{Z}$. L'élément générique de cet anneau sera noté \bar{a} . On note P l'ensemble des éléments de $\llbracket 1; N-1 \rrbracket$ qui sont premiers avec N . L'ensemble des éléments inversibles pour la multiplication de $\mathbf{Z}/N\mathbf{Z}$ est noté $(\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})^*$. On rappelle que φ , l'indicatrice d'EULER, est telle que $\varphi(N)$ représente le cardinal de P .

On suppose fixée une application χ de \mathbf{Z} dans \mathbf{R} qui satisfait les propriétés suivantes :

- $\chi(0) = 0$ et χ est non identiquement nul.
- Pour tout a dans \mathbf{Z} , non premier avec N , $\chi(a) = 0$.
- Pour tous entiers relatifs a et b , $\chi(ab) = \chi(a)\chi(b)$.
- χ est N -périodique : pour tout a dans \mathbf{Z} , $\chi(a + N) = \chi(a)$.

PARTIE I - Préliminaires

- Rappeler le développement en série entière de \arctan en 0, déterminer son rayon de convergence R et démontrer que cette série converge uniformément sur $[-R; R]$.
- Soit $(u_k)_{k \in \mathbf{N}^*}$ et $(\alpha_k)_{k \in \mathbf{N}^*}$ deux suites réelles. Pour tout entier n supérieur à 1, on pose $T_n = \sum_{k=1}^n \alpha_k$.

Montrer, pour tous entiers n et m vérifiant $2 \leq n < m$,

$$\sum_{k=n}^m \alpha_k u_k = -u_n T_{n-1} + \sum_{k=n}^{m-1} T_k (u_k - u_{k+1}) + u_m T_m.$$

PARTIE II - Cas particuliers

- Calculer $\chi(1)$.
- En supposant $N = 2$, déterminer χ .

On suppose jusqu'à la fin de cette partie $N = 4$.

- Montrer que $\chi(3)$ ne peut prendre que les valeurs 1 ou -1 .
- On suppose maintenant $\chi(3) = -1$. Montrer la convergence et calculer la valeur de la série

$$\sum_1^{\infty} \frac{\chi(n)}{n}.$$

PARTIE III - Convergence de la série $\sum_1^{\infty} \frac{\chi(n)}{n}$

Dans cette partie, a est un entier supérieur ou égal à 1 et premier avec N . Pour k dans $\llbracket 1; N-1 \rrbracket$, on désigne par r_k le reste de la division euclidienne de ak par N .

- En considérant le produit $\prod_{k \in P} ak$, montrer que $a^{\varphi(N)} - 1$ est divisible par N .
- Montrer $|\chi(a)| = 1$.
- Montrer que les r_k sont deux à deux distincts.

10. Établir l'identité :

$$\sum_{k=1}^{N-1} \chi(ak) = \sum_{k=1}^{N-1} \chi(k) .$$

On suppose dorénavant qu'il existe a premier avec N vérifiant $\chi(a) \neq 1$.

11. Pour tout entier n , calculer $\sum_{k=n}^{n+N-1} \chi(k)$.

On pourra commencer par le cas $n = 0$.

12. Montrer, pour tout $m > 0$, l'inégalité

$$\left| \sum_{k=1}^m \chi(k) \right| \leq \varphi(N) .$$

13. Montrer que la suite $\left(\sum_{k=1}^n \frac{\chi(k)}{k} \right)_{n \geq 1}$ est convergente.

PARTIE IV - Comportement asymptotique

Pour tout entier n supérieur à 1, on pose

$$f_n = \sum_{d|n} \chi(d) ,$$

où, dans la définition, d décrit l'ensemble des diviseurs entiers (positifs) de n .

14. Soit n et m deux entiers strictement positifs, premiers entre eux. Montrer $f_{nm} = f_n f_m$.

15. Soit p un nombre premier et α dans \mathbf{N}^* . Calculer f_{p^α} .

16. Pour tout entier n supérieur à 1, établir l'encadrement :

$$0 \leq f_n \leq n .$$

17. Pour tout entier n supérieur à 1, montrer $f_{n^2} \geq 1$.

18. Déterminer le rayon de convergence de la série $\sum_{n=1}^{\infty} f_n x^n$.

On note $f(x)$ la somme de cette série.

19. Montrer, pour tout x dans $[1/2, 1[$:

$$f(x) \geq \frac{1}{\sqrt{-\ln(x)}} \int_{\sqrt{\ln(2)}}^{+\infty} e^{-u^2} du ,$$

où l'intégrale précédente est à comprendre comme la limite pour t tendant vers l'infini de l'intégrale entre $\sqrt{\ln(2)}$ et t .

PREMIÈRE COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES – MINES-PONTS MP 2007

PARTIE I - Préliminaires

1. Le développement en série entière de \arctan en 0 est donné par $\arctan(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$ et,

puisque le rapport $\frac{2n-1}{2n+1}$ tend vers 1 quand n tend vers l'infini, le critère de D'ALEMBERT (comparaison à une série géométrique) montre que son rayon de convergence est égal à 1.

De plus, pour x dans $[-1; 1]$, puisque la suite $\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ est de signe constant et décroît vers 0 en valeur absolue, le théorème de LEIBNIZ pour les séries alternées montre qu'on a

$$\left| \arctan(x) - \sum_{n=0}^N \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} \right| \leq \frac{|x|^{2N+3}}{2N+3}$$

et donc la série entière converge uniformément sur $[-1; 1]$.

2. Soit n et m deux entiers vérifiant $2 \leq n < m$. On a

$$\begin{aligned} \sum_{k=n}^m \alpha_k u_k &= \sum_{k=n}^m (T_k - T_{k-1}) u_k = \sum_{k=n}^m T_k u_k - \sum_{k=n-1}^{m-1} T_k u_{k+1} \\ &= u_m T_m + \sum_{k=n}^{m-1} T_k u_k - \sum_{k=n}^{m-1} T_k u_{k+1} - u_n T_{n-1} \\ &= -u_n T_{n-1} + \sum_{k=n}^{m-1} T_k (u_k - u_{k+1}) + u_m T_m \end{aligned}$$

i.e. $\sum_{k=n}^m \alpha_k u_k = -u_n T_{n-1} + \sum_{k=n}^{m-1} T_k (u_k - u_{k+1}) + u_m T_m.$

PARTIE II - Cas particuliers

3. Puisque χ n'est pas identiquement nul, on dispose de n dans \mathbf{Z} tel que $\chi(n)$ est non nul. Comme $1 \times n = n$, la multiplicativité de χ entraîne $\chi(1)\chi(n) = \chi(n)$ et donc, puisque $\chi(n)$ est non nul,

$$\chi(1) = 1.$$

4. Par 2-périodicité χ est nécessairement égal à la fonction indicatrice de l'ensemble $1 + 2\mathbf{Z}$ des entiers relatifs impairs. Réciproquement puisque 0 est pair, que 1 est impair, qu'un nombre impair est exactement un nombre premier à 2, qu'un produit de deux nombres est impair si et seulement si ces deux nombres le sont et, enfin, que l'addition de 2 à un nombre préserve sa parité, la fonction indicatrice de $1 + 2\mathbf{Z}$, notée $\mathbb{1}_{1+2\mathbf{Z}}$ satisfait aux quatre propriétés requises dans le cas $N = 2$, i.e. $\chi = \mathbb{1}_{1+2\mathbf{Z}}$.

5. Comme $3 \times 3 = 9 = 1 + 4 \times 2$, par multiplicativité et 4-périodicité, il vient $\chi(3)^2 = \chi(1) = 1$ et donc $\chi(3) \in \{1; -1\}$.

6. Les sommes partielles de la série considérée sont les mêmes que celles de la série alternée $\sum \frac{(-1)^n}{2n+1}$. Comme la suite $1/(2n+1)$ est décroissante et tend vers 0, le critère de LEIBNIZ (critère spécial des séries alternées) permet de conclure que $\sum_{n \geq 1} \frac{\chi(n)}{n}$ est convergente.

D'après la question 1. la somme de cette série est $\arctan(1)$, i.e. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\chi(n)}{n} = \frac{\pi}{4}$.

PARTIE III - Convergence de la série $\sum_1^{\infty} \frac{\chi(n)}{n}$

7. Puisque $\mathbf{Z}/N\mathbf{Z}$ est un anneau, $(\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})^*$ est un groupe multiplicatif. En particulier l'application $x \mapsto \bar{a}x$ est une bijection de $(\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})^*$ sur lui-même. Or l'application de P dans $(\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})^*$ donnée par $k \mapsto \bar{k}$ est également une bijection et le morphisme canonique $n \mapsto \bar{n}$ de \mathbf{Z} dans $\mathbf{Z}/N\mathbf{Z}$ est un morphisme d'anneaux. Il en résulte

$$\prod_{k \in P} \overline{(ak)} = \prod_{k \in P} \overline{(\bar{a}\bar{k})} = \prod_{x \in \mathbf{Z}/N\mathbf{Z}} \overline{(\bar{a}x)} = \prod_{x \in \mathbf{Z}/N\mathbf{Z}} x$$

et donc, puisque $\prod_{x \in \mathbf{Z}/N\mathbf{Z}} x$ est régulier dans le groupe $(\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})^*$, il vient $\bar{a}^{|P|} = \bar{1}$ ou encore, puisque

$$|P| = \varphi(N), \quad \boxed{N \text{ divise } a^{\varphi(N)} - 1.}$$

8. Puisque $a^{\varphi(N)}$ diffère de 1 par un multiple de N , par N -périodicité et multiplicativité de χ , $\chi(a)^{\varphi(N)} = \chi(a^{\varphi(N)}) = \chi(1) = 1$ et donc $\chi(a)$ est une racine de l'unité. En particulier $\boxed{|\chi(a)| = 1.}$

9. Puisque \bar{a} est inversible dans $\mathbf{Z}/N\mathbf{Z}$, l'application $\tau_a : x \mapsto \bar{a}x$ est injective de $\mathbf{Z}/N\mathbf{Z}$ dans lui-même. Comme l'application π donnée par $k \mapsto \bar{k}$ est une bijection de $\{0, \dots, N-1\}$ dans lui-même et qu'on a $\bar{a}\bar{0} = \bar{0}$, l'application $\pi^{-1} \circ \tau_a \circ \pi$ est une injection de $\llbracket 1; N-1 \rrbracket$ dans lui-même. Comme $\pi^{-1} \circ \tau_a \circ \pi(k) = \pi^{-1}(\overline{ak}) = r_k$, il en résulte que $\boxed{\text{les } r_k \text{ sont tous distincts.}}$

10. Par cardinalité, et d'après la question précédente, l'application $k \mapsto r_k$ est une bijection de $\llbracket 1; N-1 \rrbracket$

sur lui-même. Or, par N -périodicité, on a $\sum_{k=1}^{N-1} \chi(ak) = \sum_{k=1}^{N-1} \chi(r_k)$ et il vient $\boxed{\sum_{k=1}^{N-1} \chi(ak) = \sum_{k=1}^{N-1} \chi(k)}$

11. Par multiplicativité, l'identité précédente se récrit $\chi(a) \sum_{k=1}^{N-1} \chi(k) = \sum_{k=1}^{N-1} \chi(k)$ et donc, puisqu'on dis-

pose d'un entier a premier à N vérifiant $\chi(a) \neq 1$, on a $\sum_{k=1}^{N-1} \chi(k) = 0$ et aussi, puisque $\chi(0) = 0$,

$\sum_{k=0}^{N-1} \chi(k) = 0$. Pour n entier, la translation par \bar{n} est une bijection sur $\mathbf{Z}/N\mathbf{Z}$ et donc $\{\bar{k} \mid 0 \leq k < N\} =$

$\{\bar{k} \mid n \leq k < n+N\}$. Il vient par périodicité de χ , $\sum_{k=n}^{n+N-1} \chi(k) = \sum_{k=0}^{N-1} \chi(k)$, d'où $\boxed{\sum_{k=n}^{n+N-1} \chi(k) = 0.}$

12. Soit m dans \mathbf{N}^* . On note $[\cdot]$ la partie entière. On écrit l'ensemble $\llbracket 1; m \rrbracket$ comme la réunion disjointe de $\lfloor m/N \rfloor$ suites de N entiers successifs (le nombre de suites est donc éventuellement réduit à 0) et d'une suite de r_m entiers successifs (cette suite étant éventuellement vide). D'après ce qui précède la somme des valeurs de χ sur toute suite de N entiers consécutifs est nulle. Par définition de χ , χ s'annule sur

les entiers non premiers à N et il en résulte $\sum_{k=1}^m \chi(k) = \sum_{\substack{1 \leq k \leq r_m \\ k \wedge N = 1}} \chi(k)$.

D'après la question 8 pour tout k apparaissant dans la somme on a $|\chi(k)| = 1$. De plus, comme $r_m \leq N - 1$, le nombre total de k apparaissant dans la somme est inférieur au cardinal de P , i.e. $\varphi(N)$.

Il résulte donc de l'inégalité triangulaire $\left| \sum_{k=1}^m \chi(k) \right| \leq \varphi(N)$.

13. Pour n dans \mathbf{N}^* , on pose $T_n = \sum_{k=1}^n \chi(k)$. La question précédente montre $T_n = O(1)$. D'après les questions 2 et 12, on a, pour tout entier m vérifiant $2 \leq m$,

$$\sum_{k=1}^m \frac{\chi(k)}{k} = 1 + \sum_{k=2}^m \frac{\chi(k)}{k} = \frac{1}{2} + \sum_{k=2}^{m-1} T_k \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) + \frac{T_m}{m} = \frac{1}{2} + \sum_{k=2}^{m-1} T_k \frac{1}{k(k+1)} + O(m^{-1}).$$

Or, par comparaison entre séries à termes positifs à une série de RIEMANN convergente, la série $\sum T_k \frac{1}{k(k+1)}$ est absolument convergente car son terme général est dans $O(k^{-2})$, donc convergente.

Il en résulte que la suite $\left(\sum_{k=1}^n \frac{\chi(k)}{k} \right)_{n \geq 1}$ converge.

PARTIE IV - Comportement asymptotique

14. Soit d un diviseur de nm . On pose $d_1 = d \wedge n$ et $d_2 = d \wedge m$. Comme d_1 divise n et d_2 divise m , une relation de BÉZOUT entre n et m induit une relation de BÉZOUT entre d_1 et d_2 , donc $d_1 \wedge d_2 = 1$. Comme de plus $d_1 \mid d$ et $d_2 \mid d$, le lemme de GAUSS entraîne $d_1 d_2 \mid d$. Réciproquement, d'après le théorème de BÉZOUT, on dispose d'entiers u, v, x et y tels que $du + nv = d_1$ et $dx + my = d_2$, on en déduit par produit de ces deux relations que $d_1 d_2$ s'écrit comme combinaison linéaire à coefficients entiers de d et nm et donc, puisque $d \mid nm$, que d divise $d_1 d_2$. Par conséquent $d = d_1 d_2$.

On remarque également que si a divise n et b divise m , alors ab divise nm .

On en déduit que l'application $(d_1, d_2) \mapsto d_1 d_2$ définit une application bijective du produit cartésien des ensembles de diviseurs positifs de n et m sur l'ensemble des diviseurs positifs de nm dont la réciproque est l'application $d \mapsto (d \wedge n, d \wedge m)$.

Il vient donc, par multiplicativité de χ ,

$$\begin{aligned} f_{nm} &= \sum_{d \mid nm} \chi(d) = \sum_{d_1 \mid n} \sum_{d_2 \mid m} \chi(d_1 d_2) = \sum_{d_1 \mid n} \sum_{d_2 \mid m} \chi(d_1) \chi(d_2) \\ &= \left(\sum_{d_1 \mid n} \chi(d_1) \right) \cdot \left(\sum_{d_2 \mid m} \chi(d_2) \right) = f_n f_m, \end{aligned}$$

i.e. $f_{nm} = f_n f_m$.

15. On a, par multiplicativité de χ et puisque $\chi(1) = 1$,

$$f_{p^\alpha} = \sum_{k=0}^{\alpha} \chi(p^k) = \sum_{k=0}^{\alpha} \chi(p)^k.$$

Il en résulte si $\chi(p) = 1$, alors $f_{p^\alpha} = \alpha + 1$, et sinon $f_{p^\alpha} = \frac{1 - \chi(p)^{\alpha+1}}{1 - \chi(p)}$.

16. D'après l'expression précédente et la question 8, pour tout nombre premier p et tout α dans \mathbf{N}^* , on a $f_{p^\alpha} \in \{0; 1; \alpha + 1\}$ et donc $0 \leq f_{p^\alpha} \leq p^\alpha$. D'après la question 14, en utilisant la décomposition en nombres premiers, pour tout n dans \mathbf{N}^* , on a, puisque qu'on multiplie des inégalités entres termes positifs, $\boxed{0 \leq f_n \leq n.}$
17. D'après la question 15 avec $\alpha = 2$, et puisque la fonction cube est l'identité sur $\{-1; 0; 1\}$, on a, pour tout nombre premier p , $f_{p^2} \in \{1; 3\}$. L'argument précédent permet de conclure, pour n dans \mathbf{N}^* , $\boxed{f_{n^2} \geq 1.}$
18. D'après la question 16 le rayon de convergence de $\sum f_n x^n$ est supérieur à celui de $\sum n x^n$, donc à 1. D'après la question précédente la série $\sum f_n$ est grossièrement divergente et donc le rayon de convergence de $\sum f_n x^n$ est inférieur à 1. Il est donc $\boxed{\text{égal à 1.}}$
19. Soit x dans $]1/2; 1[$. Par positivité de x et des termes de la suite $(f_n)_{n \geq 1}$, on a, d'après la question 17 et en considérant les sommes dans $\mathbf{R}_+ \cup \{+\infty\}$,

$$f(x) \geq \sum_{n=1}^{+\infty} f_{n^2} x^{n^2} \geq \sum_{n=1}^{+\infty} x^{n^2}.$$

Les séries précédentes convergent puisqu'elles sont à termes positifs dominés par ceux de la série convergente définissant $f(x)$.

Par continuité et décroissance de l'intégrande, on a, pour tout n dans \mathbf{N}^* $x^{n^2} \geq \int_n^{n+1} x^{t^2} dt$. Pour la même raison que précédemment, on en déduit par sommation

$$f(x) \geq \sum_{n=1}^{+\infty} \int_n^{n+1} x^{t^2} dt.$$

Puisqu'on a affaire à un intégrande continu et positif sur $]1; +\infty[$, son intégrale peut être définie dans $\mathbf{R}_+ \cup \{+\infty\}$ et l'inégalité précédente montre qu'elle est finie, i.e.

$$f(x) \geq \int_1^{+\infty} x^{t^2} dt$$

et donc, par changement de variable affine bijectif,

$$f(x) \geq \frac{1}{\sqrt{-\ln(x)}} \int_{\sqrt{-\ln(x)}}^{+\infty} e^{-u^2} du.$$

Comme x est supérieur à $1/2$, on a $-\ln(x) \leq \ln(2)$ et donc, par positivité de l'intégrande,

$$\boxed{f(x) \geq \frac{1}{\sqrt{-\ln(x)}} \int_{\sqrt{\ln(2)}}^{+\infty} e^{-u^2} du.}$$