Dans tout ce problème, n est un entier au moins égal à 1. On note $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{C})$ l'espace vectoriel des matrices à n lignes et p colonnes, à coefficients complexes.
On identifiera une matrice colonne X (un élément de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{C})$) et le vecteur de $\mathbf{C}^n$ dont les composantes dans la base canonique de $\mathbf{C}^n$ sont les coefficients de la matrice X. Pour M dans $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbf{C})$, on note $\widetilde{M}$ l'endomorphisme canoniquement associé de $\mathbf{C}^n$: $\widetilde{M}$ est l'endomorphisme de $\mathbf{C}^n$ dont M est la matrice dans la base canonique de $\mathbf{C}^n$. Par ailleurs, $E_\lambda(\widetilde{M})$ est l'espace propre associé à la valeur propre λ de l'endomorphisme $\widetilde{M}$.
Pour une matrice M dans $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbf{C})$ de coefficients $(m_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ et pour $0 \leq k \leq n-1$, on appelle k-ième diagonale supérieure de M, notée $D_k(M)$, l'ensemble des coefficients $(m_{i,i+k})_{1\leq i\leq n-k}$. Une diagonale supérieure $D_k(M)$ est dite nulle lorsque tous ses éléments sont nuls.
Si V et W sont deux espaces supplémentaires de $\mathbf{C}^n$, on note p_V la projection sur V parallèlement à W : pour $x = x_V + x_W$ avec $x_V \in V$ et $x_W \in W$, $p_V(x) = x_V$. Pour un endomorphisme u de $\mathbf{C}^n$, on note u_V sa restriction à V.
De sorte que si i_V représente l'injection canonique de V dans $\mathbf{C}^n$, $u_V(y) = u(i_V(y))$ pour tout y de V.

PARTIE I - Algèbres de Lie

On appelle crochet de Lie de deux éléments X et Y de $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbf{C})$ la matrice, notée $[X,Y]$, définie par
$$[X,Y] = XY - YX \ .$$

Définition 1 *Soit $\mathcal{U}$ un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbf{C})$. On note $[\mathcal{U}]$ l'espace vectoriel engendré par les crochets de Lie $[X,Y]$ lorsque X et Y décrivent $\mathcal{U}$. On dit que $\mathcal{U}$ est une algèbre de Lie lorsque*
$$[\mathcal{U}] \subset \mathcal{U} \ .$$

Soit $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ deux algèbres de Lie qui vérifient
$$[\mathcal{U}] \subset \mathcal{V} \subset \mathcal{U}.$$

On souhaite démontrer le théorème suivant.
Théorème 1 *Si $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{C})$ est une colonne propre pour toute matrice M dans $\mathcal{V}$ et si A est une matrice dans $\mathcal{U}$ alors AX est soit la matrice nulle, soit une matrice colonne propre pour toute matrice M dans $\mathcal{V}$. De plus, si pour $M \in \mathcal{V}$, $MX = \lambda X$ alors $M(AX) = \lambda(AX)$.*

Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{C})$ une matrice colonne propre pour toute matrice M dans $\mathcal{V}$, et soit A une matrice de $\mathcal{U}$.

1) Établir l'existence d'une forme linéaire λ sur $\mathcal{V}$, à valeurs dans $\mathbf{C}$, telle que pour tout $M \in \mathcal{V}$, $MX = \lambda(M)X$.
2) Montrer que pour tout $M \in \mathcal{V}$, $[M,A]$ appartient à $\mathcal{V}$.
   On considère la suite de matrices colonnes $(X_k)_{k\geq 0}$ définie par $X_0 = X$ et
$$\forall k \in \mathbf{N} \quad X_{k+1} = AX_k \ .$$
   Pour M dans $\mathcal{V}$, on considère la suite de nombres complexes $(\lambda_k(M))_{k\geq 0}$ définie par $\lambda_0(M) = \lambda(M)$ et, pour tout k dans $\mathbf{N}$, $\lambda_{k+1}(M) = \lambda_k([M,A])$.

3) Démontrer, pour tout entier $i \geq 0$ et pour tout M dans $\mathcal{V}$, les identités suivantes :

$$MX_i = \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} \lambda_{i-j}(M) X_j \tag{1}$$

$$[M, A]\, X_i = \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} \lambda_{i-j+1}(M) X_j. \tag{2}$$

4) On identifie dorénavant matrices colonnes et vecteurs de $\mathbf{C}^n$. Démontrer qu'il existe un plus grand entier q tel que la famille de vecteurs $\{X_0, X_1, X_2, \ldots, X_q\}$ soit libre.
On note G l'espace vectoriel engendré par la famille $\{X_0, X_1, X_2, \ldots, X_q\}$.

5) Montrer que $\widetilde{M_G}$, $\widetilde{A_G}$ et $\widetilde{[M, A]_G}$ sont des endomorphismes de G.

6) Calculer la trace de $\widetilde{[M, A]_G}$.

7) Quelle est la matrice de $\widetilde{[M, A]_G}$ dans la base $\{X_0, X_1, X_2, \ldots, X_q\}$?

8) Pour M dans $\mathcal{V}$, que vaut $\lambda([M, A])$?

9) Établir le théorème 1.

PARTIE II - Algèbres de Lie résolubles

Définition 2 *Soit $\mathcal{U}$ une algèbre de Lie et p un entier naturel non nul. On dit que $\mathcal{U}$ est une algèbre de Lie résoluble de longueur p lorsqu'il existe des algèbres de Lie $\mathcal{U}_0$, $\mathcal{U}_1$, …, $\mathcal{U}_p$ telles que :*

$$\{0\} = \mathcal{U}_p \subset \mathcal{U}_{p-1} \subset \cdots \subset \mathcal{U}_1 \subset \mathcal{U}_0 = \mathcal{U} \tag{A}$$

$$\forall i \in \{0, \ldots, p-1\} \quad [\mathcal{U}_i] \subset \mathcal{U}_{i+1} \tag{B}$$

On se propose de montrer le théorème suivant.

Théorème 2 *$\mathcal{U}$ est une algèbre de Lie résoluble si et seulement s'il existe une matrice P inversible telle que, pour tout $M \in \mathcal{U}$, $P^{-1}MP$ est triangulaire supérieure.*

Soit P une matrice inversible de $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbf{C})$ et $\mathcal{T}_P$ l'ensemble des matrices M dans $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbf{C})$ telles que $P^{-1}MP$ soit triangulaire supérieure.

10) Traduire la propriété « il existe une matrice P inversible telle que, pour tout M dans $\mathcal{U}$, $P^{-1}MP$ est triangulaire supérieure » en une propriété sur les endomorphismes canoniquement associés aux éléments de $\mathcal{U}$.

11) Montrer que $\mathcal{T}_P$ est une algèbre de Lie résoluble de longueur n.
On pourra considérer les sous-espaces $(\mathcal{N}_k)_{0 \leq k \leq n}$ tels que $\mathcal{N}_0 = \mathcal{T}_P$ et pour tout entier k entre 1 et n, $\mathcal{N}_k$ est l'ensemble des matrices M dans $\mathcal{T}_P$ telles que les k diagonales supérieures $D_0(P^{-1}MP)$, $D_1(P^{-1}MP)$, …, $D_{k-1}(P^{-1}MP)$ sont nulles.
Dans les questions 12 à 17, on suppose que $\mathcal{U}$ est une algèbre de Lie résoluble de longueur $p = 1$.

12) Montrer que pour tout M ,M' dans $\mathcal{U}$, on a $MM' = M'M$.

13) Soit r un entier non nul et une famille M_1, M_2,…,M_r d'éléments de $\mathcal{U}$. Montrer qu'il existe un vecteur propre commun aux endomorphismes $\widetilde{M_1}$, $\widetilde{M_2}$,…, $\widetilde{M_r}$.

14) Montrer qu'il existe au moins un vecteur propre commun à tous les endomorphismes $\widetilde{M}$ pour M dans $\mathcal{U}$.

On note dorénavant :

$$\widetilde{\mathcal{U}} = \left\{ \widetilde{M} \,\middle|\, M \in \mathcal{U} \right\} .$$

Soit F et H deux sous-espaces supplémentaires de $\mathbf{C}^n$ et u et v deux endomorphismes de $\mathbf{C}^n$. De plus, on suppose, d'une part, que F est stable par u et v et, d'autre part, que u et v commutent.

15) Montrer les relations suivantes :

$$p_H u = p_H u p_H \text{ et } p_H v = p_H v p_H .$$

16) Montrer que $p_H u p_H$ et $p_H v p_H$ commutent puis que $p_H u_H$ et $p_H v_H$ commutent.

17) En procédant par récurrence sur n, établir le théorème 2 dans le cas $p = 1$.

Soit, maintenant, $\mathcal{U}$ une algèbre de Lie résoluble de longueur $p > 1$.

On suppose établi que pour toute algèbre de Lie résoluble de longueur inférieure strictement à p, il existe un élément P dans $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbf{C})$, inversible, tel que pour toute matrice M dans cette algèbre, $P^{-1}MP$ soit triangulaire supérieure.

18) Montrer qu'il existe au moins un vecteur propre commun à tous les endomorphismes $\widetilde{M}$, $M \in \mathcal{U}_1$.

Soit X l'un de ces vecteurs propres. On note E l'espace vectoriel engendré par X et les éléments de la forme

$$\widetilde{A_1} \dots \widetilde{A_k}\, X$$

où k est un entier non nul, $A_j \in \mathcal{U}$ pour tout j.

19) Montrer que E est un espace vectoriel stable par tous les éléments de $\widetilde{\mathcal{U}}$ et que tous les éléments de E sont des vecteurs propres communs à tous les endomorphismes de $\widetilde{\mathcal{U}_1}$.

Soit M et M' dans $\mathcal{U}$.

20) Montrer que $\widetilde{[M, M']}_E$ est une homothétie de trace nulle.

21) Que peut-on en déduire ?

Le théorème 2, dans le cas général, se prouve alors par les mêmes raisonnement qu'aux questions 14 et 17.

Deuxième composition – Mines-Ponts 2007 – MP

PARTIE I - Algèbres de Lie

1) Par hypothèse sur X, on dispose d'un scalaire $\lambda(M)$ vérifiant, pour tout M dans $\mathcal{V}$, $MX = \lambda(M)X$. Par linéarité de $M \mapsto MX$, l'application $M \mapsto \lambda(M)X$ est linéaire et, puisque X est non-nul, on en déduit que $\boxed{\lambda \text{ est une forme linéaire sur } \mathcal{V}.}$

2) Soit M dans $\mathcal{V}$. Puisque $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$, $[M, A]$ appartient donc à $[\mathcal{U}]$ et donc, par hypothèse sur $\mathcal{V}$, $\boxed{[M, A] \in \mathcal{V}.}$

3) Soit φ l'application linéaire de $\mathcal{V}$ dans lui-même donnée par $\varphi(M) = [M, A]$. On a donc, pour M dans $\mathcal{V}$, $MA = AM + \varphi(M)$. Soit alors $(\mathbf{H}_k)$ le prédicat sur $\mathbf{N}$ donné par : $\forall M \in \mathcal{V}$, $MA^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} A^j \varphi^{k-j}(M)$.

Pour $k = 0$, l'identité s'écrit $M = \varphi^0(M)$, ce qui traduit $\varphi^0 = \text{Id}$. Et pour $k = 1$, l'identité résulte de la définition de φ et donc $(\mathbf{H}_0)$ et $(\mathbf{H}_1)$ sont vrais. Soit maintenant k dans $\mathbf{N}^*$ tel que $(\mathbf{H}_k)$ est vrai et M dans $\mathcal{V}$. Il vient

$$MA^{k+1} = (AM + \varphi(M))A^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} A^{j+1} \varphi^{k-j}(M) + \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} A^j \varphi^{k-j+1}(M)$$

et donc, en réindexant et en utilisant la relation du triangle de Pascal $\binom{k}{j-1} + \binom{k}{j} = \binom{k+1}{j}$, on en déduit que $(\mathbf{H}_{k+1})$ est vrai.

Soit alors i dans $\mathbf{N}$ et M dans $\mathcal{V}$, il vient

$$MX_i = MA^i X = \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} A^j \varphi^{i-j}(M)X = \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} A^j \lambda_{i-j}(M)X$$

et donc $\boxed{MX_i = \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} \lambda_{i-j}(M) X_j.}$ De plus $\varphi(M)X_i = \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} A^j \lambda_{i-j+1}(M)X$ et donc $\boxed{[M, A]X_i = \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} \lambda_{i-j+1}(M) X_j.}$

4) L'ensemble $\{i \in \mathbf{N} \mid \operatorname{rg}(X_0, X_1, \ldots, X_i) = i + 1\}$ contient 0 puisque X_0 est non nul. Étant non vide et majoré par n, puisqu'on a affaire à des familles de vecteurs de $\mathbf{C}^n$, il admet $\boxed{\text{un plus grand élément.}}$

5) Puisque G admet $(X_i)_{0 \leq i \leq q}$ comme base, la restriction d'un endomorphisme de $\mathbf{C}^n$ à G est un endomorphisme de G si et seulement si cet endomorphisme envoie chaque X_i, pour $0 \leq i \leq q$, dans G. En ce qui concerne M et $[M, A]$, pour M dans $\mathcal{V}$, cette propriété résulte de la question 3. Pour A et $0 \leq i < q$, cela résulte de la définition de la suite (X_k). Enfin pour A et $i = q$, on dispose, par définition de q, d'une relation de dépendance linéaire $\sum_{j=0}^{q+1} \alpha_j X_j$ avec $(\alpha_j)_{0 \leq j \leq q+1}$ des réels non tous nuls. Or $\alpha_{q=+1} \neq 0$, par indépendance de $(X_i)_{0 \leq i \leq q}$, donc X_{q+1} appartient à G, i.e. $AX_q \in G$. Par conséquent $\boxed{\widetilde{M}_G,\ \widetilde{A}_G \text{ et } \widetilde{[M, A]}_G \text{ sont des endomorphismes de } G.}$

6) Puisqu'on a affaire à des endomorphismes de G, on a $\widetilde{[M,A]}_G = \widetilde{M}_G\widetilde{A}_G - \widetilde{A}_G\widetilde{M}_G$ et donc, par commutativité de la trace $\boxed{\mathrm{Tr}\,\widetilde{[M,A]}_G = 0.}$

7) D'après la question 3, la matrice de $\widetilde{[M,A]}_G$ dans la base $(X_i)_{0\leq i\leq q}$ est triangulaire supérieure. En convenant $\binom{p}{q} = 0$ si $p < q$, cette matrice est égale à $\boxed{\left(\binom{j-1}{i-1}\lambda_{j-i+1}(M)\right)_{1\leq i,j\leq q+1}}$.

8) Puisque la trace est invariante par changement de base, il résulte de l'expression précédente que la trace de $\widetilde{[M,A]}_G$ vaut $(q+1)\lambda_1(M)$. Comme $q+1$ est non nul, il résulte de la question 6, que $\lambda_1(M)$ est nul, i.e. $\boxed{\lambda\left([M,A]\right) = 0.}$

9) Par définition, on a $(AM - MA)X = 0$, i.e. $MAX = AMX$, d'où $M(AX) = A(\lambda(M)X) = \lambda(M)(AX)$, ce qui est précisément le $\boxed{\text{théorème 1.}}$

PARTIE II - Algèbres de Lie résolubles

10) Par définition, cette propriété signifie que les endomorphismes canoniquement associés aux éléments de $\mathcal{U}$ sont $\boxed{\text{simultanément trigonalisables.}}$

11) Pour tout k compris entre 0 et n, on note E_k le sous-espace de $\mathbf{C}^n$ engendré par les k premiers vecteurs colonnes de la matrice P. On a alors, pour $0 \leq k \leq n$, $A \in \mathcal{N}_k$ si et seulement si, pour $k \leq i \leq n$, $A(E_i) \subset E_{i-k}$.
Puisque le produit de deux matrices triangulaires est triangulaire, de diagonale donnée par le produit des éléments diagonaux, si A et B sont triangulaires, $AB - BA$ est triangulaire de diagonale nulle et donc $[\mathcal{N}_0] \subset \mathcal{N}_1$.
Pour $1 \leq k \leq i \leq n$ et A et B dans $\mathcal{N}_k$, on a, en convenant $E_j = \{0\}$ si $j < 0$, $AB(E_i) \subset A(E_{i-k}) \subset E_{i-2k} \subset E_{i-k-1}$. En particulier AB et BA appartiennent à $\mathcal{N}_{k+1}$ et donc $[A,B]$ aussi puisqu'on a affaire à un espace vectoriel. Il en résulte que
$\boxed{\mathcal{T}_P \text{ est une algèbre de Lie résoluble de longueur } n.}$

12) Par hypothèse, on a $[\mathcal{U}] \subset \{0\}$ et donc, pour M et M' dans $\mathcal{U}$, $[M,M'] = 0$, i.e. $\boxed{MM' = M'M.}$

13) On démontre par récurrence sur n le résultat $(\mathbf{H}_n)$ suivant : toute famille commutative d'endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbf{C}$ admet un vecteur propre commun.
Comme tout vecteur non nul d'un endomorphisme en dimension 1 est propre, $(\mathbf{H}_1)$ est vrai.
Supposons alors $(\mathbf{H}_n)$ vrai pour n dans $\mathbf{N}$. On se donne alors une famille commutative d'endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension $n+1$ sur $\mathbf{C}$. Si cette famille est composée d'homothéties, tout vecteur non nul est propre pour tous les endomorphismes de la famille. Sinon on dispose de u dans cette famille admettant un espace propre E de dimension inférieure à n. Puisqu'on a affaire à une famille commutative, cet espace propre est stable par tous les endomorphismes de la famille et donc, par hypothèse de récurrence, les restrictions de ces endomorphismes ont un vecteur propre commun dans E et donc aussi dans l'espace de départ.
Le résultat en découle par le principe de récurrence et donc, en particulier, pour une famille finie dans $\mathcal{U}$, puisque ce dernier est de dimension finie, i.e.
$\boxed{\text{il existe un vecteur propre commun à } \widetilde{M}_1,\ \widetilde{M}_2,\ \ldots,\ \widetilde{M}_r.}$

14) Cette propriété résulte du résultat démontré précédemment en prenant comme famille tous les vecteurs de $\mathcal{U}$: $\boxed{\text{il existe un vecteur propre commun à tous les endomorphismes de } \mathcal{U}.}$

15) Par hypothèse on a $\mathrm{Id} = p_F + p_H$. Comme $\mathrm{Im}(up_F) \subset F$, on a $p_H u p_F = 0$, et de même pour v, $p_H v p_F = 0$. Il en résulte $p_H u = p_H u(p_F + p_H) = p_H u p_H$ et de même pour v : $\boxed{p_H u = p_H u p_H \text{ et } p_H v = p_H v p_H.}$

16) On a $p_H^2 = p_H$ donc $p_H u p_H p_H v p_H = p_H u p_H v p_H$ et, en appliquant ce qui précède, on a $p_H u p_H p_H v p_H = p_H u v p_H$. Comme $uv = vu$, en remontant les identités précédentes en échangeant le rôle de u et v, on en déduit que $\boxed{p_H u p_H \text{ et } p_H v p_H \text{ commutent.}}$

Puisque $(up_H)_H = u_H$ et $(vp_H)_H = v_H$, il vient : $\boxed{p_H u_H \text{ et } p_H v_H \text{ commutent.}}$

17) On démontre par récurrence sur n le résultat $(\mathbf{H}_n)$ suivant : pour toute famille commutative d'un espace vectoriel complexe de dimension n est simultanément trigonalisable.

Puisque toute matrice de taille 1 est diagonale, $(\mathbf{H}_1)$ est vrai. Soit maintenant n dans $\mathbf{N}$ tel que $(\mathbf{H}_n)$ soit vrai et $\mathcal{U}$ une famille commutative d'un espace vectoriel complexe de dimension $n+1$. D'après 14, on dispose d'un vecteur propre commun à tous les éléments de $\mathcal{U}$ et donc aussi d'une droite propre commune. Soit H un supplémentaire de cette droite. D'après 16, la famille $(p_H u_H)_{u \in \mathcal{U}}$ est commutative. Par hypothèse de récurrence, cette famille est simultanément trigonalisable. La concaténation du vecteur propre commun et de la base de trigonalisation commune dans H fournit alors une base de trigonalisation des éléments de $\mathcal{U}$.

D'après le principe de récurrence, $(\mathbf{H}_n)$ est donc vrai pour tout entier n. En particulier comme une algèbre de Lie de longueur 1 est une famille commutative, il en résulte que $\boxed{\text{le théorème 2 est vrai lorsque } p = 1.}$

18) Puisque $\mathcal{U}$ est résoluble de longueur p, $\mathcal{U}_1$ est résoluble de longueur $p-1$. Les endomorphismes de $\mathcal{U}_1$ sont donc simultanément trigonalisables par hypothèse et donc le premier vecteur d'une base de trigonalisation commune est un

$\boxed{\text{vecteur propre commun à tous les endomorphismes de } \mathcal{U}_1.}$

19) Par définition de E, on dispose d'une famille génératrice de E stable par tous les éléments de $\widetilde{\mathcal{U}}$ et donc $\boxed{E \text{ est stable par tous les éléments de } \widetilde{\mathcal{U}}.}$

Par une récurrence immédiate, en utilisant le théorème 1, la famille génératrice de E est formée de vecteurs soit nuls, soit vecteurs propres communs à tous les éléments de $\widetilde{\mathcal{U}}_1$. Par linéarité il en résulte que $\boxed{\text{les vecteurs non nuls de } E \text{ sont propres pour tous les éléments de } \widetilde{\mathcal{U}}_1.}$

20) Soit u dans $\widetilde{\mathcal{U}}_1$. La restriction de u_E à toute droite de E est une homothétie. Il en résulte que u_E est une homothétie. En particulier $\boxed{\widetilde{[M, M']}_E \text{ est une homothétie.}}$

Comme $\widetilde{[M, M']}_E = \left[\widetilde{M}_E, \widetilde{M'}_E\right]$, par commutativité de la trace, $\boxed{\widetilde{[M, M']}_E \text{ est trace nulle.}}$

21) Il en résulte $\widetilde{[M, M']}_E = 0$ puisque E n'est pas de dimension nulle. Par conséquent les restrictions à E des éléments de $\mathcal{U}$ forment une algèbre de lie résoluble de longueur 1 et donc $\boxed{\text{les endomorphismes } (\widetilde{M}_E)_{U \in \mathcal{U}} \text{ sont simultanément trigonalisables.}}$