Exercice de probabilités

Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs réelles. On note φ_X sa *fonction caractéristique*, définie par $\varphi_X(t) = \mathbf{E}\left(e^{itX}\right)$, i.e. $\varphi_X(t) = \sum_{x\in X(\Omega)} \mathbf{P}(X = x)\, e^{itx}$.

1) Expliciter φ_X si X suit une loi de Poisson de paramètre λ.
2) Montrer que φ_X est définie sur $\mathbf{R}$.
3) On souhaite montrer que φ_X détermine la loi de X.
   a) On suppose $X(\Omega) = \mathbf{N}$. Montrer, pour k dans $\mathbf{N}$, $\mathbf{P}(X = k) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \varphi_X(t)e^{-ikt}\,\mathrm{d}t$.
   b) Dans le cas général, montrer pour a dans $\mathbf{R}$, $\mathbf{P}(X = a) = \displaystyle\lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} \varphi_X(t)e^{-iat}\,\mathrm{d}t$ et conclure.
4) Soit $(X_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ une suite de variables aléatoires discrètes, indépendantes et de même loi, admettant un moment d'ordre 1 (mais pas nécessairement de moments d'ordre supérieur). On note φ_n la fonction caractéristique de la variable donnée par $Y_n = \dfrac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$.
   a) Montrer que la suite (φ_n) converge simplement vers $t \mapsto \exp(it\mathbf{E}(X_1))$.
   On admet que cela entraîne, pour tout a dans $\mathbf{R}$, $\lim \mathbf{P}(Y_n = a) = \delta_{a,\mathbf{E}(X_1)}$ où δ est le symbole de Kronecker. On note $Z_n = \min(|Y_n - \mathbf{E}(X_1)|, 1)$.
   b) Montrer $\lim \mathbf{E}(Z_n) = 0$. (On remarquera que la réunion des $Z_n(\Omega)$ est dénombrable.)
   c) En déduire que, pour tout ε strictement positif, on a $\lim \mathbf{P}(|Y_n - \mathbf{E}(X_1)| > \varepsilon) = 0$. Interpréter. (On pourra appliquer l'inégalité de Markov à Z_n.)

Première composition de mathématiques
Mines-Ponts 2009 – MP

On note E l'ensemble des fonctions f continues, définies sur $\mathbf{R}$, à valeurs positives ou nulles, et vérifiant l'équation

$$\int_{\mathbf{R}} f(x)\,\mathrm{d}x = 1\ .$$

Lorsqu'elle existe, la *fonction caractéristique* de f, appartenant à E, est la fonction φ_f de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{C}$ définie par la formule

$$\varphi_f(t) = \int_{\mathbf{R}} e^{itx} f(x)\,\mathrm{d}x\ .$$

Lorsque pour un entier k positif, la fonction $x \mapsto |x|^k f(x)$ est intégrable sur $\mathbf{R}$, on appelle moment d'ordre k de f la quantité donnée par

$$a_k(f) = \int_{\mathbf{R}} x^k f(x)\,\mathrm{d}x\ .$$

Si, pour tout entier k positif, la fonction $x \mapsto |x|^k f(x)$ est intégrable sur $\mathbf{R}$, on dit que f admet des moments de tous ordres.

On admettra que pour tout λ appartenant à $\mathbf{C}$, on a

$$\int_{\mathbf{R}} \exp\left(\lambda x - \frac{x^2}{2}\right) = \sqrt{2\pi}\exp\left(\frac{\lambda^2}{2}\right)\ .$$

PARTIE I - Questions préliminaires

Les résultats de ces questions, indépendantes les unes des autres, pourront être utilisés dans la suite du problème.

1) Soit f appartenant à E. On suppose, dans cette question, que f admet des moments de tous ordres.
   Montrer l'existence de φ_f et de ses dérivées successives que l'on exprimera à l'aide de f.
2) Montrer que pour tout réel x et tout entier n supérieur à 1

$$\left| e^{ix} - \sum_{m=0}^{n-1} \frac{(ix)^m}{m!} \right| \leq \frac{|x|^n}{n!} .$$

3) Soit a et b appartenant à $\mathbf{R}$ tels que $a < b$. Montrer que la fonction $h_{a,b}$ définie sur $\mathbf{R}$ par

$$h_{a,b}(t) = \begin{cases} \dfrac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it} & \text{si } t \neq 0 \\ b - a & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

   est continue sur $\mathbf{R}$.
4) Montrer, pour tout réel t , $|h_{a,b}(t)| \leq b - a$.
5) Montrer, pour tout entier k positif, $e^k \geq \dfrac{k^k}{k!}$.

PARTIE II - La fonction φ_f caractérise f

On considère la fonction R définie pour tout (θ, T) appartenant à $\mathbf{R} \times \mathbf{R}_+$ par la formule

$$R(\theta, T) = \int_{-T}^{T} \frac{sin(\theta t)}{t} \, \mathrm{d}t$$

et la fonction S définie pour tout T appartenant à $\mathbf{R}$ par la formule

$$S(T) = \int_{0}^{T} \frac{\sin(x)}{x} \, \mathrm{d}x .$$

On admet $\lim\limits_{T \to +\infty} S(T) = \dfrac{\pi}{2}$.

6) Exprimer $R(\theta, T)$ à l'aide de S.
7) Soit x et y appartenant à $\mathbf{R}$. Calculer la limite de $R(x, T) - R(y, T)$ quand T tend vers $+\infty$ (on discutera de cette limite en fonction des signes de x et y).
8) Soit a et b appartenant à $\mathbf{R}$ tels que $a < b$. Montrer

$$\lim_{T \to +\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{T} h_{a,b}(t) \varphi_f(t) \, \mathrm{d}t = \int_{a}^{b} f(t) \, \mathrm{d}t .$$

9) En déduire qu'étant donné deux fonctions f et g de E , si $\varphi_f = \varphi_g$, alors $f = g$.

PARTIE III - La suite $a_k(f)$ ne caractérise pas toujours f

On définit la fonction f_0 par $f_0(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \dfrac{\exp\left(-\frac{(\ln(x))^2}{2}\right)}{x} & \text{pour } x > 0 \\ 0 & \text{pour } x \leq 0\ . \end{cases}$

10) Montrer $f_0 \in E$.

11) Montrer que f_0 admet des moments de tous ordres et calculer $a_k(f_0)$ pour tout k dans $\mathbf{N}$.

On introduit, pour a appartenant à $[-1;1]$, la fonction f_a nulle sur $\mathbf{R}_-$ et définie sur $\mathbf{R}_+^*$ par la formule

$$f_a(x) = f_0(x) \cdot (1 + a\sin(2\pi\ln(x)))\ .$$

12) Montrer $f_a \in E$, et $a_k(f_0) = a_k(f_a)$ pour tout k entier naturel.

PARTIE IV - Une condition sur la suite $a_k(f)$

Dans cette partie, f est une fonction de E qui admet des moments de tous ordres, et vérifie en outre la condition (U) suivante : $\exists M \in \mathbf{R}_+^*, \forall k \in \mathbf{N}^*, 0 \leq \dfrac{a_{2k}(f)^{\frac{1}{2k}}}{2k} \leq M$.

On pose $b_k(f) = \displaystyle\int_{\mathbf{R}} |x|^k f(x)\,\mathrm{d}x$ pour tout entier k strictement positif.

13) Montrer que, pour tout entier k positif, on a l'inégalité $(b_{2k+1}(f))^2 \leq a_{2k}(f) \cdot a_{2k+2}(f)$.

14) En déduire que la suite de terme général $\dfrac{b_k(f)^{\frac{1}{k}}}{k}$ est majorée par $2M$.

15) Montrer, pour tous x et h réels et pour tout entier n supérieur à 1,

$$\left|\varphi_f(x+h) - \sum_{m=0}^{n-1} \frac{h^m}{m!}\varphi_f^{(m)}(x)\right| \leq \frac{|h|^n}{n!} b_n(f)\ .$$

16) Montrer que, pour un certain A strictement positif que l'on exprimera en fonction de M, on a l'égalité

$$\varphi_f(x+h) = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{h^m}{m!}\varphi_f^{(m)}(x)$$

pour tout réel x et pour tout h tel que $|h| < A$.

17) En déduire que si ℓ est un entier strictement positif et g une fonction de E admettant des moments de tous ordres tels que $a_k(f) = a_k(g)$ pour tout k appartenant à $\mathbf{N}$, alors $\varphi_f(x) = \varphi_g(x)$ pour tout x appartenant à $\left[-\dfrac{\ell A}{2}; \dfrac{\ell A}{2}\right]$ (on pourra procéder par récurrence).

18) Conclure.

PARTIE V - Application

19) Résoudre en f appartenant à E le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} a_{2k}(f) = (2k-1)a_{2k-2}(f) \\ a_{2k-1}(f) = 0 \end{cases}$$

pour tout entier k supérieur à 1. (On pourra utiliser la fonction caractéristique de f.)

Exercice de probabilités

1) Par définition, si X suit une loi de Poisson de paramètre λ, alors X est à valeurs dans $\mathbf{N}$ et pout tout k dans $\mathbf{N}$, on a $\mathbf{P}(X = k) = e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}$ et il vient, pour t dans $\mathbf{R}$ et sous réserve que la somme existe,

$$\varphi_X(t) = \sum_{k\in\mathbf{N}} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}e^{ikt} = \sum_{k\in\mathbf{N}} e^{-\lambda}\frac{(\lambda e^{it})^k}{k!}$$

et donc, puisque l'exponentielle a un rayon de convergence infini et converge donc en particulier en λe^{it}, $\boxed{\varphi_X \text{ est défini sur } \mathbf{R} \text{ et on a } \varphi_X(t) = \exp(\lambda(e^{it} - 1)).}$

2) Pour t dans $\mathbf{R}$, la variable aléatoire e^{itX} est à valeurs dans le groupe des nombres complexes de module 1, puisque X est à valeurs réelles. Puisqu'elle est bornée, elle admet une espérance et en particulier $\boxed{\varphi_X \text{ est définie sur } \mathbf{R}.}$

3) a. Soit k dans $\mathbf{N}$. Soit la série de fonctions $\sum u_n$ donnée par $u_n(t) = \mathbf{P}(X = n)\, e^{i(n-k)t}$, définie sur $\mathbf{R}$. Pour n dans $\mathbf{N}$, on a $\|u_n\|_\infty = \mathbf{P}(X = n)$. Comme $\sum \mathbf{P}(X = n)$ converge et est de somme 1 par définition d'une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbf{N}$, $\sum u_n$ est normalement convergente sur $\mathbf{R}$. Il en résulte que sa somme, φ_X, est continue sur $\mathbf{R}$, et a fortiori sur $[-\pi;\pi]$, et de plus, grâce au théorème d'interversion des signes somme et intégrale dans le cas normalement convergent, on a

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi_X(t)e^{-ikt}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=0}^{+\infty}\int_{-\pi}^{\pi} u_n(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=0}^{+\infty}\mathbf{P}(X = n)\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-k)t}\,\mathrm{d}t\,.$$

Et, attendu qu'on a $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-k)t}\,\mathrm{d}t = \delta_{k,n}$, il vient $\boxed{\mathbf{P}(X = k) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\varphi_X(t)e^{-ikt}\,\mathrm{d}t.}$

b. Soit a dans $\mathbf{R}$. Puisque $X(\Omega)$ est au plus dénombrable, on dispose de (x_n) une suite injective de réels telle que $X(\Omega)$ soit inclus l'ensemble des valeurs de (x_n). Soit alors la série de fonctions $\sum u_n$ donnée par $u_n(t) = \mathbf{P}(X = x_n)\, e^{i(x_n-a)t}$. Elle est normalement convergente sur $\mathbf{R}$ puisque $\sum \|u_n\|_\infty = \sum \mathbf{P}(X = x_n)$. Il en résulte à nouveau que sa somme est continue, intégrable sur tout segment de $\mathbf{R}$, et que, grâce au théorème d'interversion des signes somme et intégrale, on a

$$\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\varphi_X(t)e^{-iat}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2T}\sum_{n=0}^{+\infty}\int_{-T}^{T} u_n(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

De plus on a, pour n dans $\mathbf{N}$ tel que $x_n \neq a$,

$$\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} u_n(t)\,\mathrm{d}t = \mathbf{P}(X = x_n)\,\frac{\sin((x_n-a)T)}{(x_n-a)T}\,.$$

Il en résulte, en notant g le prolongement par continuité en 0 de la fonction sinus cardinal, et, pour n dans $\mathbf{N}$, g_n la fonction donnée par $g_n(t) = g((x_n - a)t)$,

$$\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\varphi_X(t)e^{-iat}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty}\mathbf{P}(X = x_n)\,g_n(T)\,.$$

On a, pour tout entier naturel n, $\|g_n\|_\infty = \|g\|_\infty = 1$ y compris si $x_n = a$. Comme la série $\sum \mathbf{P}(X = x_n)$ est (absolument) convergente de somme 1 par définition d'une variable aléatoire, la série de fonctions $\sum \mathbf{P}(X = x_n) g_n$ est normalement convergente sur $\mathbf{R}$. Comme toutes les fonctions $\mathbf{P}(X = x_n) g_n$ admettent une limite en l'infini, on peut intervertir les signes limite et somme et il vient

$$\lim_{T \to +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \varphi_X(t) e^{-iat} \, \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X = x_n) \delta_{x_n, a}$$

puisque g_n est constante égale à 1 si $x_n = a$ et est dans $O(1/t)$ en $+\infty$ sinon. Par conséquent

$$\boxed{\mathbf{P}(X = a) = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \varphi_X(t) e^{-iat} \, \mathrm{d}t.}$$

On en déduit que, connaissant φ_X on peut déduire de la formule précédente la loi de X, i.e. $\boxed{\varphi_X \text{ détermine la loi de } X.}$

4) a. Puisque les fonctions caractéristiques sont définies sur $\mathbf{R}$, d'après 2), on a, pour t réel $\varphi_n(t) = \mathbf{E}\left(e^{itY_n}\right) = \mathbf{E}\left(e^{itX_1/n} \cdots e^{itX_n/n}\right)$ et donc, par indépendance de la suite (X_k), $\varphi_n(t) = \mathbf{E}\left(e^{itX_1/n}\right) \cdots \mathbf{E}\left(e^{itX_n/n}\right)$. Puisque (X_k) est équidistribuée, il en résulte $\varphi_n(t) = \varphi_{X_1}(t/n)^n$.

On note $X_1(\Omega) = (x_n)_{n \in I}$ avec $I = \mathbf{N}$ ou $I = [\![0, p]\!]$ selon que $X_1(\Omega)$ est infini ou de cardinal $p+1$. On définit la série (ou somme) $\sum_{n \in I} u_n$ par $u_n(t) = \mathbf{P}(X_1 = x) e^{itx_n}$, dont tous les termes sont de classe C^∞ sur $\mathbf{R}$. De plus, pour tout n dans I, on a $\|u_n'\|_\infty = |x_n| \mathbf{P}(X_1 = x_n)$. Il en résulte que la série $\sum_{n \in I} u_n'$ est normalement convergente puisque X_1 admet un moment d'ordre 1, tout comme $\sum_{n \in I} u_n$ (puisqu'il s'agit de la série définissant φ_{X_1}). Il résulte du théorème de dérivation des séries normalement convergentes, règle de Leibniz, que φ_{X_1} est dérivable sur $\mathbf{R}$, de dérivée la somme de la série des dérivées. En particulier on a $\varphi_{X_1}(0) = \mathbf{E}(1) = 1$ et $\varphi_{X_1}'(0) = \mathbf{E}(iX_1) = i\mathbf{E}(X_1)$.

Il en résulte $\varphi_{X_1}(t/n) = 1 + \dfrac{it}{n}\mathbf{E}(X_1) + o(1/n)$. On a donc $\varphi_{X_1}(t/n) = (1 + u_n)(1 + o(1/n))$ avec $u_n = it\mathbf{E}(X_1)/n$ et $o(1/n)$ une suite à valeurs complexes dont le module est dans $o(1/n)$. Or, d'après la formule de Bernoulli,

$$|(1+z)^n - 1| = |z| \cdot \left|1 + z + \ldots + z^{n-1}\right| \leq n \max(1, |z|)^{n-1} |z|$$

et donc $\lim(1 + o(1/n))^n = 1$. On pose maintenant $\theta_n = \arctan(t\mathbf{E}(X_1)/n)$ et il vient

$$(1 + u_n)^n = \left(\frac{\cos(\theta_n) + i \sin(\theta_n)}{\cos(\theta_n)}\right)^n = \frac{e^{in\theta_n}}{\cos^n(\theta_n)}.$$

Or $n\theta_n \sim t\mathbf{E}(X_1)$ et donc $e^{in\theta_n} \sim e^{it\mathbf{E}(X_1)}$ par continuité de l'exponentielle et $n \ln(\cos(\theta_n)) \sim -\dfrac{t^2 \mathbf{E}(X_1)^2}{2n}$ et donc $\cos^n(\theta_n) \sim 1$ également par continuité de l'exponentielle. Il en résulte que $\boxed{(\varphi_n) \text{ converge simplement vers } t \mapsto \exp(it\mathbf{E}(X_1)).}$

Remarque : pour A dans une algèbre normée, munie d'une norme sous-multiplicative, on se donne une suite (u_n) à valeur dans l'algèbre et vérifiant $u_n \sim A/n$. On peut alors écrire

$$\begin{aligned}
\|\exp(A) - (1+u_n)^n\| &\leq \sum_{k=0}^{n} \left| \frac{1}{k!} - \frac{\binom{n}{k}}{n^k} \right| \|A\|^k + o(1) \\
&\leq \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{k!} - \frac{\binom{n}{k}}{n^k} \right) \|A\|^k + o(1) \\
&\leq e^{\|A\|} - \left(1 + \frac{\|A\|}{n}\right)^n + o(1) \\
&\leq o(1)
\end{aligned}$$

d'après la propriété classique de l'exponentielle sur $\mathbf{R}$ (annoncée par Euler et démontrée par Abel). Il en résulte $(1+u_n)^n \sim e^A$.

Une autre démonstration consiste à démontrer que la limite de $(1+tA/n)^n$ est solution de l'équation différentielle $y' = Ay$.

b. Puisque les variables (X_n) sont à valeurs discrètes, il en va de même pour Y_n et donc aussi pour Z_n. L'ensemble $\bigcup_{n\in\mathbf{N}^*} Z_n(\Omega)$ est donc au plus dénombrable. On le note A. Par construction Z est inclus dans $[0;1]$. On note $(a_k)_{k\in I}$ les éléments de A, avec $I = \mathbf{N}$ ou $I = [\![0, p]\!]$ selon que A est infini ou de cardinal $p+1$.

Par conséquent (Z_n) est une suite de variables aléatoires réelles discrètes positives et bornées par 1. Elles ont donc toutes un moment d'ordre 1. Soit n dans $\mathbf{N}$, on a, d'après le théorème de transfert

$$\mathbf{E}(Z_n) = \sum_{k\in I} \mathbf{P}(Z_n = a_k)\, a_k \ .$$

Il vient donc en majorant a_k par 1, si $a_k \neq 0$, et par positivité des termes de la série,

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(Z_n) &\leq \sum_{k\in I} \mathbf{P}(Z_n = a_k) - \mathbf{P}(Z_n = 0) \\
&\leq 1 - \mathbf{P}(Z_n = 0)
\end{aligned}$$

i.e., puisque Z_n est à valeurs positives, $0 \leq \mathbf{E}(Z_n) \leq 1 - \mathbf{P}(Y_n = \mathbf{E}(X_1))$ et donc, par encadrement et en utilisant le résultat admis dans le cas $a = \mathbf{E}(X_1)$, $\boxed{\lim \mathbf{E}(Z_n) = 0.}$

c. Puisque la fonction $t \mapsto \min(t, 1)$ est positive et croissante sur $\mathbf{R}_+$ et que la variable aléatoire $|Y_n - \mathbf{E}(X_1)|$ est à valeurs dans $\mathbf{R}_+$, l'inégalité de Markov permet d'écrire, pour tout ε strictement positif, $\mathbf{P}(|Y_n - \mathbf{E}(X_1)| > \varepsilon) \leq \dfrac{\mathbf{E}(Z_n)}{\min(\varepsilon, 1)} = o(1)$, d'après la question précédente. Autrement dit $\boxed{\lim \mathbf{P}(|Y_n - \mathbf{E}(X_1)| > \varepsilon) = 0.}$

Remarque : puisque Z_n est à valeurs positives, l'inégalité de Markov donne également $\mathbf{P}(Z_n \geq \varepsilon) \leq \dfrac{\mathbf{E}(Z_n)}{\varepsilon}$ et donc $\lim \mathbf{P}(Z_n \geq \varepsilon) = 0$. Ce résultat pour tout ε dans $]0;1]$ entraîne $\lim \mathbf{P}(|Y_n - \mathbf{E}(X_1)| > \varepsilon) = 0$.

Il en résulte que

la loi faible des grands nombres est vraie en n'ayant que des moments d'ordre 1, sous l'hypothèse de suite de variables (discrètes réelles) indépendantes et identiquement distribuées.

Première composition de mathématiques – Mines-Ponts 2009 – MP

PARTIE I - Questions préliminaires

1) On considère la fonction de $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ dans $\mathbf{C}$ définie par $g(x,t) = f(x)e^{itx}$. Puisque l'exponentielle est de classe C^∞, c'est une fonction de classe C^∞ par rapport à t. De plus ses dérivées partielles par rapport à t sont données par

$$\frac{\partial^n f}{\partial t^n}(x,t) = i^n x^n f(x) e^{itx} = i^n x^n g(x,t)$$

et en particulier, pour tout entier naturel n, $\dfrac{\partial^n f}{\partial t^n}$ est une fonction continue de x sur $\mathbf{R}$ puisque f l'est, et on a, pour tout (x,t) dans $\mathbf{R}^2$,

$$\left|\frac{\partial^n f}{\partial t^n}(x,t)\right| = |x|^n f(x) \ .$$

Par hypothèse sur f, cette dernière fonction de x est continue, positive et intégrable sur $\mathbf{R}$. Il résulte donc des théorèmes de continuité et de dérivation sous le signe somme, ou règle de Leibniz, que

$\boxed{\varphi_f \text{ est définie et de classe } C^\infty \text{ sur } \mathbf{R} \text{ et, pour } n \text{ dans } \mathbf{N} \text{ et } t \text{ dans } \mathbf{R}, \text{ on a } \varphi_f^{(n)}(t) = i^n \int_{\mathbf{R}} x^n f(x) e^{itx}\,\mathrm{d}x.}$

2) Soit x un réel et n dans $\mathbf{N}^*$. Puisque la fonction exponentielle complexe, i.e. $t \mapsto e^{it}$, est de classe C^∞ sur $\mathbf{R}$, on peut lui appliquer l'inégalité de Taylor-Lagrange entre 0 et x. Comme, pour k entier, sa dérivée d'ordre k est i^k fois elle-même, elle vaut i^n en 0 et celle d'ordre n est de module 1 en tout point. On obtient directement

$$\left|e^{ix} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!} i^k e^{i0}\right| \leq \frac{|x|^n}{n!} \sup(1)$$

i.e. $\boxed{\left|e^{ix} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(ix)^k}{k!}\right| \leq \frac{|x|^n}{n!}}.$

3) En tant que quotient partout défini de combinaisons linéaires de fonctions de classe C^∞, $h_{a,b}$ est de classe C^∞ sur $\mathbf{R}^*$. De plus, pour t réel non nul, la question précédente, avec $x = ta$ ou $x = tb$ et $n = 2$, permet d'écrire

$$|h_{a,b}(t) - (b-a)| = \left|\frac{e^{-ita} - (1 - ita) - \left(e^{-itb} - (1 - itb)\right)}{it}\right| \leq \frac{(a^2+b^2)t^2}{2\,|t|} = o(1)$$

et donc $h_{a,b}$ est continue en 0. Par conséquent $\boxed{h_{a,b} \text{ est continue sur } \mathbf{R}.}$

4) Pour t dans $\mathbf{R}^*$, on a, en utilisant la question 2) avec $x = b-a$ et $n = 1$,

$$|h_{a,b}(t)| = \frac{\left|e^{-itb}\right|}{|i|} \frac{\left|e^{it(b-a)} - 1\right|}{|t|} \leq |b-a|$$

et donc par positivité de $b-a$ et puisque $h_{a,b} = b-a$, pour tout t réel $\boxed{|h_{a,b}(t)| \leq b-a.}$

5) Pour k dans $\mathbf{N}$, la série définissant e^k est à termes positifs et donc supérieure à chacun de ses termes, i.e. à tout $\dfrac{k^n}{n!}$ pour n dans $\mathbf{N}$. En prenant $n = k$, il vient $\boxed{e^k \geq \dfrac{k^k}{k!}}$.

PARTIE II - La fonction φ_f caractérise f

6) Pour tout θ réel et tout T dans $\mathbf{R}_+$, l'intégrande de l'intégrale $R(\theta, T)$ est continu sur $\mathbf{R}^*$ et prolongeable par continuité en 0 par la valeur θ puisque $\sin(\theta t) \sim \theta t$ en 0. Il en résulte que $R(\theta, T)$ est bien défini, de même que $S(T)$.

Pour θ non nul, le changement de variable affine $x = \theta t$ et la parité de la fonction sinus cardinal permettent d'écrire

$$R(\theta, T) = \int_{-\theta T}^{\theta T} \frac{\sin(x)}{x}\,\mathrm{d}x = 2S(\theta T)$$

et cette relation est encore valable quand $\theta = 0$, i.e. $\boxed{R(\theta, T) = 2S(\theta T).}$

7) Par parité de la fonction sinus cardinal, et en vertu de la relation admise $\lim\limits_{T\to+\infty} S = \dfrac{\pi}{2}$, on a $\lim\limits_{T\to-\infty} S = -\dfrac{\pi}{2}$. Comme θT tend vers $+\infty$, 0 ou $-\infty$, lorsque T tend vers $+\infty$, selon que θ est strictement positif, nul ou strictement négatif, il vient (puisque $S(0) = 0$) pour tous x et y réels

$\lim\limits_{T\to+\infty} (R(x, T) - R(y, T))$ existe et est donnée par ce tableau

	$x < 0$	$x = 0$	$x > 0$
$y < 0$	0	π	2π
$y = 0$	$-\pi$	0	π
$y > 0$	-2π	$-\pi$	0 .

8) Puisque $h_{a,b}$ et φ_f sont continus sur $\mathbf{R}$, les intégrales considérées ont un sens.

Puisque S est une primitive d'une fonction prolongeable en une fonction continue sur $\mathbf{R}$, S est continu. Comme S est continu sur $\mathbf{R}$ et admet des limites en $\pm\infty$ (par imparité en T), S est borné sur $\mathbf{R}$. On note $M = \|S\|_\infty$, le supremum étant pris sur $\mathbf{R}$.

D'après 6), on en déduit que R est une fonction continue des deux variables et est borné sur $\mathbf{R}^2$ par M.

Pour y et T dans $\mathbf{R}$, on a

$$\int_{-T}^{T} h_{-y,0}(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-T}^{T} \frac{e^{ity} - 1}{it}\,\mathrm{d}t = \int_{-T}^{T} \frac{\sin(ty)}{t}\,\mathrm{d}t = R(y, T)$$

par imparité de la partie réelle de l'intégrande. Comme, pour x et t réels, on a

$$h_{a,b}(t)e^{itx} = h_{a-x,0}(t) - h_{b-x,0}(t)\,,$$

il vient

$$\int_{-T}^{T} h_{a,b}(t)e^{itx}\,\mathrm{d}t = R(x - a, T) - R(x - b, T)\;.$$

On note $g(T,x)$ la fonction définie sur $\mathbf{R}^2$ par $g(T,x) = R(x-a,T) - R(x-b,T)$. D'après les propriétés que l'on vient d'établir pour R, g est une fonction continue des deux variables et est borné sur $\mathbf{R}^2$ par M.
On montre maintenant que l'on peut intervertir les deux intégrations, i.e. pour T dans $\mathbf{R}$, on a

$$\int_{-T}^{T} h_{a,b}(t)\varphi_f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\mathbf{R}} f(x)\left(\int_{-T}^{T} h_{a,b}(t)e^{itx}\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x = \int_{\mathbf{R}} f(x)g(T,x)\,\mathrm{d}x\ .$$

Soit en effet Φ la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $\Phi(T) = \displaystyle\int_{-T}^{T} h_{a,b}(t)\varphi_f(t)\,\mathrm{d}t$. Autrement dit $\Phi(T) = F(T) - F(-T)$ où F est une primitive de la fonction continue $h_{a,b}\varphi_f$. Par conséquent Φ est nulle en 0, dérivable sur $\mathbf{R}$, de dérivée donnée par $\Phi'(t) = h_{a,b}(t)\varphi_f(t) + h_{a,b}(-t)\varphi_f(-t)$.
On considère maintenant la fonction Ψ donnée $\Psi(T) = \displaystyle\int_{\mathbf{R}} f(x)g(T,x)\,\mathrm{d}x$. D'après ce qui précède l'intégrande est une fonction continue en T et en x, majoré en valeur absolue par Mf. De plus, par définition de g comme intégrale, l'intégrande est dérivable par rapport à T, de dérivée donnée par $f(x)h_{a,b}(T)e^{iTx} + f(x)h_{a,b}(-T)e^{-iTx}$. Cette dérivée est donc une fonction continue de x et T, majorée en valeur absolue par $2(b-a)f$ d'après 4). Par conséquent l'intégrande et sa dérivée sont majorés en valeur absolue par une fonction indépendante de T, continue, positive et intégrable sur $\mathbf{R}$. Il résulte donc du théorème de continuité sous le signe somme et de la règle de Leibniz de dérivation sous le signe somme que Ψ est dérivable, de dérivée égale à Φ'. Comme $\Psi(0) = 0 = \Phi(0)$, il résulte du théorème de Leibniz-Newton, qu'on a $\Phi = \Psi$, et donc

$$\int_{-T}^{T} h_{a,b}(t)\varphi_f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\mathbf{R}} f(x)g(T,x)\,\mathrm{d}x\ .$$

Or, d'après 7), la fonction g admet une limite pour T tendant vers $+\infty$ et x fixé. On note g_∞ cette fonction définie sur $\mathbf{R}$. D'après 7), elle est égale à 2π sur $]a;b[$, et nulle en dehors de $[a;b]$, donc est continue par morceaux sur $\mathbf{R}$. Comme g est bornée par M, il en résulte que g_∞ l'est aussi, par passage à la limite. Par conséquent les fonctions $x \mapsto f(x)g(T,x)$, pour T réel, sont continues sur $\mathbf{R}$ et majorées en valeur absolue par Mf, la fonction $x \mapsto f(x)g_\infty(x)$, limite simple quand T tend vers $+\infty$ des fonctions précédentes, est continue par morceaux sur $\mathbf{R}$ et majorée en valeur absolue par Mf. Enfin Mf est une fonction positive, continue et intégrable sur $\mathbf{R}$. Il résulte alors du théorème de convergence dominée, dans le cas des intégrales à paramètre, qu'on a

$$\lim_{T\to+\infty} \int_{\mathbf{R}} f(x)g(T,x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbf{R}} f(x)g_\infty(x)\,\mathrm{d}x = 2\pi\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

et donc $\boxed{\displaystyle\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T} h_{a,b}(t)\varphi_f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.}$

9) Si deux fonctions f et g de E vérifient $\varphi_f = \varphi_g$, alors d'après ce qui précède, pour tous a et b tels que $a < b$, on a $\displaystyle\frac{1}{b-a}\int_a^b f = \frac{1}{b-a}\int_a^b g$ et donc, par continuité de f et g sur $\mathbf{R}$ et d'après le théorème fondamental du calcul différentiel et intégral, ou de Leibniz-Newton, on obtient en faisant tendre b vers a, $f(a) = g(a)$, i.e. $\boxed{f = g.}$

PARTIE III - La suite $a_k(f)$ ne caractérise pas toujours f

10) On récrit, pour $x > 0$, $f_0(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\dfrac{1}{2}\ln(x)(2+\ln(x))\right)$ et on en déduit, par continuité du logarithme sur $\mathbf{R}_+^*$ et de l'exponentielle sur $\mathbf{R}$, que f_0 est continu sur $\mathbf{R}_+^*$ et que sa limite à droite en 0 est nulle, par composition des limites puisque l'argument de l'exponentielle y tend vers $-\infty$. Comme f_0 est nulle sur $\mathbf{R}_-$, elle est continue sur $\mathbf{R}_-^*$ et de limite à gauche en 0 nulle également. Il en résulte que f est continu sur $\mathbf{R}$ et à valeurs positives, par positivité de 0 et de l'exponentielle.

Étant positive, on peut calculer l'intégrale de f_0 sur $\mathbf{R}$, quitte à ce qu'elle soit infinie, et on peut effectuer le changement de variable bijectif donné par le logarithme pour obtenir

$$\int_{\mathbf{R}} f_0 = \int_{\mathbf{R}_+^*} f_0 = \int_{\mathbf{R}} e^{-t^2/2}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{2\pi}} = 1$$

d'après la propriété admise, pour $\lambda = 0$. Il en résulte, par positivité de f_0, qu'elle est intégrable sur $\mathbf{R}$, d'intégrale 1 et donc $\boxed{f_0 \text{ est élément de } E.}$

11) Par positivité de l'intégrande et grâce au changement de variable précédent, on obtient

$$\int_{\mathbf{R}} |x|^k f_0(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbf{R}_+^*} x^k f_0(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbf{R}} e^{kt-t^2/2}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{2\pi}} = e^{k^2/2}$$

d'après la propriété admise, pour $\lambda = k$. Par conséquent $x \mapsto |x|^k f_0(x)$ est intégrable sur $\mathbf{R}$. Le calcul de $a_k(f_0)$ a en fait déjà été effectué puisque $x \mapsto x^k f_0(x)$ est une fonction positive. Il en résulte que $\boxed{f_0 \text{ admet des moments de tous ordres et, pour } k \text{ dans } \mathbf{N},\ a_k(f_0) = e^{k^2/2}.}$

12) L'énoncé est ambigü puisque le logarithme n'est pas défini sur $\mathbf{R}_-$ et il faut donc comprendre que f_a est nulle sur $\mathbf{R}_-$, tout comme f_0.

Soit a dans $[-1;1]$. Sur $\mathbf{R}_+^*$, par continuité du logarithme sur $\mathbf{R}_+^*$ et de sin sur $\mathbf{R}$, f_a est continu. De plus, sur $\mathbf{R}_+^*$, on a $(1-a)f_0 \leq f_a \leq (1+a)f_0$, puisque $|\sin|$ est majoré par 1 sur $\mathbf{R}$, et donc f_a est positif sur $\mathbf{R}_+^*$ et admet une limite nulle à droite en 0. On en conclut, comme pour f_0, que f_a est continu sur $\mathbf{R}$ et à valeurs positives.

Par positivité de l'intégrande et grâce au changement de variable précédent, on obtient

$$\int_{\mathbf{R}} f_a = \int_{\mathbf{R}_+^*} f_a = \int_{\mathbf{R}} e^{-t^2/2}(1+a\sin(2\pi t))\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{2\pi}} = 1 + a\frac{e^{(2i\pi)^2/2} - e^{(-2i\pi)^2/2}}{2i} = 1$$

d'après la propriété admise, pour $\lambda = 0$ et $\lambda = \pm 2i\pi$, et en décomposant le sinus grâce à la formule d'Euler. Il en résulte, par positivité de f_a, qu'elle est intégrable sur $\mathbf{R}$, d'intégrale 1 et donc $\boxed{f_a \text{ appartient à } E.}$

Pour k dans $\mathbf{N}$, par positivité de l'intégrande, il vient

$$\int_{\mathbf{R}} |x|^k f_a(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbf{R}_+^*} x^k f_a(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbf{R}} e^{kt-t^2/2}(1+a\sin(2\pi t))\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{2\pi}}$$

soit
$$\int_{\mathbf{R}} |x|^k f_a(x)\,\mathrm{d}x = e^{k^2/2} + a\frac{e^{(k+2i\pi)^2/2} - e^{(k-2i\pi)^2/2}}{2i} = a_k(f)$$
d'après la propriété admise, pour $\lambda = k$ et $\lambda = k \pm 2i\pi$, et donc, par positivité de f_a,
$\boxed{f_a \text{ admet des moments de tous ordres et } a_k(f_a) = a_k(f_0).}$
Par conséquent les moments ne caractérisent pas f, pour f dans E.

PARTIE IV - Une condition sur la suite $a_k(f)$

13) Soit k dans $\mathbf{N}$. Puisque f est positif, on peut considérer les fonctions g et h données par $g(x) = |x|^k \sqrt{f(x)}$ et $h(x) = |x|^{k+1}\sqrt{f(x)}$. Par produit et composition g et h sont continus et positifs sur $\mathbf{R}$. De plus, comme f admet des moments d'ordre $2k$ et $2k+2$, g et h sont de carrés intégrables sur $\mathbf{R}$. L'inégalité de Cauchy-Schwarz montre gh est intégrable, i.e. que f admet un moment d'ordre $2k+1$, ce que l'on savait déjà, et qu'on a $\left(\int_{\mathbf{R}} g(x)h(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 \leq \int_{\mathbf{R}} g(x)^2\,\mathrm{d}x \cdot \int_{\mathbf{R}} h(x)^2\,\mathrm{d}x$, soit $\boxed{(b_{2k+1}(f))^2 \leq a_{2k}(f)a_{2k+2}(f).}$

14) Si k est pair, on a $a_k(f) = b_k(f)$ puisqu'on travaille sur $\mathbf{R}$, et l'inégalité résulte de la définition de M puisque $M \leq 2M$. Pour k impair, il résulte de la question précédente qu'on a
$$b_k(f)^{1/k} \leq (a_{k-1}(f)a_{k+1}(f))^{1/2k} \leq \left((k-1)^{k-1}(k+1)^{k+1}\right)^{1/2k} M \leq (k+1)M$$
puisque $k-1 \leq k+1$. Et donc, a fortiori, puisque $k \geq 1$, $b_k(f)^{1/k} \leq 2kM$. Par conséquent, pour tout entier naturel k, $\boxed{\dfrac{b_k(f)^{1/k}}{k} \leq 2M.}$

15) Soit x h des réels, et n dans $\mathbf{N}^*$. On note I l'intervalle de bornes x et $x+h$. Il résulte de 1) que φ_f est de classe C^∞ sur $\mathbf{R}$. L'inégalité de Taylor-Lagrange entre x et $x+h$, et la formule pour les dérivées de φ_f obtenue en 1), permettent d'obtenir
$$\left|\varphi_f(x+h) - \sum_{m=0}^{n-1} \frac{h^m}{m!}\varphi_f^{(m)}(x)\right| \leq \frac{|h|^n}{n!} \sup_{t\in I} \left| i^n \int_{\mathbf{R}} e^{itu} u^n f(u)\,\mathrm{d}u\right|$$
et donc, par inégalité triangulaire $\boxed{\left|\varphi_f(x+h) - \sum_{m=0}^{n-1} \frac{h^m}{m!}\varphi_f^{(m)}(x)\right| \leq \frac{|h|^n}{n!} b_n(f).}$

16) Pour n dans $\mathbf{N}^*$ on a, d'après 14) et 5), $b_n(f) \leq (2nM)^n \leq (2eM)^n n!$ et donc, d'après ce qui précède, pour $|h| < \dfrac{1}{2eM}$, le reste de la série de Taylor de φ_f en $x+h$ tend vers 0, par comparaison à une série géométrique de raison strictement plus petite que 1, i.e.
$\boxed{\text{pour } A = \dfrac{1}{2eM}\text{, on a, pour tous } x \text{ et } h \text{ réels avec } |h| < A,\ \varphi_f(x+h) = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{h^m}{m!}\varphi_f^{(m)}(x).}$

17) Puisque les moments de f et g sont identiques, le réel fourni par la condition (U) pour g peut être choisi égal à M, ce que l'on fait. En appliquant ce qui précède à f et g, on conclut que φ_f et φ_g sont développables en série entière en tout point de $\mathbf{R}$ avec un rayon de convergence au moins égal à A.

Or on a, pour tout entier naturel n, $\varphi_f^{(n)}(0) = i^n a_n(f)$ d'après 1) et donc $\varphi_f^{(n)}(0) = \varphi_g^{(n)}(0)$. Puisqu'elles sont développables en série entière, on en déduit $\varphi_f = \varphi_g$ sur le disque ouvert de convergence, en particulier sur $]-A; A[$.

Or si φ_f et φ_g coïncident sur un intervalle ouvert, puisqu'elles sont développables en série entière au voisinage de tout point avec un rayon de convergence supérieur à A, leurs dérivées coïncident également sur cet intervalle ouvert. Et donc, pour tout x dans cet intervalle ouvert, par développement en série entière en x, φ_f et φ_g coïncident sur $]x - A; x + A[$. On en déduit que si φ_f et φ_g coïncident sur un intervalle $]a; b[$, elles coïncident aussi sur $]a - A; b + A[$. Une récurrence immédiate permet donc de conclure que, pour tout entier ℓ strictement positif, $\boxed{\varphi_f \text{ et } \varphi_g \text{ coïncident sur } \left[-\frac{\ell A}{2}; \frac{\ell A}{2}\right].}$

18) Il résulte de ce qui précède que si deux éléments f et g de E ont des moments de tous ordres et qu'ils sont égaux et vérifient la condition (U), alors φ_f et φ_g coïncident sur tout compact donc sur $\mathbf{R}$ et donc $f = g$ d'après 9). Autrement dit

une fonction qui admet des moments de tous ordres vérifiant la condition (U) est entièrement caractérisée par ses moments.

PARTIE V - Application

19) Si f est solution, elle vérifie alors, pour tout n dans $\mathbf{N}$, $a_{2n}(f) = \dfrac{(2n)!}{n!}\dfrac{1}{2^n}$. En particulier $a_{2n}(f) \leq \dfrac{(2n)^n}{2^n}$ puisque $(2n-1) \times \cdots \times 1 \leq (2n) \times \cdots \times (2n)$ et donc

$$\frac{a_{2n}(f)^{1/2n}}{2n} \leq \frac{\sqrt{n}}{2n} \leq \frac{1}{2}\,.$$

Il en résulte que f vérifie (U) et donc, d'après 16) que φ_f est développable en série entière en tout point. En particulier en 0, on obtient

$$\varphi_f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(2n)!} i^{2n} \frac{(2n)!}{n!}\frac{1}{2^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}\left(-\frac{x^2}{2}\right)^n$$

i.e. $\varphi_f(x) = e^{-x^2/2}$, dans un voisinage de 0.

La formule donnée par l'énoncé avec $\lambda = it$, suggère de considérer la fonction g définie par $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$. C'est une fonction continue et positive sur $\mathbf{R}$ par composition et positivité de l'exponentielle. Elle est intégrable, d'intégrale 1, par positivité et d'après la propriété admise pour $\lambda = 0$. Donc g appartient à E. Elle vérifie, pour x réel $\varphi_g(x) = e^{-x^2/2}$.

Par croissance comparée entre l'exponentielle et les polynômes, g admet des moments de tous ordres. Par parité, ses moments d'ordre impair sont nuls. Par intégration par parties, il vient, pour k dans $\mathbf{N}^*$,

$$a_{2k}(g) = \int_{\mathbf{R}} x^{2k-1} x e^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x = (2k-1)\int_{\mathbf{R}} x^{2k-2}e^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x = (2k-1)a_{2k-2}(g)$$

puisque $\lim\limits_{\pm\infty} x^{2k-1}e^{-x^2/2} = 0$. Et donc les moments de g vérifient le système d'équations voulu. On a déjà démontré qu'il en résulte que g vérifie (U) et donc, d'après 18), g est l'unique fonction vérifiant ce système d'équations. Autrement dit

$$\boxed{\text{l'unique solution est la gaussienne centrée réduite } x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}.}$$

Remarque : on parle aussi de distribution maxwellienne.

On peut toutefois mettre en place la stratégie de la partie II pour retrouver f à partir de φ_f. Puisque l'intégrale est convergente, il s'agit de calculer $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{\mathbf{R}} h_{a,b}\varphi_f$, i.e. $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{\mathbf{R}} h_{a,b}(t)e^{-t^2/2}\mathrm{d}t$. Or $h_{a,b}$ est développable en série entière avec un rayon de convergence infini, et on a

$$h_{a,b}(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b^n - a^n}{n!}(-it)^{n-1}\ .$$

Cette série de fonctions admet des sommes partielles majorées en valeur absolue par la somme de la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|b|^n + |a|^n}{n!}|t|^{n-1}$, i.e. par $\dfrac{e^{|at|} - 1 + e^{|bt|} - 1}{|t|}$. Cette fonction est continue et son produit par φ_f est intégrable sur $\mathbf{R}$. Il résulte du théorème de convergence dominée qu'on peut intervertir série et intégrale et il vient

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbf{R}} h_{a,b}\varphi_f = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-i)^{n-1}(b^n - a^n)}{n!}a_{n-1}(\varphi_f)\ .$$

On doit alors calculer les moments de φ_f, ce qu'on a déjà fait à l'exception de celui d'ordre 0 qui vaut $\sqrt{2\pi}$ d'après la formule de l'énoncé, et il vient

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbf{R}} h_{a,b}\varphi_f &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-i)^{2n}(b^{2n+1} - a^{2n+1})}{(2n+1)!}\frac{(2n)!}{2^n n!} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}\left(\frac{-1}{2}\right)^n \frac{b^{2n+1} - a^{2n+1}}{2n+1} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}\left(\frac{-1}{2}\right)^n \int_a^b x^{2n}\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

et, par convergence normale sur le segment $[a;b]$, il vient

$$\int_a^b f = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbf{R}} h_{a,b}\varphi_f = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{-x^2}{2}\right)^n \mathrm{d}x = \int_a^b e^{-x^2/2}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2\pi}}$$

d'où $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$.