Deuxième composition de mathématiques
Mines-Ponts 2009 – MP

On désigne par $C([0;1])$ l'espace vectoriel des fonctions réelles continues sur $[0;1]$. Pour λ dans $\mathbf{R}_+$, on note φ_λ l'élément de $C([0;1])$ défini par $\varphi_\lambda(x) = x^\lambda$. Par convention φ_0 est constante égale à 1. Soit $(\lambda_k)_{k\in\mathbf{N}}$ une suite de réels positifs ou nuls deux à deux distincts. On note W le sous-espace vectoriel de $C([0;1])$ engendré la famille $(\varphi_{\lambda_k})_{k\in\mathbf{N}}$. Le but du problème est d'établir des critères de densité de l'espace W dans $C([0;1])$ pour l'une ou l'autre des deux normes classiques N_∞ ou N_2 définies par : $N_\infty(f) = \sup_{x\in[0;1]} |f(x)|$ et $N_2(f) = \left(\int_0^1 |f(x)|^2 \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}$.

On admettra le théorème suivant (dû à Karl Weierstrass) : pour toute fonction f dans $C([0;1])$, il existe une suite $(P_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de fonctions polynomiales sur $[0;1]$ telle que $N_\infty(f - P_n)$ tende vers 0, i.e. $\lim_n P_n = f$ pour la norme N_∞.

Question préliminaire

1. Démontrer que $(\varphi_\lambda)_{\lambda\geq 0}$ est une famille libre de $C([0;1])$.

A - Déterminants de Cauchy

On considère un entier $n > 0$ et deux suites finies $(a_k)_{1\leq k\leq n}$ et $(b_k)_{1\leq k\leq n}$ de réels telles que $a_i + b_j \neq 0$ pour tous i et j dans $\{1, 2, \ldots, n\}$. On définit la fraction rationnelle : $R = \dfrac{\prod_{k=1}^{n-1}(X - a_k)}{\prod_{k=1}^{n}(X + b_k)}$

et, pour tout entier m tel que $0 < m \leq n$, le déterminant de Cauchy d'ordre m :

$$D_m = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{a_1+b_1} & \dfrac{1}{a_1+b_2} & \cdots & \dfrac{1}{a_1+b_m} \\ \dfrac{1}{a_2+b_1} & \dfrac{1}{a_2+b_2} & \cdots & \dfrac{1}{a_2+b_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{1}{a_m+b_1} & \dfrac{1}{a_m+b_2} & \cdots & \dfrac{1}{a_m+b_m} \end{vmatrix}.$$

2. Démontrer que si R est de la forme $R = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{A_k}{X + b_k}$, alors on a $A_n D_n = R(a_n) D_{n-1}$.

   On pourra pour cela considérer le déterminant obtenu à partir de D_n en remplaçant la dernière colonne par $\begin{pmatrix} R(a_1) \\ R(a_2) \\ \vdots \\ R(a_n) \end{pmatrix}$.

3. En déduire $D_n = \dfrac{\prod_{1\leq i<j\leq n}(a_j - a_i)(b_j - b_i)}{\prod_{1\leq i,j\leq n}(a_i + b_j)}$.

B - Distance d'un point à une partie dans un espace normé

Soit E un espace vectoriel normé par une norme $\|\cdot\|$. On rappelle que la distance d'un élément $x \in E$ à une partie non vide A de E est le réel noté $d(x, A)$ défini par : $d(x, A) = \inf_{y \in A} \|x - y\|$.

4. Démontrer que $d(x, A) = 0$ si et seulement si x est adhérent à A.
5. Soit $(A_n)_{n \geq 0}$ une suite croissante de parties de E. Démontrer $d(x, \lim \uparrow A_n) = \lim_n d(x, A_n)$.

On note $B = \{y \in E \mid \|y - x\| \leq \|x\|\}$ et on considère un sous-espace vectoriel V de dimension finie de E.

6. Démontrer que $B \cap V$ est compacte et qu'on a $d(x, V) = d(x, B \cap V)$ pour tout $x \in E$.
7. En déduire que pour tout x dans E, il existe un élément y dans V tel que $d(x, V) = \|x - y\|$.

C - Distance d'un point à un sous-espace de dimension finie dans un espace préhilbertien

Dans cette partie, on suppose que la norme sur l'espace vectoriel E est définie à partir d'un produit scalaire $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ sur E : $\|x\| = \sqrt{\langle x \mid x \rangle}$.
Soit V un sous-espace vectoriel de dimension finie de E. On rappelle que, pour tout x dans E, il existe un unique vecteur y de V tel que $x - y$ soit orthogonal à V, i.e. pour z dans V, $\langle x - y \mid z \rangle = 0$. Ce vecteur est appelé projection orthogonale de x sur V.

8. Démontrer que si V est un sous-espace vectoriel de dimension finie de E, alors pour tout $x \in E$, la projection orthogonale de x sur V est l'unique élément $y \in V$ vérifiant $d(x, V) = \|x - y\|$.

Pour toute suite finie $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in E^n$, on désigne par $G(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ le déterminant de la matrice de Gram d'ordre n définie par :

$$M(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{pmatrix} \langle x_1 \mid x_1 \rangle & \langle x_1 \mid x_2 \rangle & \cdots & \langle x_1 \mid x_n \rangle \\ \langle x_2 \mid x_1 \rangle & \langle x_2 \mid x_2 \rangle & \cdots & \langle x_2 \mid x_n \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle x_n \mid x_1 \rangle & \langle x_n \mid x_2 \rangle & \cdots & \langle x_n \mid x_n \rangle \end{pmatrix}$$

9. Démontrer qu'on a $G(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$ si et seulement si la famille $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est liée.
10. On suppose que la famille $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est libre et l'on désigne par V l'espace vectoriel qu'elle engendre. Démontrer, pour tout x dans E, $d(x, V)^2 = \dfrac{G(x_1, x_2, \ldots, x_n, x)}{G(x_1, x_2, \ldots, x_n)}$.

D - Comparaison des normes N_∞ et N_2

Pour toute partie A de $C([0; 1])$, on note $\overline{A}^\infty$ et $\overline{A}^2$ les adhérences de A pour les normes N_∞ et N_2, respectivement. Pour $f \in C([0; 1])$, la notation $d(f, A)$ désigne toujours la distance de f à A relativement à la norme N_2 (on ne considérera jamais, dans l'énoncé, la distance d'un élément à une partie relativement à la norme N_∞).

11. Démontrer que pour tout f dans $C([0; 1])$, on a $N_2(f) \leq N_\infty(f)$. En déduire que pour toute partie A de $C([0; 1])$ on a $\overline{A}^\infty \subset \overline{A}^2$.

On considère l'ensemble V_0 donné par $V_0 = \{f \in C([0; 1]) \mid f(0) = 0\}$.

12. Démontrer $\varphi_0 \in \overline{V_0}^2$. (On rappelle que φ_0 désigne la fonction constante 1.)
13. En déduire que V_0 est dense dans $C([0;1])$ pour la norme N_2, mais n'est pas dense pour la norme N_∞.
14. Démontrer que si V est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel normé, alors son adhérence $\overline{V}$ est également un espace vectoriel.
15. Démontrer qu'un sous-espace vectoriel V de $C([0;1])$ est dense pour la norme N_∞ si et seulement si pour tout entier naturel m, $\varphi_m \in \overline{V}^\infty$.
16. En déduire qu'un sous-espace vectoriel V de $C([0;1])$ est dense pour la norme N_2 si et seulement si pour tout entier naturel m, $\varphi_m \in \overline{V}^2$.

E - Un critère de densité de W pour la norme N_2

Pour tout n dans $\mathbf{N}$, on note W_n l'espace vectoriel engendré par la famille finie $(\varphi_{\lambda_k})_{0\leq k\leq n}$.

17. Démontrer que l'espace W est dense dans $C([0;1])$ pour la norme N_2 si et seulement si, pour tout entier naturel μ, $\lim\limits_{n} d(\varphi_\mu, W_n) = 0$.
18. Démontrer que pour tout μ dans $\mathbf{R}_+$, $d(\varphi_\mu, W_n) = \dfrac{1}{\sqrt{2\mu+1}} \displaystyle\prod_{k=0}^{n} \dfrac{|\lambda_k - \mu|}{\lambda_k + \mu + 1}$.
19. Démontrer que pour tout μ dans $\mathbf{R}_+$ la suite $\left(\dfrac{|\lambda_k - \mu|}{\lambda_k + \mu + 1}\right)_{k\in\mathbf{N}}$ tend vers 1 si et seulement si la suite $(\lambda_k)_{k\in\mathbf{N}}$ tend vers $+\infty$.
(On pourra pour cela étudier les variations de la fonction $x \in [0;\mu] \mapsto \dfrac{\mu - x}{x+\mu+1}$.)
20. En déduire que l'espace W est dense dans $C([0;1])$ pour la norme N_2 si et seulement si la série $\sum \dfrac{1}{\lambda_k}$ est divergente.

F - Un critère de densité de W pour la norme N_∞

21. Démontrer que si W est dense dans $C([0;1])$ pour la norme N_∞, alors $\sum \dfrac{1}{\lambda_k}$ est divergente.
22. Soit ψ dans W_n. On note $\psi = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k \varphi_{\lambda_k}$. Démontrer que si on a $\lambda_k \geq 1$ pour tout k dans $[\![0;n]\!]$, alors pour $\mu \geq 1$, on a : $N_\infty(\varphi_\mu - \psi) \leq N_2\left(\mu\varphi_{\mu-1} - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k \lambda_k \varphi_{\lambda_k - 1}\right)$.
23. On suppose que la suite $(\lambda_k)_{k\in\mathbf{N}}$ vérifie les deux conditions suivantes :
$$\begin{cases} (i) \ : \quad \lambda_0 = 0 \\ (ii) \ : \quad \lambda_k \geq 1 \text{ pour tout } k \geq 1 \,. \end{cases}$$
Démontrer que sous ces conditions, si la série $\sum \dfrac{1}{\lambda_k}$ est divergente, alors W est dense dans $C([0;1])$ pour la norme N_∞.
24. Démontrer que la conclusion précédente est encore valable si on remplace la condition (ii) par la condition plus faible :
$$(ii)' \ : \quad \inf_{k\geq 1} \lambda_k > 0 \,.$$

DEUXIÈME COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES – MINES-PONTS 2009 – MP

Question préliminaire

1. Soit $\sum\limits_{\lambda\geq 0} a_\lambda\varphi_\lambda = 0$ une relation de dépendance linéaire entre les éléments de la famille $(\varphi_\lambda)_{\lambda\geq 0}$, avec $(a_\lambda)_{\lambda\geq 0}$ une famille presque nulle de réels. On note I l'ensemble fini des indices λ tels que $a_\lambda \neq 0$. Si I est non vide on pose $n = \text{Card}(I)$ et $I = \{\lambda_k \,|\, 1 \leq k \leq n\}$. Comme les fonctions φ_λ sont de classe C^∞ sur $]0;1]$, on peut dériver la relation de dépendance linéaire et la multiplier par l'identité. On obtient alors $\sum\limits_{\lambda\geq 0} a_\lambda\lambda\varphi_\lambda = 0$ et on peut itérer le raisonnement.

   En particulier pour $0 \leq p \leq n-1$, il vient $\sum\limits_{k=1}^{n} a_{\lambda_k}\lambda_k^p\varphi_\lambda = 0$, en évaluant les relations obtenues en 1. Le déterminant de VANDERMONDE des $(\lambda_k)_{1\leq k\leq n-1}$ étant non nul par hypothèse, on en déduit que tous les a_k sont nuls. Cette contradiction assure que I est vide et donc $\boxed{\text{la famille } (\varphi_\lambda)_{\lambda\geq 0} \text{ est une famille libre de } C([0;1]).}$

   Remarque : la famille $(\varphi_\lambda)_{\lambda\geq 0}$ est une famille de vecteurs propres pour des valeurs propres distinctes de l'endomorphisme de $C^\infty(]0;1])$ défini par $y \mapsto xy'$. Ils forment donc une famille libre.

A - Déterminants de CAUCHY

2. On dispose de $(A_k)_{1\leq k\leq n}$ tel que $R = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{A_k}{X+b_k}$.

   On a
$$D_n = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{a_1+b_1} & \dfrac{1}{a_1+b_2} & \cdots & \dfrac{1}{a_1+b_n} \\ \dfrac{1}{a_2+b_1} & \dfrac{1}{a_2+b_2} & \cdots & \dfrac{1}{a_2+b_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{1}{a_n+b_1} & \dfrac{1}{a_n+b_2} & \cdots & \dfrac{1}{a_n+b_n} \end{vmatrix}$$
   et donc, par multilinéarité du déterminant,
$$A_nD_n = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{a_1+b_1} & \dfrac{1}{a_1+b_2} & \cdots & \dfrac{A_n}{a_1+b_n} \\ \dfrac{1}{a_2+b_1} & \dfrac{1}{a_2+b_2} & \cdots & \dfrac{A_n}{a_2+b_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{1}{a_n+b_1} & \dfrac{1}{a_n+b_2} & \cdots & \dfrac{A_n}{a_n+b_n} \end{vmatrix}.$$

   En rajoutant la combinaison linéaire des $n-1$ premières colonnes obtenue en les multipliant respectivement par A_1, …, A_{n-1}, on obtient

$$A_nD_n = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{a_1+b_1} & \dfrac{1}{a_1+b_2} & \cdots & R(a_1) \\ \dfrac{1}{a_2+b_1} & \dfrac{1}{a_2+b_2} & \cdots & R(a_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{1}{a_n+b_1} & \dfrac{1}{a_n+b_2} & \cdots & R(a_n) \end{vmatrix}.$$

Or $R(a_1) = \cdots = R(a_{n-1}) = 0$ par définition de R et donc, en développant par rapport à la dernière colonne, il vient $\boxed{A_nD_n = R(a_n)D_{n-1}.}$

3. Si la famille des $(a_k)_{1\leq k\leq n}$ n'est pas formée de réels tous distincts, alors deux lignes de la matrice définissant D_n sont égales et donc $D_n = 0$. De même si tous les $(b_k)_{1\leq k\leq n}$ ne sont pas tous distincts, on a affaire à deux colonnes égales et donc $D_n = 0$. Dans ces deux cas la formule demandée est vraie. On suppose maintenant qu'on n'est pas dans ces cas.
On va démontrer le prédicat $(\mathbf{H}_m)$ par récurrence sur l'entier m dans $[\![1;n]\!]$:

$$(\mathbf{H}_m) \ : \quad D_m = \frac{\displaystyle\prod_{1\leq i<j\leq m}(a_j-a_i)(b_j-b_i)}{\displaystyle\prod_{1\leq i,j\leq m}(a_i+b_j)}.$$

Pour $m = 1$, le numérateur est, par convention, égal à 1, et on a bien $D_1 = \dfrac{1}{a_1+b_1}$.
Soit m dans $[\![1;n-1]\!]$ tel que $(\mathbf{H}_m)$ soit vrai. On applique ce qui précède en prenant pour n l'entier $m+1$. Alors R est une fraction rationnelle de degré strictement négatif à pôles simples, et donc sa décomposition en éléments simples est de la forme décrite dans la question précédente, i.e. on dispose de $(A_k)_{1\leq k\leq m+1}$ dans $\mathbf{R}^{m+1}$ tel que

$$\frac{\prod_{k=1}^{m}(X-a_k)}{\prod_{k=1}^{m+1}(X+b_k)} = \sum_{k=1}^{m+1}\frac{A_k}{X+b_k}.$$

En multipliant l'égalité précédente par $X + b_{m+1}$ et en évaluant en $-b_{m+1}$, il vient

$$A_{m+1} = \frac{\prod_{k=1}^{m}(-b_{m+1}-a_k)}{\prod_{k=1}^{m}(-b_{m+1}+b_k)}.$$

Cette dernière quantité est donc non nulle et il vient

$$D_{m+1} = \frac{R(a_{m+1})D_m}{A_{m+1}} = \frac{\displaystyle\prod_{1\leq i<j\leq m+1}(a_j-a_i)(b_j-b_i)}{\displaystyle\prod_{1\leq i,j\leq m+1}(a_i+b_j)}$$

D'après le principe de récurrence, on en conclut que $(\mathbf{H}_n)$ est vraie, i.e.

$$\boxed{D_n = \frac{\displaystyle\prod_{1\leq i<j\leq n} (a_j - a_i)(b_j - b_i)}{\displaystyle\prod_{1\leq i,j\leq n} (a_i + b_j)}.}$$

B - Distance d'un point à une partie dans un espace normé

4. Soit x dans E. Alors la distance $d(x, A)$ est nulle si et seulement s'il existe une suite (a_n) de points de A tels que $d(x, a_n) \to 0$, par définition de l'infimum. Cette dernière condition exprime que x est limite de points de A, i.e. qu'il est adhérent à A. On a donc $\boxed{d(x, A) = 0 \text{ si et seulement si } x \text{ est adhérent à } A.}$
5. Soit $(A_n)_{n\geq 0}$ une suite croissante de parties de E de réunion égale à A et x dans E. Par croissance de (A_n), la suite $(d(x, A_n))$ est décroissante et par inclusion de A_n dans A, cette suite de distances est minorée par $d(x, A)$. Par conséquent elle converge vers son infimum.

   Soit maintenant d un réel tel que $d > d(x, A)$. Par définition, il existe donc a dans A tel que $d(x, a) < d$ et donc on dispose de n dans $\mathbf{N}$ tel que $a \in A_n$ et donc $d(x, A_n) < d$. Il en résulte que d n'est pas un minorant de la suite $(d(x, A_n))$. Par conséquent $d(x, A)$ est le plus grand des minorants de la suite $(d(x, A_n))$, donc son infimum et donc sa limite, i.e. $\boxed{d(x, \lim\uparrow A_n) = \lim_n d(x, A_n).}$
6. Puisque B est une boule fermée, B est fermée et bornée. Comme V est de dimension finie, il est fermé et donc $B \cap V$ est compact en tant que fermé, car intersection de deux fermés, et borné, car inclus dans un borné, dans un espace de dimension finie : $\boxed{B \cap V \text{ est compact.}}$

   Puisque $B \cap V \subset V$, on a $d(x, V) \leq d(x, B \cap V)$. Puisque $B \cap V$ contient 0, $d(x, B \cap V) \leq d(x, 0) = \|x\|$. Si $d(x, V) = \|x\|$, alors a égalité dans toutes ces inégalités et donc $d(x, V) = d(x, B \cap V)$.

   Sinon, soit (x_n) une suite de points de V telle que $d(x, x_n)$ converge vers $d(x, V)$ avec $d(x, V) < \|x\|$. On en déduit qu'à partir d'un certain rang la suite (x_n) est à valeurs dans $B \cap V$ et donc, à partir de ce rang, $d(x, B \cap V) \leq d(x, x_n)$. En passant à la limite on en déduit $d(x, B \cap V) \leq d(x, V)$ et, finalement, $\boxed{d(x, V) = d(x, B \cap V).}$
7. Comme $B\cap V$ est compact, l'application $y \mapsto d(x, y)$, définie sur $B\cap V$, atteint son minimum, i.e. $d(x, B \cap V)$ est atteinte. D'après la question précédente il en va de même pour $d(x, V)$: $\boxed{\text{il existe } y \text{ dans } V \text{ tel que } d(x, V) = \|x - y\|.}$

C - Distance d'un point à un sous-espace de dimension finie dans un espace préhilbertien.

8. Soit V un sous-espace vectoriel de dimension finie de E, x dans E et y la projection orthogonale de x sur V. Soit enfin z dans V. D'après le théorème de Pythagore, on a $\|x - z\|^2 = \|x - y\|^2 + \|y - z\|^2$ et donc $d(x, y) \leq d(x, z)$ avec égalité si et seulement si $y = z$: $\boxed{\text{la projection orthogonale de } x \text{ sur } V \text{ est l'unique élément } y \text{ de } V \text{ tel que } d(x, V) = \|x - y\|.}$

9. Soit $(\lambda_i)_{1\leq i\leq n}$ des scalaires et C la combinaison linéaire correspondante des colonnes $(C_i)_{1\leq i\leq n}$ de $M(x_1,\ldots,x_n)$: $C=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i C_i$. Si une telle combinaison linéaire est nulle alors le vecteur $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i$ est orthogonal à x_1, …, x_n et donc aussi à lui-même, par linéarité du produit scalaire. Ce vecteur est donc nul. Réciproquement toute relation de dépendance linéaire pour la famille $(x_i)_{1\leq i\leq n}$ fournit une relation de dépendance linéaire des colonnes $(C_i)_{1\leq i\leq n}$. Il en résulte que le rang de $M(x_1,\cdots,x_n)$ est n si et seulement si le rang de $(x_1,\cdots,x_n)$ est n, i.e. par contraposée

$\boxed{G(x_1,x_2,\ldots,x_n)=0 \text{ si et seulement si la famille } (x_1,x_2,\ldots,x_n) \text{ est liée.}}$

10. Soit x dans E, y la projection orthogonale de x sur V et $(\lambda_i)_{1\leq i\leq n}$ une famille de scalaires telle que $y=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i$. En retranchant la combinaison linéaire $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i C_i$ de la dernière colonne de $M(x_1,\cdots,x_n,x)$, on obtient

$$G(x_1,\cdots,x_n,x)=\begin{vmatrix}\langle x_1\,|\,x_1\rangle & \langle x_1\,|\,x_2\rangle & \cdots & \langle x_1\,|\,x_n\rangle & \langle x_1\,|\,x-y\rangle\\ \langle x_2\,|\,x_1\rangle & \langle x_2\,|\,x_2\rangle & \cdots & \langle x_2\,|\,x_n\rangle & \langle x_2\,|\,x-y\rangle\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ \langle x_n\,|\,x_1\rangle & \langle x_n\,|\,x_2\rangle & \cdots & \langle x_n\,|\,x_n\rangle & \langle x_n\,|\,x-y\rangle\\ \langle x\,|\,x_1\rangle & \langle x\,|\,x_2\rangle & \cdots & \langle x\,|\,x_n\rangle & \langle x\,|\,x-y\rangle\end{vmatrix}.$$

La dernière colonne est identiquement nulle à l'exception du dernier terme qui vaut $\langle x\,|\,x-y\rangle$ ou encore $\langle x-y+y\,|\,x-y\rangle$, soit $\langle x-y\,|\,x-y\rangle$ par orthogonalité de $x-y$ avec y. Il vient donc, en développant par rapport à la dernière colonne, $G(x_1,\cdots,x_n,x)=\|x-y\|^2\,G(x_1,\cdots,x_n)$. D'où, puisque $d(x,V)=\|x-y\|$, $\boxed{d(x,V)^2=\dfrac{G(x_1,x_2,\ldots,x_n,x)}{G(x_1,x_2,\ldots,x_n)}.}$

D - Comparaison des normes N_∞ et N_2

11. Soit f dans $C([0;1])$. Comme f est continue et $[0;1]$ compact, $N_\infty(f)$ est bien définie et est un majorant de $|f|$ sur $[0;1]$. Comme f est continue, $|f|^2$ aussi et $N_2(f)$ est également bien défini. De plus $|f|^2$ étant majoré par $N_\infty(f)^2$, l'inégalité de la moyenne donne $\boxed{N_2(f)\leq N_\infty(f).}$
Il en résulte que l'identité est une application linéaire continue, car 1-Lipschitzienne, de $C([0;1])$ muni de N_∞ dans $C([0;1])$ muni de N_2. Par conséquent si une suite de $C([0;1])$ converge pour N_∞, son image par l'identité converge pour N_2 vers l'image de la limite par l'identité, i.e. vers la même limite. On en conclut que si x appartient à $\overline{A}^\infty$, il est limite de points de A pour N_∞, donc pour N_2 et est donc dans $\overline{A}^2$, i.e. $\boxed{\overline{A}^\infty\subset\overline{A}^2.}$

12. On considère, pour n dans $\mathbf{N}$ la fonction f_n affine par morceaux valant 0 en 0, 1 en 2^{-n} et constante sur $[2^{-n},1]$. Cette une fonction continue puisqu'affine par morceaux et continue en ses changements de pente. Comme $f_n(0)=0$, on a $f_n\in V_0$.

De plus $|f_n - \varphi_0|$ est nulle sur $[2^{-n}; 1]$ et majorée par 1 sur $[0; 2^{-n}]$. L'inégalité de la moyenne entraîne donc $N_2(f_n - \varphi_0) \leq (2^{-n})^{1/2}$ et ainsi $f_n \to \varphi_0$ pour la norme N_2. Par conséquent $\boxed{\varphi_0 \in \overline{V_0}^2.}$

13. Soit f dans $C([0;1])$. On a $f = (f - f(0)\varphi_0) + f(0)\varphi_0$. Si f_n est une suite de points de V_0 tendant vers φ_0, par linéarité de la limite, la suite $f - f(0)\varphi_0 + f(0)f_n$ converge vers f. Comme c'est une suite de points de V_0, il en résulte $f \in \overline{V_0}^2$ et donc

$\boxed{V_0 \text{ est dense dans } C([0;1]) \text{ pour } N_2.}$

Soit maintenant (f_n) une suite de points de V_0 tendant vers φ_0 pour N_∞. À partir d'un certain rang, on a $N_\infty(f_n - \varphi_0) < 1$ et en particulier $|f_n(0) - \varphi_0(0)| < 1$, ce qui est contradictoire avec $f_n \in V_0$ et $\varphi_0(0) = 1$. Donc φ_0 n'est pas dans l'adhérence de V_0 pour N_∞ et donc

$\boxed{V_0 \text{ n'est pas dense dans } C([0;1]) \text{ pour } N_\infty.}$

14. Soit V un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel normé. Son adhérence contient V et n'est donc pas vide. Elle est stable par combinaison linéaire par linéarité de la limite et donc

$\boxed{\overline{V} \text{ est un espace vectoriel.}}$

15. Soit V un sous-espace vectoriel de $C([0;1])$. Si V est dense dans $C([0;1])$ pour N_∞, son adhérence contient tous les φ_m pour tout entier naturel m. Réciproquement si tel est le cas, l'adhérence de V pour N_∞ contient donc toutes les fonctions polynomiales et donc l'adhérence de cet ensemble, i.e. tout $C([0;1])$ d'après le théorème de Weierstrass, i.e.

$\boxed{V \text{ est dense dans } C([0;1]) \text{ pour } N_\infty \text{ si et seulement si, pour tout entier naturel } m,\ \varphi_m \in \overline{V}^\infty.}$

16. Comme précédemment, la condition est nécessaire. Si la condition est remplie, $\overline{V}^2$ est un espace vectoriel, d'après la question 14, contenant les φ_m pour m dans $\mathbf{N}$ et est donc dense dans $C([0;1])$ pour N_∞, d'après la question 15, et donc aussi pour N_2 d'après la question 11. Mais l'adhérence $\overline{V}^2$ étant fermée (pour N_2), cela veut dire qu'on a $\overline{V}^2 = C([0;1])$. D'où

$\boxed{V \text{ est dense dans } C([0;1]) \text{ pour } N_2 \text{ si et seulement si, pour tout entier naturel } m,\ \varphi_m \in \overline{V}^2.}$

E - Un critère de densité de W pour la norme N_2

17. D'après la question 16, W est dense pour N_2 si et seulement son adhérence pour N_2 contient les φ_μ pour μ dans $\mathbf{N}$. D'après la question 4, cela équivaut à $d(\varphi_\mu, W) = 0$ et donc aussi, d'après la question 5 et le fait que W est réunion croissante des W_n, à $\lim_n d(\varphi_\mu, W_n) = 0$, i.e.

$\boxed{\text{l'espace } W \text{ est dense dans } C([0;1]) \text{ pour la norme } N_2 \text{ si et seulement si } \lim_n d(\varphi_\mu, W_n) = 0 \text{ pour tout entier } \mu \geq 0.}$

18. On a $W_n = \mathrm{V}ect\,(\varphi_{\lambda_0}, \cdots, \varphi_{\lambda_n})$ et cette famille est libre, d'après la question 1. Or la norme N_2 dérive d'un produit scalaire et W_n est de dimension finie. La distance cherchée est donc donnée par la formule obtenue en question 10.

Pour λ et μ dans $\mathbf{R}_+$, on a

$$\langle \varphi_\lambda \,|\, \varphi_\mu \rangle = \int_0^1 t^{\lambda+\mu}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\lambda+\mu+1}$$

et on en déduit que les matrices de GRAM apparaissant dans la formule de la question 10 sont des déterminants de CAUCHY (de tailles $n+2$ et $n+1$) obtenus pour $a_{i+1} = \lambda_i + 1$ et $b_{i+1} = \lambda_i$, pour $0 \leq i \leq n$, et $a_{n+2} = \mu + 1$ et $b_{n+2} = \mu$. La formule de la question 3 donne directement

$$d(\varphi_\mu, W_n)^2 = \frac{\prod_{k=0}^n (\mu-\lambda_k)^2}{(2\mu+1)\prod_{k=0}^n (\lambda_k+\mu+1)^2}$$

et donc, par positivité des λ_k et de μ, $\boxed{d(\varphi_\mu, W_n) = \dfrac{1}{\sqrt{2\mu+1}} \displaystyle\prod_{k=0}^n \frac{|\lambda_k-\mu|}{\lambda_k+\mu+1}}$

19. Si la suite (λ_k) tend vers $+\infty$, alors $|\lambda_k - \mu| = \lambda_k - \mu$ à partir d'un certain rang et donc $\dfrac{|\mu-\lambda_k|}{\mu+\lambda_k+1} \sim 1$.

Réciproquement, supposons que la suite $\dfrac{|\mu-\lambda_k|}{\mu+\lambda_k+1}$ tende vers 1. Si la suite (λ_k) ne diverge pas vers l'infini, elle admet une sous-suite bornée et donc aussi une valeur d'adhérence d'après le théorème de BOLZANO-WEIERSTRASS. Si λ est cette valeur d'adhérence, par continuité de la fonction $x \mapsto \dfrac{|\mu-x|}{\mu+x+1}$ sur $\mathbf{R}_+$ (ce qui est le cas puisque que c'est la composée de la valeur absolue avec une fraction rationnelle sans pôle sur $\mathbf{R}_+$), on a $|\lambda-\mu| = \lambda+\mu+1$. Mais, par inégalité triangulaire, on a $|\lambda-\mu| \leq \lambda+\mu < \lambda+\mu+1$ et cette contradiction assure que la suite (λ_k) diverge vers $+\infty$.

$$\boxed{\text{la suite } \left(\frac{|\lambda_k-\mu|}{\lambda_k+\mu+1}\right)_{k\in\mathbf{N}} \text{ tend vers 1 si et seulement si la suite } (\lambda_k)_{k\in\mathbf{N}} \text{ tend vers } +\infty.}$$

20. Montrons que la condition est nécessaire. On écrit la condition de la question 18 pour $\mu = 0$. On a donc

$$d(\varphi_0, W_n) = \prod_{k=0}^n \frac{\lambda_k}{\lambda_k+1} = \prod_{k=0}^n \left(1+\frac{1}{\lambda_k}\right)^{-1}.$$

Cette distance tend vers 0 si et seulement si le logarithme de son inverse tend vers $+\infty$, i.e. si et seulement si la série $\sum \ln\left(1+\dfrac{1}{\lambda_k}\right)$ diverge vers $+\infty$.

Si (λ_k) ne diverge pas vers $+\infty$, cette série est grossièrement divergente. Sinon, comme c'est une série à termes positifs dont le terme général est équivalent à celui de la série $\sum \dfrac{1}{\lambda_k}$, ces deux séries sont de même nature et donc si $d(\varphi_0, W_n)$ tend vers 0, alors $\sum \dfrac{1}{\lambda_k}$ diverge.

Réciproquement, soit μ dans $\mathbf{N}$.

Si (λ_k) ne diverge pas vers $+\infty$, d'après la question 19, $\ln(d(\varphi_\mu, W_n))$ est une série grossièrement divergente, à termes négatifs, donc $d(\varphi_\mu, W_n)$ converge vers 0 et, d'après la question 17, W est dense dans $C([0;1])$.

Supposons maintenant que la suite (λ_k) diverge vers $+\infty$ et que la série $\sum \frac{1}{\lambda_k}$ diverge. Comme elle est à termes positifs, elle diverge vers $+\infty$. Pour $\lambda_k \geq \mu$, on a

$$-\ln\left(\frac{|\lambda_k-\mu|}{\lambda_k+\mu+1}\right) = \ln\left(\frac{\lambda_k+\mu+1}{\lambda_k-\mu}\right) = \ln\left(1+\frac{2\mu+1}{\lambda_k-\mu}\right)$$

et donc, en reprenant l'argument précédent à l'envers, $-\ln(d(\varphi_\mu, W_n))$ est une série à termes positifs de même nature que $\sum \frac{2\mu+1}{\lambda_k-\mu}$ (cette série étant définie à partir d'un certain rang seulement, a priori).

Comme (λ_k) diverge vers $+\infty$, $\frac{1}{\lambda_k-\mu} \sim \frac{1}{\lambda_k}$ et donc cette dernière série est de même nature que $\sum \frac{2\mu+1}{\lambda_k}$ et est donc divergente (vers $+\infty$). Il en résulte que $d(\varphi_\mu, W_n)$ tend vers 0 et donc que W est dense dans $C([0;1])$.

$$\boxed{\text{L'espace } W \text{ est dense dans } C([0;1]) \text{ pour la norme } N_2 \text{ si et seulement si la série } \sum_k \frac{1}{\lambda_k} \text{ est divergente.}}$$

F - Un critère de densité de W pour la norme N_∞

21. D'après la question 11, W est dense pour N_∞ impose qu'il le soit pour N_2 et donc, d'après la question 20,

$$\boxed{\text{si l'espace } W \text{ est dense dans } C([0;1]) \text{ pour la norme } N_\infty \text{ alors la série } \sum_k \frac{1}{\lambda_k} \text{ est divergente.}}$$

22. Avec les notations de l'énoncé

$$\begin{aligned}
N_\infty(\varphi_\mu - \psi) &= \sup_{0\leq x\leq 1}\left|x^\mu - \sum_{k=0}^{n} a_k x^{\lambda_k}\right| \\
&= \sup_{0\leq x\leq 1}\left|\mu\int_0^x t^{\mu-1}\,\mathrm{d}t - \sum_{k=0}^{n} a_k\lambda_k\int_0^x t^{\lambda_k-1}\,\mathrm{d}t\right| \\
&\leq \sup_{0\leq x\leq 1}\int_0^x\left|\mu t^{\mu-1} - \sum_{k=0}^{n} a_k\lambda_k t^{\lambda_k-1}\right|\mathrm{d}t \\
&\leq \int_0^1\left|\mu t^{\mu-1} - \sum_{k=0}^{n} a_k\lambda_k t^{\lambda_k-1}\right|\mathrm{d}t\ .
\end{aligned}$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, il vient

$$\boxed{N_\infty(\varphi_\mu - \psi) \leq N_2\left(\mu\varphi_{\mu-1} - \sum_{k=0}^{n} a_k\lambda_k\varphi_{\lambda_k-1}\right).}$$

23. Pour $k \in \mathbf{N}^*$, on pose $\mu_k = \lambda_k - 1$. Si la suite (λ_k) ne diverge pas vers l'infini, il en est de même pour la suite (μ_k). Sinon les séries de leurs inverses sont des séries à termes positifs de termes généraux équivalents et donc de même nature. Il en résulte que la série $\sum \dfrac{1}{\mu_k}$ diverge et donc que la famille (φ_{μ_k}) est dense dans $C([0;1])$ pour N_2 d'après la question 20.
Soit alors μ dans $\mathbf{N}^*$, on a alors $\varphi_{\mu-1}$ qui est dans l'adhérence pour N_2 des (φ_{μ_k}) et donc, d'après la question 22, φ_μ est dans l'adhérence pour N_∞ des (φ_{λ_k}). Comme φ_0 est dans W par hypothèse, on conclut grâce à la question 16 que $\boxed{W \text{ est dense dans } C([0;1]) \text{ pour } N_\infty.}$

24. Posons $\alpha = \inf_{k\geq 1} \lambda_k$ et, pour k dans $\mathbf{N}$, $\mu_k = \dfrac{\lambda_k}{\alpha}$. Alors le résultat précédent s'applique à (μ_k) puisque les séries $\sum \dfrac{1}{\mu_k}$ et $\sum \dfrac{1}{\lambda_k}$ sont de même nature. Il en résulte que l'espace engendré par les φ_{μ_k} est dense pour N_∞ dans $C([0;1])$.
Or φ_α est une bijection de $[0;1]$ sur lui-même, de sorte que, pour tous f et g dans $C([0;1])$, on a $N_\infty(f-g) = N_\infty(f\circ\varphi_\alpha - g\circ\varphi_\alpha)$. Il en résulte que si les φ_{μ_k} sont denses, il en est de même pour les $\varphi_{\mu_k}\circ\varphi_\alpha$. Or $\varphi_{\mu_k}\circ\varphi_\alpha = \varphi_{\lambda_k}$. Donc $\boxed{W \text{ est dense dans } C([0;1]) \text{ pour la norme } N_\infty.}$