Première composition
Mines-Ponts 2010 – MP

# Problème de Dirichlet

Si $A$ est une partie d'un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbf{R}$ ou sur $\mathbf{C}$, on note $\mathcal{C}(A)$ le $\mathbf{C}$-espace vectoriel des applications continues de $A$ dans $\mathbf{C}$. Les notations $D$, $\overline{D}$ et $T$ désignent respectivement

— le disque ouvert $D = \{z \in \mathbf{C} \mid |z| < 1\}$

— le disque fermé $\overline{D} = \{z \in \mathbf{C} \mid |z| \leq 1\}$

— le cercle $T = \{z \in \mathbf{C} \mid |z| = 1\}$.

À une fonction $f$ dans $\mathcal{C}(T)$ quelconque on associe

— les coefficients de Fourier, donnés pour $n$ dans $\mathbf{Z}$ par

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it}) e^{-int} \, \mathrm{d}t$$

— la fonction $g_f : D \longrightarrow \mathbf{C}$ définie par la formule suivante, dont l'existence sera traitée dans la question 1 :

$$g_f(z) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} \overline{z}^n$$

où $\overline{z}$ désigne le complexe conjugué de $z$ ;

— la fonction $G_f : \overline{D} \longrightarrow \mathbf{C}$ définie par

$$G_f(z) = \begin{cases} f(z) & \text{si } z \in T \\ g_f(z) & \text{si } z \in D \,. \end{cases}$$

Pour $n$ dans $\mathbf{N}$, on note $p_n$ et $q_n$ les fonctions de $\mathcal{C}(T)$ définies pour $z$ dans $T$ par $p_n(z) = z^n$ et $q_n(z) = \overline{z}^n$.
Le but du problème est de caractériser de différentes manières le prolongement $G_f$ de $f$ à $\overline{D}$.

## PARTIE I - Prolongement harmonique

Si $U$ est un ouvert de $\mathbf{C}$ on note $\widetilde{U} = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x + iy \in U\}$. Pour toute fonction $u : U \longrightarrow \mathbf{C}$, on note $\tilde{u} : \widetilde{U} \longrightarrow \mathbf{C}$ la fonction définie par la formule $\tilde{u}(x, y) = u(x + iy)$. La fonction $u$ est dite de classe $C^2$ si $\tilde{u}$ est de classe $C^2$ au sens des fonctions de deux variables réelles. On note alors $\Delta u$ la fonction définie sur $U$ par

$$\Delta u(x + iy) = \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y^2}(x, y) \,.$$

Dans cette partie, on fixe une fonction $f$ dans $\mathcal{C}(T)$ et on se propose de montrer que $G_f$ est l'unique fonction $G : \overline{D} \longrightarrow \mathbf{C}$ qui vérifie les propriétés suivantes :

(a1) la restriction de $G$ à $T$ coïncide avec $f$ ;

(a2) $G$ est continue sur $\overline{D}$ ;

(a3) la restriction de $G$ à $D$ est de classe $C^2$ et $\Delta G(z) = 0$ pour tout $z \in D$.

On va d'abord montrer que $G_f$ vérifie ces conditions. La condition (a1) est évidemment vérifiée.

1) Montrer que les deux séries qui entrent dans la définition de $g_f(z)$ sont convergentes pour tout $z \in D$.

   Soit $S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ la somme d'une série entière de rayon de convergence supérieur ou égal à 1.

2) Au moyen d'une dérivation terme à terme d'une série de fonctions **de variable réelle**, justifier que l'application $\widetilde{S} : \widetilde{D} \longrightarrow \mathbf{C}$ admet une dérivée partielle par rapport à $x$ qui est continue sur $\widetilde{D}$, et exprimer $\dfrac{\partial \widetilde{S}}{\partial x}(x, y)$ sous la forme de la somme d'une série.

3) Montrer que $S$ est de classe $C^2$ sur $D$ et déterminer $\Delta S(z)$ pour tout $z \in D$.

4) En déduire que $g_f$ est de classe $C^2$ sur $D$ et que $\Delta g_f(z) = 0$ pour tout $z \in D$.

   On fixe $z \in D$, et on note $P_z(t) = \mathrm{Re}\left(\dfrac{e^{it} + z}{e^{it} - z}\right)$ pour tout $t \in \mathbf{R}$.

5) En tenant compte de la définition des $c_n$ dans l'expression de $g_f(z)$, montrer

$$g_f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it}) P_z(t) \,\mathrm{d}t \,.$$

6) Déterminer $g_f$ pour $f = p_n$ et $f = q_n$, où $n \in \mathbf{N}$. Donner la valeur de l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_z(t) \,\mathrm{d}t$$

   et étudier le signe de $P_z(t)$ pour tout $t \in \mathbf{R}$.

7) Montrer que si $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{C}(T)$ qui converge uniformément vers $f$ sur $T$, alors $G_{f_n}$ converge uniformément vers $G_f$ sur $\overline{D}$.

8) Soit $\mathcal{P}(T)$ le sous espace vectoriel de $\mathcal{C}(T)$ engendré par $\{p_n \mid n \in \mathbf{N}\} \cup \{q_n \mid n \in \mathbf{N}\}$. Montrer que tout élément de $\mathcal{C}(T)$ est limite uniforme d'une suite d'éléments de $\mathcal{P}(T)$.

   *Pour $h$ dans $\mathcal{C}(T)$, on pourra considérer des fonctions de la forme*

$$\alpha_n \int_{-\pi}^{\pi} h(e^{i(x-t)})(1 + \cos(t))^n \,\mathrm{d}t \,.$$

9) En déduire que $G_f$ est continue sur $\overline{D}$.

   On se donne maintenant une fonction $G$ vérifiant les conditions (a1), (a2) et (a3) et on se propose de démontrer $G = G_f$.

10) On suppose dans cette question que $f$ est la fonction nulle et que $G$ est à valeurs réelles. Soit $\varepsilon > 0$ et $u : \overline{D} \longrightarrow \mathbf{R}$ définie par $u(z) = G(z) + \varepsilon \, |z|^2$.

    Montrer $\Delta u(z) > 0$ pour tout $z \in D$. En déduire $u(z) \leq \varepsilon$ pour tout $z \in \overline{D}$.

    *On pourra considérer, après en avoir justifié l'existence, un point $z_0 \in \overline{D}$ où $u$ atteint son maximum.*

11) Conclure dans le cas particulier de la question précédente, puis dans le cas général.

    *On pourra d'abord étendre la conclusion au cas où $f$ est nulle mais $G$ est à valeurs complexes.*

## PARTIE II - Deux applications

*Première application.* On considère la fonction $G$ définie sur $\overline{D}$ par $G(x+iy) = e^x \cos(y)$.

12) Montrer que $G$ vérifie la condition (a3) et en déduire, pour tout $n \in \mathbf{Z}$, la valeur de l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{\cos(t)} \cos(\sin(t)) \cos(nt) \, \mathrm{d}t \ .$$

*Deuxième application.* Soit $u : U \longrightarrow \mathbf{C}$ une application continue définie sur un ouvert $U$ de $\mathbf{C}$. Si $a \in \mathbf{C}$ et $R > 0$, on note $D(a,R) = \{z \in \mathbf{C} \,|\, |z-a| < R\}$ et $\overline{D}(a,R) = \{z \in \mathbf{C} \,|\, |z-a| \leq R\}$.

13) Montrer que $u$ est de classe $C^2$ et telle que $\Delta u = 0$ sur $U$ si et seulement si, pour tout disque fermé $\overline{D}(a,R)$ contenu dans $U$ et pour tout $z \in D(a,R)$, on a

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u\left(a + Re^{it}\right) P_{\frac{z-a}{R}}(t) \, \mathrm{d}t \ .$$

Pour $n \in \mathbf{N}$, on note $u_n : U \longrightarrow \mathbf{C}$ une fonction de classe $C^2$ telle que $\Delta u_n = 0$ sur $U$.

14) Déduire de la question précédente que si la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge uniformément vers une fonction $u$, alors $u$ est également de classe $C^2$ et telle que $\Delta u = 0$ sur $U$.

## PARTIE III - Propriétés duales

Dans cette partie, on fixe $z \in D$ et on considère l'application $\varphi_z : \mathcal{C}(T) \longrightarrow \mathbf{C}$ donnée par $\varphi_z(f) = g_f(z)$ et où $\mathcal{C}(T)$ est muni de la norme $N$ définie par

$$N(f) = \sup_{z\in T} |f(z)|$$

pour tout $f$ dans $\mathcal{C}(T)$. Pour toute application $\varphi : \mathcal{C}(T) \longrightarrow \mathbf{C}$, on considère les quatre propriétés suivantes :

(c1) $\varphi$ est une forme $\mathbf{C}$-linéaire et continue ;

(c2) $\forall n \in \mathbf{N}$, $\varphi(p_n) = z^n$ ;

(c3) $\forall n \in \mathbf{N}$, $\varphi(q_n) = \overline{z}^n$ ;

(c4) $\forall f \in \mathcal{C}(T)$, $|\varphi(f)| \leq N(f)$.

15) Montrer que $\varphi_z$ vérifie ces quatre propriétés.

16) Montrer que si $\varphi$ vérifie les conditions (c1), (c2) et (c3), alors $\varphi = \varphi_z$.

Dans la suite de cette partie, on se donne $\varphi : \mathcal{C}(T) \longrightarrow \mathbf{C}$ vérifiant les conditions (c1), (c2) et (c4), et on se propose de démontrer $\varphi = \varphi_z$.

Dans les deux questions suivantes, on se donne $\lambda \in \mathbf{R}$ et on considère une fonction $f$ dans $\mathcal{C}(T)$ à valeurs réelles positives. Soit $h$ dans $\mathcal{C}(T)$ définie par la formule $h(z) = 2f(z) - N(f) + i\lambda$ pour tout $z \in T$.

17) Calculer $N(h)^2$ en fonction de $N(f)$ et de $\lambda$.

18) En étudiant $|\varphi(h)|^2$, montrer $\varphi(f) \in \mathbf{R}$ puis $\varphi(f) \geq 0$.

19) En déduire $\varphi(\overline{f}) = \overline{\varphi(f)}$ pour tout $f$ dans $\mathcal{C}(T)$, et conclure.

# Première composition – Mines-Ponts 2010 – MP

## PARTIE I - Prolongement harmonique

1) Puisque $T$ est une sphère unité en dimension finie, c'est une partie compacte de $\mathbf{C}$. Par conséquent, d'après le théorème de Weierstrass, $f$ est borné sur $T$, i.e. $\|f\|_\infty$ est bien défini. Il résulte alors de l'inégalité de la moyenne qu'on a pour tout entier $n$, $|c_n| \leq \|f\|_\infty$ et donc, pour $z$ dans $D$, on a $c_n z^n = O\left(|z|^n\right)$ et $c_{-n}\overline{z}^n = O\left(|z|^n\right)$. Il en résulte que les deux séries qui entrent dans la définition de $g_f(z)$ sont $\boxed{\text{convergentes pour tout } z \text{ dans } D.}$

2) Pour $n$ dans $\mathbf{N}$ on note $f_n$ la fonction définie sur $\widetilde{D}$ par $f_n(x,y) = a_n(x+iy)^n$. C'est une fonction polynomiale en $(x,y)$ donc de classe $C^\infty$ sur $\mathbf{R}^2$ et donc sur $\widetilde{D}$. On note, pour $n \geq 1$, $g_n(x,y) = \dfrac{\partial f_n}{\partial x}(x,y) = na_n(x+iy)^{n-1}$. Soit $r$ un réel vérifiant $0 < r < 1$, on a $\|g_n\|_\infty \leq n\,|a_n|\,r^{n-1}$, où le supremum est pris sur $]-r;r[$. Il en résulte, puisque le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$ est égal à celui de $\sum n a_n z^n$, que la série $\sum g_n$ est normalement convergente sur tout compact de $\widetilde{D}$. Sa somme est donc une fonction continue sur $\widetilde{D}$ puisque les fonctions $g_n$ sont continues sur $\widetilde{D}$.
Soit $y$ fixé dans $]-1;1[$ et $r = \sqrt{1-y^2}$. Pour $n$ dans $\mathbf{N}$ on pose $h_n(x) = f_n(x,y)$. Comme la série $\sum f_n$ converge simplement sur $\widetilde{D}$ par hypothèse, on en déduit que la série $\sum h_n$ converge simplement sur $]-r;r[$. Comme on a affaire à des fonctions polynomiales, les fonctions $h_n$ sont toutes de classe $C^1$ sur $]-r;r[$. Enfin puisque la série $\sum g_n$ est normalement convergente sur tout compact inclus dans $\widetilde{D}$, la série $\sum h_n'$ est normalement convergente sur tout compact inclus dans $]-r;r[$, puisque $h_n'(x) = g_n(x,y)$ pour tout $x$ dans $]-r;r[$. Il résulte du théorème de Leibniz de dérivation des séries de fonctions que la somme de la série $\sum h_n$ est de classe $C^1$ sur $]-r;r[$ de dérivée donnée par dérivation terme à terme, i.e. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} h_n(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} g_n(x,y)$. Par conséquent $\boxed{\dfrac{\partial \widetilde{S}}{\partial x}(x,y) \text{ existe et est continue sur } \widetilde{D} \text{ et on a } \dfrac{\partial \widetilde{S}}{\partial x}(x,y) = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}(x+iy)^n.}$

3) On a, pour $(x,y)$ dans $\widetilde{D}$, $\widetilde{S}(x,y) = S(x+iy) = S(i(y-ix))$ et donc $\widetilde{S}(x,y) = \widetilde{S\circ\mu_i}(y,-x)$ où $\mu_i$ désigne l'application de $D$ dans lui-même donnée par la multiplication par $i$, i.e. $\mu_i(z) = iz$. Or $S\circ\mu_i$ est la somme de la série $\sum i^n a_n z^n$ et donc, d'après ce qui précède, elle admet une dérivée partielle par rapport à la première variable continue sur $D$ et donnée par dérivation terme à terme. On en déduit donc que $\widetilde{S}$ admet des dérivées partielles continues sur $\widetilde{D}$, donc y est de classe $C^1$ d'après le théorème fondamental du calcul différentiel, et qu'on a aussi

$$\frac{\partial \widetilde{S}}{\partial y}(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}i^{n+1}(y-ix)^n = i\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}(x+iy)^n\ ,$$

i.e. $\dfrac{\partial \widetilde{S}}{\partial y} = i\dfrac{\partial \widetilde{S}}{\partial x}$ sur $D$. Puisque les séries donnant $\dfrac{\partial \widetilde{S}}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial \widetilde{S}}{\partial y}$ ont un rayon de convergence égal à celui donnant $S$, on peut leur appliquer ce qui précède et on obtient des fonctions de classe $C^1$ sur $\widetilde{D}$ dont les dérivées sont données par dérivation terme à terme. En particulier $\dfrac{\partial^2 \widetilde{S}}{\partial y^2} = i\dfrac{\partial^2 \widetilde{S}}{\partial x \partial y}$. Or, d'après le théorème de Schwarz $\dfrac{\partial^2 \widetilde{S}}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 \widetilde{S}}{\partial y \partial x}$ et donc $\dfrac{\partial^2 \widetilde{S}}{\partial x \partial y} = i\dfrac{\partial^2 \widetilde{S}}{\partial x^2}$ sur $D$. Par conséquent $\boxed{S \text{ est de classe } C^2 \text{ sur } D \text{ et } \Delta S = 0 \text{ sur } D.}$

4) Avec les notations de la question précédente on a $S(x-iy)=\widetilde{S}(x,-y)$ i.e. $S(x-iy)=\widetilde{S}\circ c(x,y)$ où $c$ est l'application linéaire de $\mathbf{R}^2$ dans lui-même qui à $(x,y)$ associe $(x,-y)$. Comme $c$ est linéaire, laisse $\widetilde{D}$ invariant et $\widetilde{S}$ de classe $C^2$ sur $\widetilde{D}$, $\widetilde{S}\circ c$ est de classe $C^2$ sur $\widetilde{D}$ et on a, par dérivation de fonctions composées, $\dfrac{\partial \widetilde{S}\circ c}{\partial x}=\dfrac{\partial \widetilde{S}}{\partial x}\circ c$, $\dfrac{\partial \widetilde{S}\circ c}{\partial y}=-\dfrac{\partial \widetilde{S}}{\partial y}\circ c$, puis $\dfrac{\partial^2 \widetilde{S}\circ c}{\partial x^2}=\dfrac{\partial^2 \widetilde{S}}{\partial x^2}\circ c$ et $\dfrac{\partial^2 \widetilde{S}\circ c}{\partial y^2}=\dfrac{\partial^2 \widetilde{S}}{\partial y^2}\circ c$, et donc $\Delta\left(\widetilde{S}\circ c\right)=\left(\Delta\widetilde{S}\right)\circ c=0$. On en déduit que les séries intervenant dans la définition de $g_f$ sont toutes les deux de classe $C^2$ sur $D$ et de Laplacien nul. Il en va de même pour la constante, et donc par linéarité on en déduit que $\boxed{g_f \text{ est de classe } C^2 \text{ sur } D \text{ et } \Delta g_f = 0 \text{ sur } D.}$

On fixe $z\in D$, et on note $P_z(t)=\operatorname{Re}\left(\dfrac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\right)$ pour tout $t\in\mathbf{R}$.

5) Les séries de fonctions $\sum u_n$ et $\sum v_n$, définies sur $[-\pi;\pi]$ par $u_n(t)=\dfrac{1}{2\pi}f(e^{it})e^{-int}z^n$ et $v_n(t)=\dfrac{1}{2\pi}f(e^{it})e^{int}\overline{z}^n$, sont normalement convergentes sur cet intervalle puisque, par inégalité de la moyenne, on a $\|u_n\|_\infty\leq\|f\|_\infty|z|^n$ et $\|v_n\|_\infty\leq\|f\|_\infty|z|^n$ où le premier supremum est pris sur $[-\pi;\pi]$ et le second sur $T$. On en déduit qu'on peut intervertir somme et intégrale pour obtenir

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi}u_n(t)\,\mathrm{d}t=\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}u_n(t)\,\mathrm{d}t\quad\text{et}\quad\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi}v_n(t)\,\mathrm{d}t=\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}v_n(t)\,\mathrm{d}t$$

et donc, par linéarité,

$$g_f(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(e^{it})\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}(ze^{-it})^n+\sum_{n=1}^{\infty}(\overline{z}e^{it})^n\right)\mathrm{d}t\,.$$

Or, puisqu'on a affaire à des séries géométriques, les sommes dans l'intégrande sont respectivement égales à $\dfrac{ze^{-it}}{1-ze^{-it}}$ et à son conjugué, i.e. $\dfrac{z}{e^{it}-z}$ et son conjugué. On obtient ainsi en facteur de $f(e^{it})$ deux fois la partie réelle de $\dfrac{1}{2}+\dfrac{z}{e^{it}-z}$, i.e. de $\dfrac{e^{it}+z}{2(e^{it}-z)}$, soit $P_z(t)$. D'où

$$\boxed{g_f(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(e^{it})P_z(t)\,\mathrm{d}t.}$$

6) Pour $n$ dans $\mathbf{N}$ et $k$ dans $\mathbf{Z}$, $c_k(p_n)$ et $c_k(q_n)$ sont nuls sauf dans les deux cas suivants : $c_n(p_n)=1$ et $c_{-n}(q_n)=1$. On en déduit $\boxed{g_{p_n}=p_n \text{ et } g_{q_n}=q_n.}$

En particulier pour $n=0$, il vient $\boxed{\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}P_z(t)\,\mathrm{d}t=g_{p_0}(z)=1.}$

Pour $t$ réel on a

$$\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}=\frac{1-e^{it}\overline{z}+e^{-it}z-|z|^2}{|e^{it}-z|^2}=\frac{1-|z|^2}{|e^{it}-z|^2}+\frac{2}{|e^{it}-z|^2}i\operatorname{Im}(e^{-it}z)$$

soit $P_z(t) = \dfrac{1-|z|^2}{|e^{it}-z|^2}$, ce qui est positif puisqu'on a $|z|<1$ : $\boxed{P_z(t) > 0.}$

7) En tant que limite uniforme de fonctions continues, $f$ est continue sur $T$. De plus on a

$$\forall z \in T \quad |G_{f_n}(z) - G_f(z)| = |f_n(z) - f(z)| \leq \|f_n - f\|_\infty$$

et, par linéarité de l'intégrale et en utilisant la formule trouvée en question 5,

$$\forall z \in D \quad G_{f_n}(z) - G_f(z) = g_{f_n}(z) - g_f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (f_n(e^{it}) - f(e^{it}))P_z(t)\,\mathrm{d}t$$

et donc, par inégalité de la moyenne, positivité de $P_z$ et d'après le calcul de son intégrale à la question précédente, il vient

$$\forall z \in D \quad |G_{f_n}(z) - G_f(z)| \leq \|f_n - f\|_\infty \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_z(t)\,\mathrm{d}t = \|f_n - f\|_\infty$$

et donc $\|G_{f_n} - G_f\|_\infty \leq \|f_n - f\|_\infty$, le premier supremum étant pris sur $\overline{D}$ et le second sur $T$. Il en résulte que $\boxed{G_{f_n} \text{ converge uniformément vers } G_f \text{ sur } \overline{D}.}$

8) Soit $h$ dans $\mathcal{C}(T)$ et $n$ dans $\mathbf{N}$. Comme la fonction $1+\cos$ est positive, continue et non nulle sur $[-\pi;\pi]$ son intégrale sur ce segment n'est pas nulle et on peut poser $\alpha_n = \dfrac{1}{\int_{-\pi}^{\pi}(1+\cos(t))^n\,\mathrm{d}t}$ et $\varphi_n = \alpha_n(1+\cos)^n$. On définit une fonction $h_n$ par la formule

$$h_n(z) = \int_{-\pi}^{\pi} h(ze^{-it})\varphi_n(t)\,\mathrm{d}t$$

et on remarque que, pour $x$ dans $\mathbf{R}$, on a

$$h_n(e^{ix}) = \int_{-\pi}^{\pi} h(e^{i(x-t)})\varphi_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\pi}^{\pi} h(e^{it})\varphi_n(x-t)\,\mathrm{d}t$$

la seconde formule étant obtenue par changement de variable affine et en tenant compte du fait que l'intégrande est périodique de période $2\pi$, et donc que son intégrale est la même sur tout intervalle de longueur $2\pi$. Comme on a, pour $x$ et $t$ réels et $z = e^{ix}$, $1+\cos(x-t) = 1 + \dfrac{1}{2}ze^{-it} + \dfrac{1}{2}\overline{z}e^{it}$, on en déduit par linéarité de l'intégrale que $h_n$ appartient à $\mathcal{P}(T)$. De plus, pour $z$ dans $T$, on a

$$h_n(z) - h(z) = \alpha_n \int_{-\pi}^{\pi} \left[h(ze^{-it}) - h(z)\right] \varphi_n(t)\,\mathrm{d}t\ .$$

Soit alors $\varepsilon$ dans $\mathbf{R}_+$. Puisque $h$ est continue sur le compact $T$, elle y est uniformément continue, d'après le théorème de Heine, et on dispose de $\eta$ dans $\mathbf{R}_+^*$ tel que, pour $z$ et $z'$ dans $T$, si $|z'-z| < \eta$, alors $|h(z') - h(z)| < \varepsilon$. Par continuité de l'exponentielle complexe en 0, on en déduit qu'on dispose également de $\delta$ dans $\mathbf{R}_+^*$ tel que pour $z$ dans $T$ et $t$ dans $\mathbf{R}$, si $|t| < \delta$, alors $|ze^{-it} - z| = |e^{-it} - 1| < \eta$ et donc aussi $\left|h(ze^{-it}) - h(z)\right| < \varepsilon$. On en déduit par inégalité de la moyenne et positivité de $\varphi_n$

$$\left|\alpha_n \int_{-\delta}^{\delta} \left[h(ze^{-it}) - h(z)\right] \varphi_n(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \alpha_n\varepsilon \int_{-\delta}^{\delta} \varphi_n(t)\,\mathrm{d}t \leq \alpha_n\varepsilon \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_n(t)\,\mathrm{d}t = \varepsilon\ .$$

De plus, toujours par inégalité de la moyenne, parité, décroissance et positivité sur $[0;\pi]$ de la fonction $1+\cos$, il vient

$$\left|\alpha_n \int_\delta^\pi \Big[h(ze^{-it}) - h(z)\Big]\,\varphi_n(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq 2\,\|h\|_\infty\,\alpha_n\varphi_n(\delta)$$

et

$$\left|\alpha_n \int_{-\pi}^{-\delta} \Big[h(ze^{-it}) - h(z)\Big]\,\varphi_n(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq 2\,\|h\|_\infty\,\alpha_n\varphi_n(\delta)\ .$$

Or on a, par changement de variable affine et parité de cos

$$\int_{-\pi}^{\pi}(1+\cos(t))^n\,\mathrm{d}t = 2^n\int_{-\pi}^{\pi}\cos^{2n}(t/2)\,\mathrm{d}t = 2^{n+1}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^{2n}(t)\,\mathrm{d}t = 2^{n+2}\int_0^{\pi/2}\cos^{2n}(t)\,\mathrm{d}t$$

et, par intégration par parties,

$$\int_0^{\pi/2}\cos^{2n}(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^{\pi/2}\cos^{2n+2}(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2}\cos^{2n}(t)\sin^2(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2n+1}\int_0^{\pi/2}\cos^{2n+2}(t)\,\mathrm{d}t$$

soit

$$(2n+2)\int_0^{\pi/2}\cos^{2n+2}(t)\,\mathrm{d}t = (2n+1)\int_0^{\pi/2}\cos^{2n}(t)\,\mathrm{d}t$$

et il vient, par une récurrence immédiate,

$$\int_0^{\pi/2}\cos^{2n}(t)\,\mathrm{d}t = \frac{(2n-1)(2n-3)\cdots 1}{(2n)(2n-2)\cdots 2}\,\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2^{2n+1}}\binom{2n}{n}$$

et $\alpha_n = \dfrac{2^{n-1}}{\pi}\,\dfrac{n!^{\,2}}{(2n)!} \sim 2^{-n-1}\sqrt{n/\pi}$, en utilisant la formule de Stirling. Ainsi $\alpha_n\varphi_n(\delta) \sim \sqrt{\dfrac{n}{2\pi}}\cos^{2n}(\delta/2)$ et donc, par croissance comparée entre une puissance et une exponentielle de base strictement inférieure à 1, $\alpha_n\varphi_n(\delta) = o\,(1)$. On en déduit, par sommation et inégalité triangulaire,

$$\left|\alpha_n \int_{-\pi}^{\pi} \Big[h(ze^{-it}) - h(z)\Big]\,\varphi_n(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq 3\varepsilon$$

pour $n$ assez grand, i.e. $h_n$ converge uniformément vers $h$ sur $T$ :
$\boxed{\text{tout élément de } \mathcal{C}(T) \text{ est limite uniforme d'une suite d'éléments de } \mathcal{P}(T).}$

9) D'après ce qui précède, on dispose d'une suite $(h_n)$ dans $\mathcal{P}(T)$ qui converge uniformément vers $f$ sur $T$. Puisque $h \mapsto G_h$ est l'identité sur les fonctions $p_n$ et $q_n$, d'après la question 6 et puisque $h \mapsto G_h$ est linéaire d'après la question 5, c'est l'identité sur $\mathcal{P}(T)$ et donc, pour tout entier $n$, $G_{h_n} = h_n$. Or, d'après la question 7, $G_{h_n}$ converge uniformément vers $G_f$ sur $\overline{D}$ et, en particulier, $\boxed{G_f \text{ est continue sur } \overline{D}.}$

10) La fonction $(x,y) \mapsto x^2+y^2$ est polynomiale donc de classe $C^\infty$ sur $\mathbf{R}^2$ et son laplacien est constant égal à 4. Par linéarité on en déduit que $u$ est de classe $C^2$ sur $D$ et qu'on a $\Delta u = 4\varepsilon$. En particulier $\boxed{\Delta u(z) > 0 \text{ sur } D.}$

Comme $u$ est continue sur le compact $\overline{D}$, d'après le théorème de WEIERSTRASS elle atteint son maximum sur $\overline{D}$. On note $z_0$ un point où $u$ atteint son maximum. Si $z_0 \in T$, on a $u(z_0) = f(z_0) + \varepsilon = \varepsilon$ et on en déduit $u \leq \varepsilon$ sur $\overline{D}$. Si $z_0 \in D$, puisque $D$ est un ouvert, on en déduit $\nabla u(z_0) = 0$. Comme de plus $\Delta u(z_0) > 0$, on en déduit qu'au moins une des deux inégalités $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(z_0) > 0$ ou $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}(z_0) > 0$ est vérifiée. Mais alors, par développement de TAYLOR-YOUNG au voisinage de $z_0$ des fonctions partielles, on a $u(z_0+t) - u(z_0) \sim \dfrac{t^2}{2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(z_0)$ ou $u(z_0+it) - u(z_0) \sim \dfrac{t^2}{2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}(z_0)$, ce qui conduit dans les deux cas à une contradiction puisque le membre de gauche de l'équivalent est négatif ou nul tandis que celui de droite est strictement positif pour $t$ au voisinage de 0 et non nul. Ainsi $z_0$ ne saurait appartenir à $D$. Par conséquent $\boxed{u \leq \varepsilon \text{ sur } \overline{D}.}$

11) Dans le cas particulier précédent, on a pour tout $\varepsilon$ strictement positif et tout $z$ dans $D$, $G(z) \leq u(z) \leq \varepsilon$ et donc $G$ est négative. Mais alors $-G$ vérifie les mêmes hypothèses que $G$, à savoir $(a1)$, $(a2)$ et $(a3)$ et est à valeurs réelles. Il en résulte que $-G$ est négative, i.e. $G$ est positive et au final $G = 0$.

Si $f = 0$ et $G$ est à valeurs complexes, on pose $G = G_1 + iG_2$ et alors puisque $G$ est nulle sur $T$, $G_1$ et $G_2$ aussi, i.e. $G_1$ et $G_2$ vérifient $(a1)$. Puisque $G$ est continue sur $\overline{D}$, ses coordonnées le sont aussi, par exemple par continuité des formes linéaires coordonnées, et donc $G_1$ et $G_2$ vérifient $(a2)$. Enfin $G$ est de classe $C^2$, donc ses coordonnées aussi et $\Delta G$ est nul donc ses coordonnées aussi, i.e. par linéarité de la dérivation, le laplacien de ses coordonnées. Par conséquent $G_1$ et $G_2$ vérifient $(a3)$ et on en déduit, d'après ce qui précède, que $G_1$ et $G_2$ sont nulles, i.e. $G = 0$.

Enfin, comme on vient de le voir, les propriétés $(a1)$, $(a2)$ et $(a3)$ sont linéaires et donc si $G$ les vérifie alors $G - G_f$ est nulle sur $T$, continue sur $\overline{D}$, de classe $C^2$ sur $D$ et de laplacien nul sur $D$. Donc $G - G_f = 0$, i.e. $G = G_f$. $\boxed{G_f \text{ est l'unique application vérifiant } (a1), (a2) \text{ et } (a3).}$

## PARTIE II - Deux applications

12) En tant que produit de deux applications de classe $C^\infty$ composées avec une forme coordonnée, $G$ est de classe $C^\infty$ sur $D$, continue sur $\overline{D}$ et comme $G(x+iy) = g(x)h(y)$ avec $g$ et $h$ vérifiant $g'' = g$ et $h'' = -h$, on a $\Delta G = 0$, i.e. $\boxed{G \text{ vérifie la condition (a3).}}$

On a plus explicitement $G(x+iy) = \dfrac{1}{2}e^x(e^{iy} + e^{-iy}) = \dfrac{1}{2}(e^z + e^{\overline{z}})$, avec $z = x + iy$. On en déduit que, si on pose $f(z) = \dfrac{1}{2}(e^z + e^{\overline{z}})$ pour $z$ dans $T$, on a $G = G_f$. On a donc, en reprenant les notations du préambule,

$$g_f(z) = 1 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n!} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\overline{z}^n}{n!} = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}\overline{z}^n$$

et donc $c_0 = 1$ et, pour $n$ dans $\mathbf{N}^*$, $c_n = c_{-n} = \dfrac{1}{2n!}$ par unicité du développement en série entière en 0 des fonctions de la variable réelle $t \mapsto g_f(t) = e^t$ et $t \mapsto g_f(it) = 1$, ces développements étant donnés respectivement par $1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n!}$ et 1, d'une part, et par $c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n + c_{-n})t^n$ et $c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n - c_{-n})t^n$, d'autre part, puisque la série définissant $g_f$ a un rayon de convergence au moins égal à 1 d'après la question 1. En notant $\delta_{n,0}$ le symbole de Kronecker, on a donc, pour tout entier naturel $n$, $c_n = c_{-n} = \dfrac{1}{(1+\delta_{n,0})n!}$.

Or, pour $n$ dans $\mathbf{N}$, on a $\dfrac{c_n - c_{-n}}{2} = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it}) \cos(nt) \, \mathrm{d}t$ par linéarité de l'intégrale et formule d'Euler. En explicitant il vient $\boxed{\dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} e^{\cos(t)} \cos(\sin(t)) \cos(nt) \, \mathrm{d}t = \dfrac{1}{(1+\delta_{n,0})n!}.}$

13) Soit $u$ de classe $C^2$ et telle que $\Delta u = 0$ sur $U$, $a$ dans $U$ et $R \in \mathbf{R}_+^*$ tels que $\overline{D}(a, R)$ soit contenu dans $U$. On définit alors $G$ sur $\overline{D}$ par $G(z) = u(a + Rz)$. Alors $G$ vérifie (a2) et (a3) par composition et dérivation de fonctions composées et donc si on note $f$ la restriction de $G$ à $T$, on a $G = G_f$ et en particulier, pour $z$ dans $D$ on a $u(a + Rz) = g_f(z)$, i.e. pour $z$ dans $\overline{D}(a, R)$, $u(z) = g_f((z - a)/R)$. En utilisant le résultat de la question 5, il vient

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u\left(a + Re^{it}\right) P_{\frac{z-a}{R}}(t) \, \mathrm{d}t \, .$$

Réciproquement soit $a$ dans $U$. Comme $U$ est ouvert on dispose de $R$ dans $\mathbf{R}_+^*$ tel que $\overline{D}(a, R)$ soit contenu dans $U$. On définit alors $f$ sur $T$ par $f(z) = u(a + Rz)$. Alors $f$ est continue sur $T$ et $g_f(z) = u(a + Rz)$ sur $D$ par hypothèse sur $u$ i.e. $u(z) = g_f((z - a)/R)$ sur $D(a, R)$ et donc $u$ est de classe $C^2$ sur $D(a, R)$ et son laplacien y est nul. Comme ce sont des notions locales, on en déduit que $u$ est de classe $C^2$ et de laplacien nul sur $U$. Ainsi

$$\boxed{\begin{array}{l} u \text{ est de classe } C^2 \text{ et telle que } \Delta u = 0 \text{ sur } U \text{ si et seulement si, pour tout disque fermé} \\ \overline{D}(a,R) \text{ contenu dans } U \text{ et pour tout } z \in D(a,R), \text{ on a} \\ \qquad u(z) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} u\left(a + Re^{it}\right) P_{\frac{z-a}{R}}(t) \, \mathrm{d}t \, . \end{array}}$$

14) Pour $a$ dans $U$ et $R$ dans $\mathbf{R}_+^*$ tels que $\overline{D}(a, R)$ soit contenu dans $U$, et pour $n$ dans $\mathbf{N}$ et $t$ dans $[-\pi; \pi]$, on pose

$$f_n(t) = u_n\left(a + Re^{it}\right) P_{\frac{z-a}{R}}(t) \quad \text{et} \quad f(t) = u\left(a + Re^{it}\right) P_{\frac{z-a}{R}}(t) \, .$$

Alors on a $\|f_n - f\|_\infty \leq \|u_n - u\|_\infty \left\|P_{\frac{z-a}{R}}\right\|_\infty$ et donc $(f_n)$ converge uniformément sur $[-\pi; \pi]$ vers $f$. On en déduit

$$\lim \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u_n\left(a + Re^{it}\right) P_{\frac{z-a}{R}}(t) \, \mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u\left(a + Re^{it}\right) P_{\frac{z-a}{R}}(t) \, \mathrm{d}t$$

et donc, puisque le membre de gauche est égal à $\lim u_n(z)$, d'après l'hypothèse sur $(u_n)$ et la question précédente utilisée dans le sens direct, i.e. à $u(z)$. La question précédente utilisée dans le sens réciproque permet de conclure que $\boxed{u \text{ est de classe } C^2 \text{ et telle que } \Delta u = 0 \text{ sur } U.}$

## PARTIE III - Propriétés duales

15) Par linéarité de l'intégrale l'application $f \mapsto (c_n(f))_{n\in\mathbf{Z}}$ est linéaire et donc aussi $\varphi_z$ par linéarité de la fonction qui à une série convergente associe sa somme. Les propriétés (c2) et (c3) résultent de la question 6. De plus en raisonnant comme en question 7, i.e. en utilisant la formule trouvée en question 5,

$$|\varphi_z(f)| = |g_f(z)| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|f(e^{it})\right| P_z(t)\,\mathrm{d}t \leq N(f)\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_z(t)\,\mathrm{d}t = N(f)$$

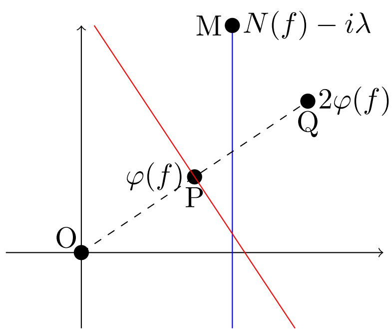
et donc $\boxed{\varphi_z \text{ vérifie ces quatre propriétés.}}$

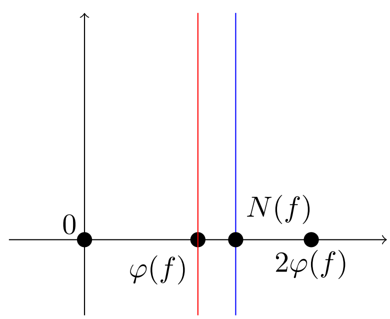
16) Soit $\varphi$ vérifiant les conditions (c1), (c2) et (c3), alors en utilisant (c2) et (c3), $\varphi$ coïncide avec $\varphi_z$ sur $(p_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(q_n)_{n\in\mathbf{N}}$. Par linéarité c'est donc aussi le cas sur $\mathcal{P}(T)$ et, par continuité, sur son adhérence dans $\mathcal{C}(T)$. Or, d'après la question 8, celle-ci est égale à $\mathcal{C}(T)$ , i.e. $\boxed{\varphi = \varphi_z.}$

17) Pour $t$ dans $T$ on a $|h(t)|^2 = (2f(t) - N(f))^2 + \lambda^2$. Or, par hypothèse sur $f$, on a $0 \leq f(t) \leq N(f)$ et donc $-N(f) \leq 2f(t) - N(f) \leq N(f)$, d'où $|h(t)|^2 \leq N(f)^2 + \lambda^2$. De plus, par compacité de $T$ et théorème de WEIERSTRASS $f$ atteint $N(f)$ sur $T$ et donc $|h|^2$ atteint $N(f)^2 + \lambda^2$ aussi sur $T$. On en déduit par croissance de la fonction carré et de sa réciproque sur $\mathbf{R}_+$, $N(h) = \sqrt{N(f)^2 + \lambda^2}$ puis $\boxed{N(h)^2 = N(f)^2 + \lambda^2.}$

18) Par linéarité on a $\varphi(h) = 2\varphi(f) + (-N(f) + i\lambda)\varphi(p_0)$ et donc par (c2) $\varphi(h) = 2\varphi(f) - N(f) + i\lambda$. On déduit de (c4) qu'on a donc

$$|2\varphi(f) - N(f) + i\lambda|^2 \leq N(f)^2 + \lambda^2\ .$$




Géométriquement on interprète les quantités ci-dessus comme des distances. On introduit les points $O$, $M$, $P$, $Q$ d'affixes respectives $0$, $N(f) - i\lambda$, $\varphi(f)$ et $2\varphi(f)$. Ainsi $P$ est le milieu de $[0;Q]$ et l'inégalité précédente s'écrit $QM^2 \leq OM^2$. C'est-à-dire que $M$ est plus proche de $Q$ que de $O$. Il est donc situé dans le demi-plan délimité par la médiatrice de $[O;Q]$, i.e. la droite $(D_P)$ perpendiculaire à $(OP)$ passant par $P$, et qui contient $Q$. Or, pour $\lambda$ variant, $M$ décrit une droite verticale $(D_M)$ et si un demi-plan contient une droite c'est que cette droite est parallèle à la droite qui le délimite. Il en résulte que $(D_P)$ est verticale et donc que $(OP)$ est horizontale, i.e. $\boxed{\varphi(f) \in \mathbf{R}.}$

Comme de plus, pour $\lambda = 0$, $M$ appartient à $(OP)$ et $Q$ et $M$ appartiennent au même demi-plan si et seulement si ce n'est pas le cas pour $O$ et $M$, i.e. $P \in [O;M]$. On en déduit $0 \leq \varphi(f) \leq N(f)$. En particulier $\boxed{\varphi(f) \geq 0.}$

19) Soit $f$ dans $\mathcal{C}(T)$. On écrit $f = a+ib = a^+ - a^- + ib^+ - ib^-$ avec $a = \dfrac{1}{2}(f+\overline{f})$, $b = \dfrac{1}{2i}(f-\overline{f})$, $a^+ = \dfrac{1}{2}(a+|a|)$, $a^- = \dfrac{1}{2}(-a+|a|)$, $b^+ = \dfrac{1}{2}(b+|b|)$ et $b^- = \dfrac{1}{2}(-b+|b|)$. Par continuité de la valeur absolue et de la conjugaison et par stabilité par combinaisons linéaires de $\mathcal{C}(T)$, les fonctions $a^+$, $a^-$, $b^+$ et $b^-$ appartiennent à $\mathcal{C}(T)$. De plus, par construction, elles sont à valeurs réelles positives. Il en va donc de même pour leurs images par $\varphi$ d'après la question précédente. Il vient alors, par linéarité de $\varphi$ et puisqu'on a affaire à des fonctions à valeurs réelles

$$\begin{aligned}
\overline{\varphi(a^+ - a^- + ib^+ - ib^-)} &= \overline{\varphi(a^+) - \varphi(a^-) + i\varphi(b^+) - i\varphi(b^-)} \\
&= \varphi(a^+) - \varphi(a^-) - i\varphi(b^+) + i\varphi(b^-) \\
&= \varphi(a^+ - a^- - ib^+ + ib^-) = \varphi(\overline{f})
\end{aligned}$$

i.e. $\boxed{\varphi(\overline{f}) = \overline{\varphi(f)}.}$

En particulier, pour $n$ dans $\mathbf{N}$, on a $\varphi(q_n) = \varphi(\overline{p_n}) = \overline{\varphi(p_n)} = \overline{p_n} = q_n$ et donc $\varphi$ vérifie (c3). Par conséquent $\varphi$ vérifie (c1), (c2) et (c3) et donc, d'après le début de cette partie, $\boxed{\varphi = \varphi_z}$