

LYCÉE CLEMENCEAU MP\*  
MATHÉMATIQUES  
DEVOIR SURVEILLÉ 5  
10 DÉCEMBRE 2021 – DURÉE 3H

**LES CALCULATRICES SONT INTERDITES.**

**Sujet unique**

Mines-Ponts 2011 - filière MP - 1ère épreuve

Concours blanc - Jour 2 – 8h-11h

Merci d'indiquer votre nom sur chacune des copies (de préférence doubles).

Correction et barème tiennent compte de la qualité de la rédaction et du soin apporté à la copie.

**UNE COPIE NON RÉDIGÉE NE SERA PAS CORRIGÉE.**

# MINES-PONTS 2011 - MP - PREMIÈRE COMPOSITION

Soit  $n$  un entier naturel non nul et  $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$  l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre  $n$  à coefficients complexes. On note  $0_n$  la matrice nulle et  $I_n$  la matrice identité de  $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ . La *trace* d'une matrice  $U$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$  est notée  $\text{Tr}(U)$ . On dit que deux matrices  $U$  et  $V$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$  *commutent* si  $UV = VU$ . Une matrice  $N$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$  est dite *nilpotente* s'il existe un entier  $k$  strictement positif pour lequel  $N^k = 0_n$ .

Dans tout le problème, on considère une matrice  $A$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$  et on note  $f$  l'endomorphisme dont la matrice dans la base canonique de  $\mathbf{C}^n$  est  $A$ . Le polynôme caractéristique de  $A$  est noté  $\chi_A$  et les valeurs propres complexes distinctes de  $A$  sont notées  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ . Pour tout  $i$  dans  $\{1; \dots; r\}$  on note :

- $\alpha_i$  l'ordre de multiplicité de la valeur propre  $\lambda_i$ , c'est-à-dire l'ordre de multiplicité de la racine  $\lambda_i$  du polynôme  $P$ ;
- $P_i$  le polynôme défini par  $P_i = (X_i - \lambda_i)^{\alpha_i}$ ;
- $F_i$  le sous-espace vectoriel de  $\mathbf{C}^n$  défini par  $F_i = \text{Ker}((f - \lambda_i \text{Id}_{\mathbf{C}^n})^{\alpha_i})$ ;
- $f_i$  l'endomorphisme de  $F_i$  obtenu par restriction de  $f$  à  $F_i$ .

La partie II à l'exception de la question 11, est indépendante de la partie I. La partie III est indépendante des parties précédentes.

## PARTIE I - Décomposition de DUNFORD

1. Justifier que l'espace vectoriel  $\mathbf{C}^n$  est somme directe des espaces  $F_i$  :

$$\mathbf{C}^n = \bigoplus_{i=1}^r F_i .$$

2. En considérant une base de  $\mathbf{C}^n$  adaptée à la somme directe précédente, démontrer que pour tout  $i$  dans  $\{1; \dots; r\}$ , le polynôme caractéristique de  $f_i$  est  $P_i$ . (On pourra d'abord établir que  $P_i$  est un polynôme annulateur de  $f_i$ .)
3. Démontrer qu'il existe une matrice inversible  $P$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$  telle que  $A'$  donnée par  $A' = P^{-1}AP$  soit une matrice définie par blocs de la forme suivante :

$$A' = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{\alpha_1} + N_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_r I_{\alpha_r} + N_r \end{pmatrix}$$

où  $N_i$  dans  $\mathcal{M}_{\alpha_i}(\mathbf{C})$  est nilpotente pour tout  $i$  dans  $\{1; \dots; r\}$ .

4. En déduire que la matrice  $A$  s'écrit sous la forme  $A = D + N$ , où  $D$  est une matrice diagonalisable et  $N$  une matrice nilpotente de  $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$  qui commutent.

Les matrices  $D$  et  $N$  vérifiant ces conditions constituent la *décomposition de DUNFORD* de la matrice  $A$ . Dans toute la suite du problème, on admettra l'*unicité* de cette décomposition, c'est-à-dire que  $D$  et  $N$  sont déterminées de façon unique par  $A$ .

Un exemple pour  $n = 3$  :

5. Calculer la décomposition de DUNFORD de  $A$  si  $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ .

## PARTIE II - Commutation et conjugaison

Pour toute matrice  $B$  et toute matrice inversible  $P$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ , on note  $\text{comm}_B$  et  $\text{conj}_P$  les endomorphismes de  $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$  définis par :

$$\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C}), \quad \begin{cases} \text{comm}_B(X) &= BX - XB \\ \text{conj}_P(X) &= PXP^{-1} . \end{cases}$$

Le but de cette partie est de démontrer que  $A$  est diagonalisable si et seulement si  $\text{comm}_A$  est diagonalisable.

6. Soit  $P$  une matrice inversible de  $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ . Calculer  $\text{conj}_{P^{-1}} \circ \text{comm}_A \circ \text{conj}_P$ .

Pour tous  $i$  et  $j$  dans  $\{1; \dots; n\}$  on note  $E_{i,j}$  la matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$  dont tous les coefficients sont nuls, sauf celui à l'intersection de la  $i^{\text{e}}$  ligne et de la  $j^{\text{e}}$  colonne qui est égal à 1.

7. Si  $A$  est une matrice diagonale, démontrer que pour tous  $i$  et  $j$  dans  $\{1; \dots; n\}$ ,  $\text{comm}_A$  admet  $E_{i,j}$  comme vecteur propre. Déterminer l'ensemble des valeurs propres de  $\text{comm}_A$ .

8. En déduire que si  $A$  est diagonalisable,  $\text{comm}_A$  l'est aussi.

9. Démontrer que si  $A$  est nilpotente,  $\text{comm}_A$  l'est également, c'est-à-dire qu'il existe un entier  $k$  strictement positif pour lequel  $(\text{comm}_A)^k$  est l'endomorphisme nul de  $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ .

10. Démontrer que si  $A$  est nilpotente, et si  $\text{comm}_A$  est l'endomorphisme nul, alors  $A$  est la matrice nulle.

D'après la partie I, l'endomorphisme  $\text{comm}_A$  admet une décomposition de DUNFORD de la forme  $\text{comm}_A = d + n$ , où les endomorphismes diagonalisable  $d$  et nilpotent  $n$  commutent :  $dn = nd$ .

11. Déterminer la décomposition de DUNFORD de  $\text{comm}_A$  à l'aide de celle de  $A$  et conclure.

## PARTIE III - Formes bilinéaires sur un espace vectoriel complexe

Soit  $p$  un entier strictement positif et  $E$  un espace vectoriel de dimension  $p$  sur  $\mathbf{C}$ . On note  $E^*$  l'espace vectoriel des formes linéaires sur  $E$  :  $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbf{C})$ .

On considère une forme bilinéaire symétrique  $b$  sur  $\mathbf{C}$ , c'est-à-dire une application  $b : E \times E \rightarrow \mathbf{C}$  linéaire par rapport à chacune de ses deux composantes et telle que  $b(x, y) = b(y, x)$  pour tous  $x$  et  $y$  dans  $E$ . Si  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ , on appelle *orthogonal de  $F$  relativement à  $b$*  le sous-espace vectoriel de  $E$  défini par

$$F^{\perp b} = \{x \in E \mid \forall y \in F, b(x, y) = 0\} .$$

On suppose  $b$  non dégénérée, c'est-à-dire qu'on a  $E^{\perp b} = \{0\}$ .

12. Soit  $u$  un endomorphisme de  $E$ . Démontrer les implications suivantes :

$$(i) \ u \text{ est diagonalisable} \implies (ii) \ \text{Ker}(u) = \text{Ker}(u^2) \implies (iii) \ \text{Ker}(u) \cap \text{Im}(u) = \{0\} .$$

Soit  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$ , de dimension  $q$ , et soit  $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_q)$  une base de  $F$ . Pour tout  $i$  dans  $\{1; \dots; q\}$ , on note  $\varphi_i$  la forme linéaire sur  $E$  définie par  $\varphi_i(x) = b(\varepsilon_i, x)$ .

13. Démontrer que  $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_q)$  est une famille libre de  $E^*$ .

On complète cette famille libre en une base  $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_p)$  de  $E^*$  et on note  $(e_1, e_2, \dots, e_p)$  la base de  $E$  antéduale, c'est-à-dire telle que pour tous  $i$  et  $j$  dans  $\{1; \dots; p\}$  on ait  $\varphi_i(e_j)$  soit nul, sauf si  $i = j$  auquel cas c'est égal à 1.

On ne demande pas de vérifier l'existence et l'unicité de la base antéduale.

14. Démontrer que  $F^{\perp b}$  est engendré par  $(e_{q+1}, e_{q+2}, \dots, e_p)$ , et en déduire la valeur de  $\dim(F) + \dim(F^{\perp b})$ .

## PARTIE IV - Critère de KLARÈS

Le but de cette partie est de démontrer que la matrice  $A$  est diagonalisable si et seulement si  $\text{Ker}(\text{comm}_A) = \text{Ker}((\text{comm}_A)^2)$ .

15. Démontrer que l'application  $\varphi$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbf{C}) \times \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$  dans  $\mathbf{C}$  définie par la formule  $\varphi(X, Y) = \text{Tr}(XY)$  pour tous  $X$  et  $Y$  dans  $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ , est une forme bilinéaire symétrique non dégénérée.
16. Établir l'égalité  $(\text{Ker}(\text{comm}_A))^{\perp\varphi} = \text{Im}(\text{comm}_A)$ .
17. En déduire que si  $A$  est nilpotente, il existe une matrice  $X$  dans  $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$  telle que  $A = \text{comm}_A(X)$ . Calculer alors  $\text{comm}_{A+\lambda I_n}(X)$  pour tout  $\lambda$  dans  $\mathbf{C}$ .

Soit  $D$  et  $N$  les matrices de la décomposition de DUNFORD de  $A$  définies à la question 4.

18. Démontrer qu'il existe une matrice  $X$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$  telle que  $N = \text{comm}_A(X)$ .
19. Conclure.

## PARTIE I

1. D'après le théorème de D'ALEMBERT-GAUSS,  $\chi_A$  est scindé et donc, d'après les définitions données,  $\chi_A = \prod_{i=1}^r P_i$ . Comme les  $\lambda_i$  sont tous distincts, les polynômes  $P_i$  sont premiers entre eux deux à deux et donc, d'après le lemme de décomposition des noyaux, les noyaux  $\text{Ker}(P_i(f))$ , i.e. les  $F_i$ , sont en somme directe et de somme  $\text{Ker}(\chi_A(f))$ . Enfin le théorème de CAYLEY-HAMILTON assure que  $\chi_A$

est un polynôme annulateur de  $f$  et il vient

$$\mathbf{C}^n = \bigoplus_{i=1}^r F_i.$$

Éléments de notation : D'ALEMBERT-GAUSS : 1 ; Premiers entre eux : 1 ; Décomposition des noyaux : 1 ; CAYLEY-HAMILTON : 1.

2. Soit  $i$  dans  $\llbracket 1; r \rrbracket$ . Comme  $f$  et  $P_i(f)$  commutent,  $\text{Ker}(P_i(f))$  est  $f$ -stable et donc  $f_i$  est bien un endomorphisme (induit par  $f$ ) de  $F_i$ . Il en résulte que  $P_i(f_i)$  est l'endomorphisme induit par  $P_i(f)$  sur  $F_i$ , i.e. 0, et donc  $P_i$  est un polynôme annulateur de  $f_i$ . Il en résulte que le polynôme minimal de  $f_i$  est une puissance de  $X - \lambda_i$  et donc que le spectre de  $f_i$  est réduit à  $\{\lambda_i\}$ . Comme le polynôme caractéristique de  $f_i$  est scindé, puisque défini sur  $\mathbf{C}$ , et que ses racines sont les éléments du spectre de  $f_i$ , il est donc égal à une puissance de  $X - \lambda_i$ . Notons  $\beta_i$  cette puissance.

Soit  $\mathcal{B}$  une base de  $\mathbf{C}^n$  adaptée à la décomposition  $\mathbf{C}^n = \bigoplus_{i=1}^r F_i$ , disons  $\mathcal{B} = \bigcup_{i=1}^r \mathcal{B}_i$ . La matrice de  $f$  relativement à  $\mathcal{B}$  est diagonale par blocs et dans chacun des blocs se trouve la matrice de  $f_i$  dans la base  $\mathcal{B}_i$ . Il en résulte que le polynôme caractéristique de  $f$  est le produit des polynômes caractéristiques des  $f_i$ , i.e.  $\chi_A = \prod_{i=1}^r (X - \lambda_i)^{\beta_i}$ . Par unicité de la décomposition primaire de  $\chi_A$ , il vient  $\beta_i = \alpha_i$ , pour

tout  $i$  dans  $\llbracket 1; r \rrbracket$ , i.e. le polynôme caractéristique de  $f_i$  est  $P_i$ .

Éléments de notation :  $f$ -stable : 1 ;  $P_i$  annulateur : 1 ; Spectre : 1 ; Polynôme caractéristique : 1.

3. Soit  $\mathcal{B}$  une base de  $\mathbf{C}^n$  adaptée à la décomposition  $\mathbf{C}^n = \bigoplus_{i=1}^r F_i$ , disons  $\mathcal{B} = \bigcup_{i=1}^r \mathcal{B}_i$ . On note, pour  $i$  dans  $\llbracket 1; r \rrbracket$ ,  $n_i = f_i - \lambda_i \text{Id}_{F_i}$ . Puisque  $P_i$  annule  $f_i$ ,  $n_i$  est nilpotent (d'indice inférieur à  $\alpha_i$ ) et donc  $f_i$  est somme de l'homothétie  $\lambda_i \text{Id}_{F_i}$  et de l'endomorphisme nilpotent  $n_i$ . En notant  $N_i$  la matrice de  $n_i$  dans la base  $\mathcal{B}_i$ , la matrice de  $f_i$  est donc somme de  $\lambda_i I_{\alpha_i}$  et de  $N_i$ , avec  $N_i$  nilpotente et donc la matrice de  $f$  dans la base  $\mathcal{B}$  est de la forme  $A'$  donnée par l'énoncé. Si  $P$  est la matrice de passage de

la base canonique à la base  $\mathcal{B}$ , il vient

$$A' = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{\alpha_1} + N_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_r I_{\alpha_r} + N_r \end{pmatrix}.$$

Éléments de notation : Base adaptée : 1 ;  $f_i$  : 1 ;  $N_i$  nilpotent : 2.

4. On pose  $D = P \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{\alpha_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_r I_{\alpha_r} \end{pmatrix} P^{-1}$  et  $N = P \begin{pmatrix} N_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & N_r \end{pmatrix} P^{-1}$ . Alors  $DN =$
- $$ND = P \begin{pmatrix} \lambda_1 N_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_r N_r \end{pmatrix} P^{-1}.$$
- De plus  $D$  est diagonalisable par construction et, puisque

$M \mapsto PMP^{-1}$  est un morphisme d'anneaux,  $N$  est nilpotente (d'indice inférieur à  $\max_{1 \leq i \leq r} \alpha_i$ ), i.e.

$A = D + N$  avec  $D$  diagonalisable et  $N$  nilpotente, commutant entre elles.

Éléments de notation :  $D$  et  $N : 1$ ;  $DN = ND : 1$ ;  $D$  diagonalisable;  $N$  nilpotente : 1.

5. Un calcul direct donne  $P = X^3 - 5X^2 + 8X - 4$ , i.e.  $P = (X - 2)^2(X - 1)$ . On a  $F_1 = \text{Vect}(e_2 + e_3)$ ,  $\text{Ker}(f - 2\text{Id}) = \text{Vect}(e_1 + e_2)$ . D'après la question 1,  $F_2$  est l'image de  $A - I_3$ , et est engendré par  $2e_1 + 2e_2 + e_3$  et  $e_1 + e_2 + e_3$ , i.e. d'équation  $x = y$ . Comme  $f(e_3) = 2e_3 + (e_1 + e_2)$ ,  $e_1 + e_2$  est dans l'image de  $(A - 2I_3)(A - I_3)$ , le théorème de CAYLEY-HAMILTON montre qu'il est propre pour la valeur propre 2 (ce qu'on peut vérifier directement). On est ainsi amené à définir les endomorphismes  $d$  et  $n$  tels que :  $d(e_2 + e_3) = e_2 + e_3$ ,  $d(e_1 + e_2) = 2(e_1 + e_2)$  et  $d(e_3) = 2e_3$ ,  $n(e_1 + e_2) = n(e_2 + e_3) = 0$  et  $n(e_3) = e_1 + e_2$ . Ainsi

la décomposition de DUNFORD de  $A$  est  $A = D + N$  avec  $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$  et  $N = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

Éléments de notation :  $\chi_A$  et  $F_1 : 1$ ;  $F_2 : 1$ ;  $\text{Ker}(A - 2I_3) : 1$ ;  $D$  et  $N : 1$ .

Remarque : les plans stables correspondent aux vecteurs propres pour la transposée de  $A$ . On trouve ainsi les plans d'équations  $x - y + z = 0$  et  $x - y = 0$ , ce qui permet de retrouver  $F_2$ .

## PARTIE II

6. Soit  $X$  dans  $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ , il vient  $\text{conj}_{P^{-1}} \circ \text{comm}_A \circ \text{conj}_P(X) = P^{-1}APX - XP^{-1}AP$  et donc

$\text{conj}_{P^{-1}} \circ \text{comm}_A \circ \text{conj}_P = \text{comm}_{\text{conj}_{P^{-1}}(A)}$ .

Éléments de notation : 0/4.

7. Soit  $a_1, \dots, a_n$  les coefficients diagonaux de  $A$ . Pour  $i$  et  $j$  dans  $\llbracket 1; n \rrbracket$ , on a  $\text{comm}_A(E_{i,j}) = AE_{i,j} - E_{i,j}A = a_i E_{i,j} - a_j E_{i,j} = (a_i - a_j)E_{i,j}$ . Comme  $E_{i,j}$  est non nul, on conclut que

$E_{i,j}$  est vecteur propre de  $\text{comm}_A$ . Comme  $(E_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$  est une base de  $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ , il en résulte que

$\text{comm}_A$  est diagonalisable et que le spectre de  $\text{comm}_A$  est  $\left\{ a_i - a_j \mid (i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2 \right\}$ .

Éléments de notation : Vecteur propre : 2; Spectre : 2.

8. Si  $A$  est diagonalisable, on dispose de  $Q$  dans  $\text{GL}_n(\mathbf{C})$  tel que  $\text{conj}_{Q^{-1}}(A)$  soit diagonale. D'après ce qui précède,  $\text{comm}_{\text{conj}_{Q^{-1}}(A)}$  est donc diagonalisable, i.e.  $\text{conj}_{Q^{-1}} \circ \text{comm}_A \circ \text{conj}_Q$  est diagonalisable.

Or  $\text{conj}_{Q^{-1}} = (\text{conj}_Q)^{-1}$  et donc  $\text{comm}_A$  est conjuguée (dans  $\text{End } \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ ) à un endomorphisme diagonalisable et l'est donc lui-même, i.e.  $\text{comm}_A$  est diagonalisable.

Éléments de notation : Résultat : 4.

9. Par bilinéarité du produit matriciel, la multiplication à gauche et la multiplication à droite par  $A$  sont des applications linéaires. Comme elles commutent entre elles, la formule du binôme de NEWTON

fournit, pour  $X$  dans  $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$  et  $n$  entier supérieur ou égal à 1  $\text{comm}_A^n(X) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k A^{n-k} X A^k$ .

Si  $A$  est nilpotente, on dispose de  $p$  dans  $\mathbf{N}^*$  tel que  $A^p = 0$ . Or, pour  $k$  dans  $\llbracket 0; 2p - 1 \rrbracket$ , soit  $k \geq p$ , soit  $2p - 1 - k \geq p$  et donc, en appliquant la formule précédente, il vient  $\text{comm}_A^{2p-1} = 0$ . Il en résulte que  $\text{comm}_A$  est nilpotente.

Éléments de notation : Résultat : 4.

10. Si  $\text{comm}_A$  est nul, alors  $f$  commute à tous les éléments de  $\text{End}(E)$  et est donc une homothétie, i.e.  $A$  est scalaire. Or si  $A$  est nilpotente sa seule valeur propre est 0 et donc  $A$  est diagonale, de diagonale nulle, i.e.  $A = 0$ .

Éléments de notation : **Résultat : 4.**

11. Soit  $A = D + N$  la décomposition de DUNFORD de  $A$ . D'après ce qui précède  $\text{comm}_D$  et  $\text{comm}_N$  sont respectivement diagonalisable et nilpotent. Par linéarité de la multiplication matricielle, on a de plus  $\text{comm}_A = \text{comm}_{D+N} = \text{comm}_D + \text{comm}_N$ . Enfin un calcul direct montre qu'on a

$$\text{comm}_D \circ \text{comm}_N - \text{comm}_N \circ \text{comm}_D = \text{comm}_{DN - ND} = \text{comm}_0 = 0.$$

Par unicité de la décomposition de DUNFORD, celle-ci s'écrit  $\text{comm}_A = \text{comm}_D + \text{comm}_N$ .

Si  $\text{comm}_A$  est diagonalisable, alors d'après l'unicité de la décomposition de DUNFORD, celle-ci est  $\text{comm}_A = \text{comm}_A + 0$  et donc  $\text{comm}_N = 0$ , d'où  $N = 0$  d'après ce qui précède et donc  $A = D$ . Il en résulte que  $A$  est diagonalisable. La réciproque ayant déjà été démontrée, il vient

$A$  est diagonalisable si et seulement  $\text{comm}_A$  l'est.

Éléments de notation : **Commutativité : 1 ; DUNFORD : 1 ; CN : 2.**

### PARTIE III

12. Comme  $u^2$  commute à  $u$ ,  $\text{Ker}(u^2)$  est  $u$ -stable. Si  $u$  est diagonalisable, sa restriction à  $\text{Ker}(u^2)$  l'est aussi et y est annulée par le polynôme  $X^2$ , c'est donc que son polynôme minimal divise  $X^2$  et comme ce polynôme minimal est simplement scindé, c'est que c'est  $X$ , i.e.  $u$  est nul sur  $\text{Ker}(u^2)$  ou encore  $\text{Ker}(u^2) \subset \text{Ker}(u)$ . L'inclusion réciproque étant toujours vraie, on a  $\text{Ker}(u) = \text{Ker}(u^2)$ .

On a  $\text{Ker}(u) \cap \text{Im}(u) = \text{Ker}(u|_{\text{Im}(u)}) = u(\text{Ker}(u^2))$ . Par conséquent si  $\text{Ker}(u) = \text{Ker}(u^2)$ , il vient

$$\text{Ker}(u) \cap \text{Im}(u) = \{0\}.$$

Éléments de notation :  **$\text{Ker}(u) = \text{Ker}(u^2) : 2 ; \text{Ker}(u) \cap \text{Im}(u) : 2.$**

13. Par bilinéarité de  $b$ , l'application  $x \mapsto (y \mapsto b(x, y))$  est linéaire de  $E$  dans  $E^*$ . Puisque  $b$  est non-dégénérée, cette application est injective et donc, par égalité des dimensions entre  $E$  et  $E^*$ , elle est bijective. En particulier l'image d'une famille libre par cette application est également libre et ainsi la famille  $(\varphi_i)_{1 \leq i \leq q}$  est libre.

Éléments de notation : **Résultat : 4.**

14. Soit  $x$  dans  $E$ . On a donc  $x = \sum_{i=1}^p \varphi_i(x)e_i$  et, pour  $j \in \llbracket 1; q \rrbracket$ ,  $b(x, \varepsilon_j) = 0 \iff \varphi_j(x) = 0$ . De plus, par linéarité de  $b$  à droite et puisque  $(\varepsilon_i)_{1 \leq i \leq q}$  est une base de  $F$ ,  $x \in F^{\perp b} \iff \forall j \in \llbracket 1; q \rrbracket, b(x, \varepsilon_j) = 0$ . Il en résulte  $F^{\perp b} = \text{Vect}(e_{q+1}, \dots, e_p)$ .

Comme  $(e_{q+1}, \dots, e_p)$  est une sous-famille d'une base, elle est libre et forme donc une base de  $F^{\perp b}$ . Il en résulte  $\dim(F^{\perp b}) = p - q$ , i.e.  $\dim F + \dim F^{\perp b} = \dim(E)$ .

Éléments de notation : **CN : 1 ; CS : 1 ; Libre : 1 ; Dimension : 1.**

### PARTIE IV

15. L'application produit  $(M, N) \mapsto MN$  est bilinéaire de  $\mathcal{M}_n(\mathbf{C}) \times \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$  dans  $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$  et la trace est linéaire, donc  $\varphi$  est bilinéaire. Plus précisément, soit  $M$  et  $N$  dans  $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ . On a  $\text{Tr}(MN) =$

$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n E_{i,j}^*(M)E_{j,i}^*(N)$  et donc  $\varphi$  est symétrique. De plus  $\varphi(M, {}^t\overline{M})$  est la somme des modules au carré de tous les termes de  $M$ . Il en résulte  $\varphi(M, {}^t\overline{M}) = 0 \Leftrightarrow M = 0$  et en particulier  $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})^{\perp\varphi} = \{0\}$ , i.e.  $\varphi$  est une forme bilinéaire symétrique non dégénérée.

Éléments de notation : **Forme bilinéaire : 1 ; Symétrique : 1 ; Non-dégénérée : 2.**

16. Soit  $M$  dans  $\text{Im}(\text{comm}_A)$ . On dispose alors de  $X$  dans  $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$  tel que  $M = AX - XA$ . Soit maintenant  $N$  dans  $\text{Ker}(\text{comm}_A)$ , i.e. tel que  $A$  et  $N$  commutent. Il vient

$$\begin{aligned} \text{Tr}(MN) &= \text{Tr}(AXN - XAN) = \text{Tr}(AXN) - \text{Tr}(XAN) = \varphi(A, XN) - \varphi(X, AN) \\ &= \varphi(XN, A) - \varphi(X, NA) = \text{Tr}(XNA) - \text{Tr}(XNA) = 0 \end{aligned}$$

par symétrie de  $\varphi$  et puisque  $A$  et  $N$  commutent. Il en résulte  $M \in (\text{Ker}(\text{comm}_A))^{\perp\varphi}$ . Or d'après le théorème du rang et les deux questions précédentes les dimensions de  $\text{Im}(\text{comm}_A)$  et  $(\text{Ker}(\text{comm}_A))^{\perp\varphi}$  sont toutes deux égales à  $\text{codim}(\text{Ker}(\text{comm}_A))$ . Il en résulte qu'il sont égaux, i.e.

$$\text{Im}(\text{comm}_A) = (\text{Ker}(\text{comm}_A))^{\perp\varphi}.$$

Éléments de notation : **Inclusion : 2 ; Dimensions : 2.**

17. Soit  $M$  dans  $\text{Ker}(\text{comm}_A)$ , i.e.  $M$  commutant à  $A$ . Si  $A$  est nilpotente, on dispose de  $k$  dans  $\mathbf{N}^*$  tel que  $A^k = 0$  et alors  $(AM)^k = A^k M^k = 0$  et donc  $AM$  est nilpotente. Toutes ses valeurs propres sont donc nulles et, puisque le corps de base est  $\mathbf{C}$  et donc que  $AM$  est trigonalisable, sa trace est la somme de ses valeurs propres, i.e. 0. Donc  $A \in (\text{Ker}(\text{comm}_A))^{\perp\varphi}$ . D'après ce qui précède  $A \in \text{Im}(\text{comm}_A)$ , i.e.

$$\exists X \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C}), \text{comm}_A(X) = A.$$

Soit  $\lambda$  dans  $\mathbf{C}$ , on a  $\text{comm}_{A+\lambda I_n} = \text{comm}_A + \lambda \text{comm}_{I_n} = \text{comm}_A$ , d'où  $\text{comm}_{A+\lambda I_n}(X) = A$ .

Éléments de notation : **Spectre : 1 ; Trace : 1 ; Résultat : 1 ;  $A + \lambda I_n$  : 1.**

18. Soit  $i$  dans  $\llbracket 1; r \rrbracket$  et  $\mathcal{B}_i$  une base de  $F_i$ . On écrit  $f_i = d_i + n_i$  la décomposition de DUNFORD de la restriction de  $f$  à  $F_i$ . On a donc  $d_i = \lambda_i \text{Id}_{F_i}$ . Soit  $A_i$  la matrice de  $f_i$  dans  $\mathcal{B}_i$  et  $D_i + N_i$  sa décomposition de DUNFORD. D'après ce qui précède, il existe une matrice  $X_i$  dans  $\mathcal{M}_{\alpha_i}(\mathbf{C})$  telle que  $\text{comm}_{N_i + \lambda_i I_{\alpha_i}}(X_i) = N_i$ , i.e.  $N_i = \text{comm}_{A_i}(X_i)$ . Soit  $u_i$  l'endomorphisme de  $F_i$  associé à  $X_i$  relativement à  $\mathcal{B}_i$  et  $u$  l'endomorphisme de  $\mathbf{C}^n$  dont les restrictions aux  $F_i$  sont les  $u_i$ . Alors, relativement à  $\bigcup_{i=1}^r \mathcal{B}_i$ , les matrices de  $f$ ,  $n$  et  $u$  sont diagonales par blocs et dans ces blocs sont respectivement  $A_i$ ,  $N_i$  et  $X_i$ . Comme  $A_i X_i - X_i A_i = N_i$ , on en déduit  $f \circ u - u \circ f = n$  et donc, en prenant les matrices de ces endomorphismes dans la base canonique, il vient  $\exists X \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C}), \text{comm}_A(X) = N$ .

Éléments de notation : **Résultat : 4.**

19. Si  $A$  est diagonalisable, alors  $\text{comm}_A$  aussi d'après 8) et donc  $\text{Ker}(\text{comm}_A) = \text{Ker}(\text{comm}_A^2)$ , d'après 12). Réciproquement soit  $A = D + N$  la décomposition de DUNFORD de  $A$ . Comme  $D$  et  $N$  commutent, il en est de même de  $A$  et  $N$ , donc  $N \in \text{Ker}(\text{comm}_A)$ . On dispose également de  $X$  tel que  $\text{comm}_A(X) = N$ , d'après ce qui précède, et donc  $X \in \text{Ker}(\text{comm}_A^2)$ . Par conséquent, puisque  $\text{Ker}(\text{comm}_A) = \text{Ker}(\text{comm}_A^2)$ ,  $0 = \text{comm}_A(X) = N$  et donc  $A = D$ , i.e.  $A$  est diagonalisable. Il vient

$$A \text{ est diagonalisable si et seulement si } \text{Ker}(\text{comm}_A) = \text{Ker}(\text{comm}_A^2).$$

Éléments de notation : **CN : 1 ; CS : 3.**