Mines-Ponts 2011 - MP - Première composition

Soit n un entier naturel non nul et $\mathscr{M}_n(\mathbf{C})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients complexes. On note 0_n la matrice nulle et I_n la matrice identité de $\mathscr{M}_n(\mathbf{C})$. La *trace* d'une matrice U de $\mathscr{M}_n(\mathbf{C})$ est notée $\mathrm{tr}(U)$. On dit que deux matrices U et V de $\mathscr{M}_n(\mathbf{C})$ *commutent* si $UV = VU$. Une matrice N de $\mathscr{M}_n(\mathbf{C})$ est dite *nilpotente* s'il existe un entier k strictement positif pour lequel $N^k = 0_n$.

Dans tout le problème, on considère une matrice A de $\mathscr{M}_n(\mathbf{C})$ et on note f l'endomorphisme dont la matrice dans la base canonique de $\mathbf{C}^n$ est A. Le polynôme caractéristique de A est noté χ_A et les valeurs propres complexes distinctes de A sont notées λ_1, λ_2, ..., λ_r. Pour tout i dans $\{1;\ldots;r\}$ on note :

— α_i l'ordre de multiplicité de la valeur propre λ_i, c'est-à-dire l'ordre de multiplicité de la racine λ_i du polynôme P ;

— P_i le polynôme défini par $P_i = (X_i - \lambda_i)^{\alpha_i}$;

— F_i le sous-espace vectoriel de $\mathbf{C}^n$ défini par $F_i = \mathrm{Ker}((f - \lambda_i \mathrm{Id}_{\mathbf{C}^n})^{\alpha_i})$;

— f_i l'endomorphisme de F_i obtenu par restriction de f à F_i.

La partie II *à l'exception de la question* 11, *est indépendante de la partie* I. *La partie* III *est indépendante des parties précédentes.*

PARTIE I - Décomposition de Jordan-Chevalley

1. Justifier que l'espace vectoriel $\mathbf{C}^n$ est somme directe des espaces F_i :

$$\mathbf{C}^n = \bigoplus_{i=1}^{r} F_i\ .$$

2. En considérant une base de $\mathbf{C}^n$ adaptée à la somme directe précédente, démontrer que pour tout i dans $\{1;\ldots;r\}$, le polynôme caractéristique de f_i est P_i. (On pourra d'abord établir que P_i est un polynôme annulateur de f_i.)
3. Démontrer qu'il existe une matrice inversible P de $\mathscr{M}_n(\mathbf{C})$ telle que A' donnée par $A' = P^{-1}AP$ soit une matrice définie par blocs de la forme suivante :

$$A' = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{\alpha_1} + N_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_r I_{\alpha_r} + N_r \end{pmatrix}$$

où N_i dans $\mathscr{M}_{\alpha_i}(\mathbf{C})$ est nilpotente pour tout i dans $\{1;\ldots;r\}$.

4. En déduire que la matrice A s'écrit sous la forme $A = D + N$, où D est une matrice diagonalisable et N une matrice nilpotente de $\mathscr{M}_n(\mathbf{C})$ qui commutent.

Les matrices D et N vérifiant ces conditions constituent la *décomposition de* Jordan-Chevalley de la matrice A. Dans toute la suite du problème, on admettra l'*unicité* de cette décomposition, c'est-à-dire que D et N sont déterminées de façon unique par A.
Un exemple pour $n = 3$:

5. Calculer la décomposition de Jordan-Chevalley de A si $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

PARTIE II - Commutation et conjugaison

Pour toute matrice B et toute matrice inversible P de $\mathscr{M}_n(\mathbf{C})$, on note comm_B et conj_P les endomorphismes de $\mathscr{M}_n(\mathbf{C})$ définis par :

$$\forall X \in \mathscr{M}_n(\mathbf{C}), \qquad \begin{cases} \mathrm{comm}_B(X) & = & BX - XB \\ \mathrm{conj}_P(X) & = & PXP^{-1} . \end{cases}$$

Le but de cette partie est de démontrer que A est diagonalisable si et seulement si comm_A est diagonalisable.

6. Soit P une matrice inversible de $\mathscr{M}_n(\mathbf{C})$. Calculer $\mathrm{conj}_{P^{-1}} \circ \mathrm{comm}_A \circ \mathrm{conj}_P$.

Pour tous i et j dans $\{1; \cdots; n\}$ on note $E_{i,j}$ la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbf{C})$ dont tous les coefficients sont nuls, sauf celui à l'intersection de la i^{e} ligne et de la j^{e} colonne qui est égal à 1.

7. Si A est une matrice diagonale, démontrer que pour tous i et j dans $\{1; \cdots; n\}$, comm_A admet $E_{i,j}$ comme vecteur propre. Déterminer l'ensemble des valeurs propres de comm_A.
8. En déduire que si A est diagonalisable, comm_A l'est aussi.
9. Démontrer que si A est nilpotente, comm_A l'est également, c'est-à-dire qu'il existe un entier k strictement positif pour lequel $(\mathrm{comm}_A)^k$ est l'endomorphisme nul de $\mathscr{M}_n(\mathbf{C})$.
10. Démontrer que si A est nilpotente, et si comm_A est l'endomorphisme nul, alors A est la matrice nulle.

D'après la partie I, l'endomorphisme comm_A admet une décomposition de Jordan-Chevalley de la forme $\mathrm{comm}_A = d + n$, où les endomorphismes diagonalisable d et nilpotent n commutent : $dn = nd$.

11. Déterminer la décomposition de Jordan-Chevalley de comm_A à l'aide de celle de A et conclure.

PARTIE III - Formes bilinéaires sur un espace vectoriel complexe

Soit p un entier strictement positif et E un espace vectoriel de dimension p sur $\mathbf{C}$. On note E^* l'espace vectoriel des formes linéaires sur E : $E^* = \mathscr{L}(E, \mathbf{C})$.

On considère une forme bilinéaire symétrique b sur $\mathbf{C}$, c'est-à-dire une application $b : E \times E \to \mathbf{C}$ *linéaire par rapport à chacune de ses deux composantes* et telle que $b(x, y) = b(y, x)$ pour tous x et y dans E. Si F est un sous-espace vectoriel de E, on appelle *orthogonal de F relativement à b* le sous-espace vectoriel de E défini par

$$F^{\perp_b} = \{x \in E \mid \forall y \in F \, , \; b(x, y) = 0\} \; .$$

On suppose b *non dégénérée*, c'est-à-dire qu'on a $E^{\perp_b} = \{0\}$.

12. Soit u un endomorphisme de E. Démontrer les implications suivantes :

$$(i) \; u \text{ est diagonalisable} \Longrightarrow (ii) \; \mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Ker}(u^2) \Longrightarrow (iii) \; \mathrm{Ker}(u) \cap \mathrm{Im}(u) = \{0\} \; .$$

Soit F un sous-espace vectoriel de E, de dimension q, et soit $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_q)$ une base de F. Pour tout i dans $\{1; \ldots; q\}$, on note φ_i la forme linéaire sur E définie par $\varphi_i(x) = b(\varepsilon_i, x)$.

13. Démontrer que $(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_q)$ est une famille libre de E^*.

On complète cette famille libre en une base $(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_p)$ de E^* et on note $(e_1, e_2, \ldots, e_p)$ la base de E *antéduale*, c'est-à-dire telle que pour tous i et j dans $\{1; \ldots; p\}$ on ait $\varphi_i(e_j)$ soit nul, sauf si $i = j$ auquel cas c'est égal à 1.

On ne demande pas de vérifier l'existence et l'unicité de la base antéduale.

14. Démontrer que $F^{\perp_b}$ est engendré par $(e_{q+1}, e_{q+2}, \ldots, e_p)$, et en déduire la valeur de $\dim(F) + \dim(F^{\perp_b})$.

PARTIE IV - Critère de Klarès

Le but de cette partie est de démontrer que la matrice A est diagonalisable si et seulement si $\operatorname{Ker}(\operatorname{comm}_A) = \operatorname{Ker}((\operatorname{comm}_A)^2)$.

15. Démontrer que l'application φ de $\mathscr{M}_n(\mathbf{C}) \times \mathscr{M}_n(\mathbf{C})$ dans $\mathbf{C}$ définie par la formule $\varphi(X, Y) = \operatorname{tr}(XY)$ pour tous X et Y dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{C})$, est une forme bilinéaire symétrique non dégénérée.
16. Établir l'égalité $(\operatorname{Ker}(\operatorname{comm}_A))^{\perp_\varphi} = \operatorname{Im}(\operatorname{comm}_A)$.
17. En déduire que si A est nilpotente, il existe une matrice X dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{C})$ telle que $A = \operatorname{comm}_A(X)$. Calculer alors $\operatorname{comm}_{A+\lambda I_n}(X)$ pour tout λ dans $\mathbf{C}$.

Soit D et N les matrices de la décomposition de Jordan-Chevalley de A définies à la question 4.

18. Démontrer qu'il existe une matrice X de $\mathscr{M}_n(\mathbf{C})$ telle que $N = \operatorname{comm}_A(X)$.
19. Conclure.

MINES-PONTS 2011 - MP - PREMIÈRE COMPOSITION

PARTIE I

1. D'après le théorème de D'ALEMBERT-GAUSS, χ_A est scindé et donc, d'après les définitions données, $\chi_A = \prod_{i=1}^{r} P_i$. Comme les λ_i sont tous disctincs, les polynômes P_i sont premiers entre eux deux à deux et donc, d'après le lemme de décomposition des noyaux, les noyaux $\mathrm{Ker}(P_i(f))$, i.e. les F_i, sont en somme directe et de somme $\mathrm{Ker}(\chi_A(f))$. Enfin le théorème de CAYLEY-HAMILTON assure que χ_A est un polynôme annulateur de f et il vient $\boxed{\mathbf{C}^n = \bigoplus_{i=1}^{r} F_i.}$

Élements de notation : D'ALEMBERT-GAUSS : 1 ; Premiers entre eux : 1 ; Décomposition des noyaux : 1 ; CAYLEY-HAMILTON : 1.

2. Soit i dans $[\![1;r]\!]$. Comme f et $P_i(f)$ commutent, $\mathrm{Ker}(P_i(f))$ est f-stable et donc f_i est bien un endomorphisme (induit par f) de F_i. Il en résulte que $P_i(f_i)$ est l'endomorphisme induit par $P_i(f)$ sur F_i. Donc que le spectre de f_i est inclus dans les racines de P_i, i.e. est réduit à $\{\lambda_i\}$. Comme le polynôme caractéristique de f_i est scindé, puisque défini sur $\mathbf{C}$, et que ses racines sont les éléments du spectre de f_i, il est donc égal à une puissance de $X - \lambda_i$. Notons β_i cette puissance.
Soit $\mathcal{B}$ une base de $\mathbf{C}^n$ adaptée à la décomposition $\mathbf{C}^n = \bigoplus_{i=1}^{r} F_i$, disons $\mathcal{B} = \bigcup_{i=1}^{r} \mathcal{B}_i$. La matrice de f relativement à $\mathcal{B}$ est diagonale par blocs et dans chacun des blocs se trouve la matrice de f_i dans la base $\mathcal{B}_i$. Il en résulte que le polynôme caractéristique de f est le produit des polynômes caractéristiques des f_i, i.e. $\chi_A = \prod_{i=1}^{r} (X - \lambda_i)^{\beta_i}$. Par unicité de la décomposition primaire de χ_A, il vient $\beta_i = \alpha_i$, pour tout i dans $[\![1;r]\!]$, i.e. $\boxed{\text{le polynôme caractéristique de } f_i \text{ est } P_i.}$

Élements de notation : f-stable : 1 ; P_i annulateur : 1 ; Spectre : 1 ; Polynôme caractéristique : 1.

3. Soit $\mathcal{B}$ une base de $\mathbf{C}^n$ adaptée à la décomposition $\mathbf{C}^n = \bigoplus_{i=1}^{r} F_i$, disons $\mathcal{B} = \bigcup_{i=1}^{r} \mathcal{B}_i$. On note, pour i dans $[\![1;r]\!]$, $n_i = f_i - \lambda_i \mathrm{Id}_{F_i}$. Puisque $P_i(f_i) = 0$, n_i est nilpotent (d'indice inférieur à α_i) et donc f_i est somme de l'homothétie $\lambda_i \mathrm{Id}_{F_i}$ et de l'endomorphisme nilpotent n_i. En notant N_i la matrice de n_i dans la base $\mathcal{B}_i$, la matrice de f_i est donc somme de $\lambda_i I_{\alpha_i}$ et de N_i, avec N_i nilpotente et donc la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est de la forme A' donnée par l'énoncé. Si P est la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathcal{B}$, il vient
$$\boxed{A' = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{\alpha_1} + N_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_r I_{\alpha_r} + N_r \end{pmatrix}}.$$

Élements de notation : Base adaptée : 1 ; f_i : 1 ; N_i nilpotent : 2.

4. On pose $D = P \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{\alpha_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_r I_{\alpha_r} \end{pmatrix} P^{-1}$ et $N = P \begin{pmatrix} N_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & N_r \end{pmatrix} P^{-1}$. Alors $DN =$
$ND = P \begin{pmatrix} \lambda_1 N_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_r N_r \end{pmatrix} P^{-1}$. De plus D est diagonalisable par construction et, puisque

$M \mapsto PMP^{-1}$ est un morphisme d'anneaux, N est nilpotente (d'indice inférieur à $\max_{1\leq i\leq r} \alpha_i$), i.e.

$\boxed{A = D + N \text{ avec } D \text{ diagonalisable et } N \text{ nilpotente, commutant entre elles.}}$

Élements de notation : D et N : 1 ; $DN = ND$: 1 ; D diagonalisable ; N nilpotente : 1.

5. Un calcul direct donne $P = X^3 - 5X^2 + 8X - 4$, i.e. $P = (X-2)^2(X-1)$. On a $F_1 = \mathrm{Vect}\,(e_2 + e_3)$, $\mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{Id}) = \mathrm{Vect}\,(e_1 + e_2)$. D'après la question 1, F_2 est l'image de $A - I_3$, et est engendré par $2e_1 + 2e_2 + e_3$ et $e_1 + e_2 + e_3$, i.e. d'équation $x = y$. Comme $f(e_3) = 2e_3 + (e_1 + e_2)$, $e_1 + e_2$ est dans l'image de $(A - 2I_3)(A - I_3)$, le théorème de Cayley-Hamilton montre qu'il est propre pour la valeur propre 2 (ce qu'on peut vérifier directement). On est ainsi amené à définir les endomorphismes d et n tels que : $d(e_2 + e_3) = e_2 + e_3$, $d(e_1 + e_2) = 2(e_1 + e_2)$ et $d(e_3) = 2e_3$, $n(e_1 + e_2) = n(e_2 + e_3) = 0$ et $n(e_3) = e_1 + e_2$. Ainsi la décomposition de Jordan-Chevalley de A est $\boxed{A = D + N \text{ avec } D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } N = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}.$

Élements de notation : χ_A et F_1 : 1 ; F_2 : 1 ; $\mathrm{Ker}(A - 2I_3)$: 1 ; D et N : 1.

Remarque : les plans stables correspondent aux vecteurs propres pour la transposée de A. On trouve ainsi les plans d'équations $x - y + z = 0$ et $x - y = 0$, ce qui permet de retrouver F_2.

PARTIE II

6. Soit X dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{C})$, il vient $\mathrm{conj}_{P^{-1}} \circ \mathrm{comm}_A \circ \mathrm{conj}_P(X) = P^{-1}APX - XP^{-1}AP$ et donc $\boxed{\mathrm{conj}_{P^{-1}} \circ \mathrm{comm}_A \circ \mathrm{conj}_P = \mathrm{comm}_{\mathrm{conj}_{P^{-1}}(A)}.}$

Élements de notation : 0/4.

7. Soit $a_1, \ldots, a_n$ les coefficients diagonaux de A. Pour i et j dans $[\![1; n]\!]$, on a $\mathrm{comm}_A(E_{i,j}) = AE_{i,j} - E_{i,j}A = a_iE_{i,j} - a_jE_{i,j} = (a_i - a_j)E_{i,j}$. Comme $E_{i,j}$ est non nul, on conclut que $\boxed{E_{i,j} \text{ est vecteur propre de } \mathrm{comm}_A.}$ Comme $(E_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ est une base de $\mathscr{M}_n(\mathbf{C})$, il en résulte que comm_A est diagonalisable et que $\boxed{\text{le spectre de } \mathrm{comm}_A \text{ est } \left\{a_i - a_j \;\middle|\; (i,j) \in [\![1; n]\!]^2\right\}.}$

Élements de notation : Vecteur propre : 2 ; Spectre : 2.

8. Si A est diagonalisable, on dispose de Q dans $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ tel que $\mathrm{conj}_{Q^{-1}}(A)$ soit diagonale. D'après ce qui précède, $\mathrm{comm}_{\mathrm{conj}_{Q^{-1}}(A)}$ est donc diagonalisable, i.e. $\mathrm{conj}_{Q^{-1}} \circ \mathrm{comm}_A \circ \mathrm{conj}_Q$ est diagonalisable. Or $\mathrm{conj}_{Q^{-1}} = \left(\mathrm{conj}_Q\right)^{-1}$ et donc comm_A est conjuguée (dans $\mathrm{End}\,\mathscr{M}_n(\mathbf{C})$) à un endomorphisme diagonalisable et l'est donc lui-même, i.e. $\boxed{\mathrm{comm}_A \text{ est diagonalisable.}}$

Élements de notation : Résultat : 4.

9. Par bilinéarité du produit matriciel, la multiplication à gauche et la multiplication à droite par A sont des applications linéaires. Comme elles commutent entre elles, la formule du binôme de Newton fournit, pour X dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{C})$ et n entier supérieur ou égal à 1 $\mathrm{comm}_A^n(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k A^{n-k} X A^k$.
Si A est nilpotente, on dispose de p dans $\mathbf{N}^*$ tel que $A^p = 0$. Or, pour k dans $[\![0; 2p-1]\!]$, soit $k \geq p$, soit $2p - 1 - k \geq p$ et donc, en appliquant la formule précédente, il vient $\mathrm{comm}_A^{2p-1} = 0$. Il en résulte que $\boxed{\mathrm{comm}_A \text{ est nilpotente.}}$

Élements de notation : Résultat : 4.

10. Si comm_A est nul, alors f commute à tous les éléments de $\mathrm{End}(E)$ et est donc une homothétie, i.e. A est scalaire. Or si A est nilpotente sa seule valeur propre est 0 et donc A est diagonale, de diagonale nulle, i.e. $\boxed{A = 0.}$

Élements de notation : Résultat : 4.

11. Soit $A = D + N$ la décomposition de JORDAN-CHEVALLEY de A. D'après ce qui précède comm_D et comm_N sont respectivement diagonalisable et nilpotent. Par linéarité de la multiplication matricielle, on a de plus $\mathrm{comm}_A = \mathrm{comm}_{D+N} = \mathrm{comm}_D + \mathrm{comm}_N$. Enfin un calcul direct montre qu'on a

$$\mathrm{comm}_D \circ \mathrm{comm}_N - \mathrm{comm}_N \circ \mathrm{comm}_D = \mathrm{comm}_{DN-ND} = \mathrm{comm}_0 = 0\ .$$

Par unicité de la décomposition de JORDAN-CHEVALLEY, celle-ci s'écrit $\boxed{\mathrm{comm}_A = \mathrm{comm}_D + \mathrm{comm}_N.}$ Si comm_A est diagonalisable, alors d'après l'unicité de la décomposition de JORDAN-CHEVALLEY, celle-ci est $\mathrm{comm}_A = \mathrm{comm}_A + 0$ et donc $\mathrm{comm}_N = 0$, d'où $N = 0$ d'après ce qui précède et donc $A = D$. Il en résulte que A est diagonalisable. La réciproque ayant déjà été démontrée, il vient $\boxed{A \text{ est diagonalisable si et seulement si } \mathrm{comm}_A \text{ l'est.}}$

Élements de notation : Commutativité : 1 ; JORDAN-CHEVALLEY : 1 ; CN : 2.

PARTIE III

12. Comme u^2 commute à u, $\mathrm{Ker}(u^2)$ est u-stable. Si u est diagonalisable, sa restriction à $\mathrm{Ker}(u^2)$ l'est aussi et toutes ses valeurs propres λ vérifient $\lambda^2 = 0$, i.e. u est nul sur $\mathrm{Ker}(u^2)$ ou encore $\mathrm{Ker}(u^2) \subset \mathrm{Ker}(u)$. L'inclusion réciproque étant toujours vraie, on a $\boxed{\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Ker}(u^2).}$

On a $\mathrm{Ker}(u) \cap \mathrm{Im}(u) = \mathrm{Ker}(u_{|\,\mathrm{Im}(u)}) = u(\mathrm{Ker}(u^2))$. Par conséquent si $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Ker}(u^2)$, il vient $\boxed{\mathrm{Ker}(u) \cap \mathrm{Im}(u) = \{0\}.}$

Élements de notation : $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Ker}(u^2)$: 2 ; $\mathrm{Ker}(u) \cap \mathrm{Im}(u)$: 2.

13. Par bilinéarité de b, l'application $x \mapsto (y \mapsto b(x, y))$ est linéaire de E dans E^*. Puisque b est non-dégénérée, cette application est injective et donc, par égalité des dimensions entre E et E^*, elle est bijective. En particulier l'image d'une famille libre par cette application est également libre et ainsi $\boxed{\text{la famille } (\varphi_i)_{1\leq i\leq q} \text{ est libre.}}$

Élements de notation : Résultat : 4.

14. Soit x dans E. On a donc $x = \sum_{i=1}^{p} \varphi_i(x)e_i$ et, pour $j \in [\![1; q]\!]$, $b(x, \varepsilon_j) = 0 \iff \varphi_j(x) = 0$. De plus, par linéarité de b à droite et puisque $(\varepsilon_i)_{1\leq i\leq q}$ est une base de F, $x \in F^{\perp_b} \iff \forall j \in [\![1; q]\!],\ b(x, \varepsilon_i) = 0$. Il en résulte $\boxed{F^{\perp_b} = \mathrm{Vect}\,(e_{q+1}, \ldots, e_p)).}$

Comme $(e_{q+1}, \ldots, e_p)$ est une sous-famille d'une base, elle est libre et forme donc une base de $F^{\perp_b}$. Il en résulte $\dim(F^{\perp_b}) = p - q$, i.e. $\boxed{\dim F + \dim F^{\perp_b} = \dim(E).}$

Élements de notation : CN : 1 ; CS : 1 ; Libre : 1 ; Dimension : 1.

PARTIE IV

15. L'application produit $(M, N) \mapsto MN$ est bilinéaire de $\mathscr{M}_n(\mathbf{C}) \times \mathscr{M}_n(\mathbf{C})$ dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{C})$ et la trace est linéaire, donc φ est bilinéaire. Plus précisément, soit M et N dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{C})$. On a $\mathrm{tr}(MN) =$

$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} E_{i,j}^*(M)E_{j,i}^*(N)$ et donc φ est symétrique. De plus $\varphi(M, \overline{M}^{\mathrm{T}})$ est la somme des modules au carré de tous les termes de M. Il en résulte $\varphi(M, \overline{M}^{\mathrm{T}}) = 0 \Leftrightarrow M = 0$ et en particulier $\mathscr{M}_n(\mathbf{C})^{\perp_\varphi} = \{0\}$, i.e. $\boxed{\varphi \text{ est une forme bilinéaire symétrique non dégénérée.}}$

Élements de notation : Forme bilinéaire : 1 ; Symétrique : 1 ; Non-dégénérée : 2.

16. Soit M dans $\mathrm{Im}(\mathrm{comm}_A)$. On dispose alors de X dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{C})$ tel que $M = AX - XA$. Soit maintenant N dans $\mathrm{Ker}(\mathrm{comm}_A)$, i.e. tel que A et N commutent. Il vient

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}(MN) &= \mathrm{tr}(AXN - XAN) = \mathrm{tr}(AXN) - \mathrm{tr}(XAN) = \varphi(A, XN) - \varphi(X, AN)\\ &= \varphi(XN, A) - \varphi(X, NA) = \mathrm{tr}(XNA) - \mathrm{tr}(XNA) = 0\end{aligned}$$

par symétrie de φ et puisque A et N commutent. Il en résulte $M \in (\mathrm{Ker}(\mathrm{comm}_A))^{\perp_\varphi}$. Or d'après le théorème du rang et les deux questions précédentes les dimensions de $\mathrm{Im}(\mathrm{comm}_A)$ et $(\mathrm{Ker}(\mathrm{comm}_A))^{\perp_\varphi}$ sont toutes deux égales à $\mathrm{codim}(\mathrm{Ker}(\mathrm{comm}_A))$. Il en résulte qu'il sont égaux, i.e.
$\boxed{\mathrm{Im}(\mathrm{comm}_A) = (\mathrm{Ker}(\mathrm{comm}_A))^{\perp_\varphi}.}$

Élements de notation : Inclusion : 2 ; Dimensions : 2.

17. Soit M dans $\mathrm{Ker}(\mathrm{comm}_A)$, i.e. M commutant à A. Si A est nilpotente, on dispose de k dans $\mathbf{N}^*$ tel que $A^k = 0$ et alors $(AM)^k = A^kM^k = 0$ et donc AM est nilpotente. Toutes ses valeurs propres sont donc nulles et, puisque le corps de base est $\mathbf{C}$ et donc que AM est trigonalisable, sa trace est la somme de ses valeurs propres, i.e. 0. Donc $A \in (\mathrm{Ker}(\mathrm{comm}_A))^{\perp_\varphi}$. D'après ce qui précède $A \in \mathrm{Im}(\mathrm{comm}_A)$, i.e.
$\boxed{\exists X \in \mathscr{M}_n(\mathbf{C}),\ \mathrm{comm}_A(X) = A.}$

Soit λ dans $\mathbf{C}$, on a $\mathrm{comm}_{A+\lambda I_n} = \mathrm{comm}_A + \lambda\,\mathrm{comm}_{I_n} = \mathrm{comm}_A$, d'où $\boxed{\mathrm{comm}_{A+\lambda I_n}(X) = A.}$

Élements de notation : Spectre : 1 ; Trace : 1 ; Résultat : 1 ; $A + \lambda I_n$: 1.

18. Soit i dans $[\![1;r]\!]$ et $\mathcal{B}_i$ une base de F_i. On écrit $f_i = d_i + n_i$ la décomposition de Jordan-Chevalley de la restriction de f à F_i. On a donc $d_i = \lambda_i \mathrm{Id}_{F_i}$. Soit A_i la matrice de f_i dans $\mathcal{B}_i$ et $D_i + N_i$ sa décomposition de Jordan-Chevalley. D'après ce qui précède, il existe une matrice X_i dans $\mathscr{M}_{\alpha_i}(\mathbf{C})$ telle que $\mathrm{comm}_{N_i+\lambda_i I_{\alpha_i}}(X_i) = N_i$, i.e. $N_i = \mathrm{comm}_{A_i}(X_i)$. Soit u_i l'endomorphisme de F_i associé à X_i relativement à $\mathcal{B}_i$ et u l'endomorphisme de $\mathbf{C}^n$ dont les restrictions aux F_i sont les u_i. Alors, relativement à $\bigcup_{i=1}^{r} \mathcal{B}_i$, les matrices de f, n et u sont diagonales par blocs et dans ces blocs sont respectivement A_i, N_i et X_i. Comme $A_iX_i - X_iA_i = N_i$, on en déduit $f \circ u - u \circ f = n$ et donc, en prenant les matrices de ces endomorphismes dans la base canonique, il vient $\boxed{\exists X \in \mathscr{M}_n(\mathbf{C}),\ \mathrm{comm}_A(X) = N.}$

Élements de notation : Résultat : 4.

19. Si A est diagonalisable, alors comm_A aussi d'après 8) et donc $\mathrm{Ker}(\mathrm{comm}_A) = \mathrm{Ker}(\mathrm{comm}_A^2)$, d'après 12). Réciproquement soit $A = D + N$ la décomposition de Jordan-Chevalley de A. Comme D et N commutent, il en est de même de A et N, donc $N \in \mathrm{Ker}(\mathrm{comm}_A)$. On dipose également de X tel que $\mathrm{comm}_A(X) = N$, d'après ce qui précède, et donc $X \in \mathrm{Ker}(\mathrm{comm}_A^2)$. Par conséquent, puisque $\mathrm{Ker}(\mathrm{comm}_A) = \mathrm{Ker}(\mathrm{comm}_A^2)$, $0 = \mathrm{comm}_A(X) = N$ et donc $A = D$, i.e. A est diagonalisable. Il vient

$\boxed{A \text{ est diagonalisable si et seulement si } \mathrm{Ker}(\mathrm{comm}_A) = \mathrm{Ker}(\mathrm{comm}_A^2).}$

Élements de notation : CN : 1 ; CS : 3.