Deuxième composition de mathématiques
Mines-Ponts 2011 – MP

Sur le calcul des variations

Soit un intervalle $I \subset \mathbf{R}$, ni vide, ni réduit à un point, et un ensemble E de fonctions $f : I \to \mathbf{R}$. On se donne une application $J : E \to \mathbf{R}$ définie au moyen d'une intégrale faisant intervenir f et ses dérivées. L'objectif de ce problème est d'étudier le minimum éventuel de J sur E :

$$\min_{f\in E} J(f)\,,$$

et de déterminer, dans certains cas particuliers, les points f de E en lesquels J atteint son minimum.
On note $E^k_{a,b}$ l'ensemble des fonctions $f : [0;1] \to \mathbf{R}$ de classe C^k telles que $f(0) = a$ et $f(1) = b$. La notation $y^{(k)}$ désigne la dérivée d'ordre k de la fonction y.

PARTIE A - Préliminaire

1. On pose $j = \exp(2i\pi/3)$. Que vaut $j^4 + j^2 + 1$?
   On note $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{C})$ l'espace vectoriel des matrices à n lignes et p colonnes sur $\mathbf{C}$ et on considère la matrice A de $\mathscr{M}_{4,4}(\mathbf{C})$ suivante :
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\,.$$
2. Proposer une matrice inversible U et une matrice diagonale D de $\mathscr{M}_{4,4}(\mathbf{C})$ telles que $U^{-1}AU = D$. La méthode choisie pour les obtenir doit être expliquée.
3. En déduire les solutions $X : I \to \mathscr{M}_{4,1}(\mathbf{C})$ de l'équation différentielle
$$X' = AX\,. \tag{1}$$
4. Déterminer l'ensemble des solutions $y : I \to \mathbf{C}$ de l'équation différentielle
$$y^{(4)} + y'' + y = 0\,. \tag{2}$$
   et préciser parmi ces solutions celles qui sont à valeurs dans $\mathbf{R}$. On pourra considérer le vecteur
$$Y = \begin{pmatrix} y \\ y' \\ y'' \\ y^{(3)} \end{pmatrix}\,.$$

PARTIE B - Un lemme de du Bois-Reymond

5. On considère la fonction $h : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ définie par $h(t) = (1 - t^2)^3$ si $|t| \leq 1$ et $h(t) = 0$ sinon. Montrer $h \in C^2(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ et représenter son graphe. La fonction h est-elle de classe C^3 sur $\mathbf{R}$?
6. Soit x_0, x_1 des nombres réels tels que $x_0 < x_1$. Construire à partir de h une fonction g dans $C^2(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ vérifiant $g(x) > 0$ pour tout x dans $]x_0; x_1[$ et $g(x) = 0$ ailleurs.
7. Soit F dans $C^0([0;1], \mathbf{R})$ telle que $\displaystyle\int_0^1 F(x)u(x)\,\mathrm{d}x = 0$ pour tout u dans $E^2_{0,0}$. Démontrer qu'alors F est nulle.

PARTIE C - Une condition nécessaire d'Euler-Lagrange

Dans cette partie, on prend $E = E^2_{a,b}$ pour un couple donné (a, b) de nombres réels. La fonction J est définie sur E par la formule

$$J(f) = \int_0^1 \left[P\left(f(x)\right) + Q\left(f'(x)\right)\right] \mathrm{d}x\,,$$

où P et Q sont des polynômes fixés dans $\mathbf{R}[X]$.
Soit f_0 dans E. On se propose de démontrer que si $J(f_0) \leq J(f)$ pour tout f dans E, alors f_0 vérifie une certaine équation différentielle. Soit u dans $E^2_{0,0}$.

8. Montrer que l'application q définie sur $\mathbf{R}$ par la formule

$$q(t) = J(f_0 + tu)$$

est polynomiale, c'est-à-dire qu'il existe une famille finie $(a_0, a_1, \ldots, a_r)$ de nombres réels telle que $q(t) = \sum_{k=0}^{r} a_k t^k$ pour tout t dans $\mathbf{R}$. Expliciter le coefficient a_1 sous la forme d'une intégrale faisant intervenir les polynômes dérivés P' et Q'.

9. On suppose que pour tout f dans E, $J(f_0) \leq J(f)$. Montrer qu'alors $a_1 = 0$ et en déduire l'équation différentielle :

$$(\Delta) \qquad \forall x \in [0;1]\,, \qquad P'\left(f_0(x)\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[Q'\left(f_0'(x)\right)\right]\,.$$

Exemples

Premier exemple. On choisit $E = E^2_{0,1}$ et $J = J_1$ définie par $J_1(f) = \displaystyle\int_0^1 \left(f'(x)\right)^2 \mathrm{d}x$.

10. Former l'équation différentielle (Δ) correspondante. Parmi ses solutions, préciser celles qui appartiennent à $E^2_{0,1}$.
11. Montrer que J_1 admet un minimum sur $E^2_{0,1}$, préciser sa valeur ainsi que les points de $E^2_{0,1}$ où ce minimum est réalisé. (On pourra s'aider de l'inégalité de Cauchy-Schwarz.)

Deuxième exemple. On choisit $E = E^2_{0,0}$ et $J = J_2$ définie par

$$J_2(f) = \int_0^1 \left[\left(f'(x)\right)^2 + \left(f'(x)\right)^3\right] \mathrm{d}x\,.$$

12. Former l'équation différentielle (Δ) correspondante. Parmi ses solutions, montrer que seule la fonction nulle appartient à $E^2_{0,0}$.
13. Montrer que J_2 n'admet pas de minimum sur $E^2_{0,0}$. (On pourra se servir de la fonction f définie sur l'intervalle $[0;1]$ par la formule $f(x) = x^2(1-x)$.)

PARTIE D - Un exemple avec dérivée seconde

Dans cette partie, E désigne l'ensemble des fonctions f de $C^4(\mathbf{R}_+, \mathbf{R})$ telles que f^2 et $(f'')^2$ soient intégrables sur $\mathbf{R}_+$. On rappelle que l'ensemble des fonctions g de $C^0(\mathbf{R}_+, \mathbf{R})$ telles que g^2 soit intégrable sur $\mathbf{R}_+$ est un $\mathbf{R}$-espace vectoriel, que l'on note L^2.
Dans les deux questions suivantes, on considère f dans E.

14. Montrer que le produit ff'' est intégrable sur $\mathbf{R}_+$ et que $f(x)f'(x)$ ne tend pas vers $+\infty$ quand $x \to +\infty$.
15. En déduire $f' \in L^2$, puis $f(x)f'(x) \to 0$ quand $x \to +\infty$.

Dans cette partie, la fonction J est définie par

$$J(f) = \int_0^{+\infty} \left[(f(x))^2 - (f'(x))^2 + (f''(x))^2 \right] \mathrm{d}x \, .$$

Par un raisonnement identique à celui de la partie III, on peut montrer, et on l'admettra, que si la fonction J présente un minimum en un élément f de E, alors f est solution sur $\mathbf{R}_+$ de l'équation (2) : $y^{(4)} + y'' + y = 0$.

16. Déterminer les solutions de (2) qui appartiennent à E. (On pourra d'abord étudier leur appartenance à L^2.)

On note e_1 et e_2 les fonctions définies sur $\mathbf{R}_+$ par les formules

$$e_1(t) = e^{-t/2} \cos\left(t\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \quad \text{et} \quad e_2(t) = e^{-t/2} \sin\left(t\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \, .$$

Un calcul montre, et on l'admettra, que pour tous réels α et β,

$$J(\alpha e_1 + \beta e_2) = \frac{\alpha^2}{4} + \frac{3\beta^2}{4} + \frac{\alpha\beta\sqrt{3}}{2} \, .$$

On pose également, pour tout t dans $\mathbf{R}_+$,

$$\psi(t) = e^{-t/2} \sin\left(t\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{3} \right) \, .$$

17. On suppose, dans cette question, que la fonction J présente un minimum en un élément f de E. Montrer que f est solution sur $\mathbf{R}_+$ de l'équation $y'' + y' + y = 0$. Montrer par ailleurs qu'il existe λ dans $\mathbf{R}$ tel que $f = \lambda\psi$.
18. Montrer que pour tout f dans E et tout réel $A > 0$,

$$\begin{aligned} \int_0^A \left[(f(x))^2 - (f'(x))^2 + (f''(x))^2 \right] \mathrm{d}x \quad &= \quad \int_0^A \left[f(x) + f'(x) + f''(x) \right]^2 \mathrm{d}x \\ &\quad + (f(0) + f'(0))^2 - (f(A) + f'(A))^2 \, . \end{aligned}$$

    Quel est le comportement de $(f(A) + f'(A))^2$ lorsque $A \to +\infty$? En déduire que la fonction J admet effectivement un minimum au point $\lambda\psi$ pour chaque λ réel.
19. Indiquer comment le point de vue de la question précédente permet de retrouver directement toutes les fonctions f_0 dans E telles que $J(f_0) = \min\limits_{f \in E} J(f)$, sans passer par l'équation différentielle (2).

PARTIE E - Application : une inégalité de Hardy et Littlewood

On reprend les notations de la partie précédente, et pour tout g dans L^2, on note

$$\|g\| = \sqrt{\int_0^{+\infty} (g(x))^2 \, \mathrm{d}x} \, .$$

20. Montrer que pour tout f dans E,

$$\|f'\|^2 \leq 2 \, \|f\| \cdot \|f''\| \, .$$

    On pourra poser $f_\mu(x) = f(\mu x)$ et utiliser le fait que $J(f_\mu) \geq 0$, pour tout réel $\mu > 0$.
21. Déterminer tous les cas d'égalité dans l'inégalité précédente.

Deuxième composition de mathématiques – Mines-Ponts 2011

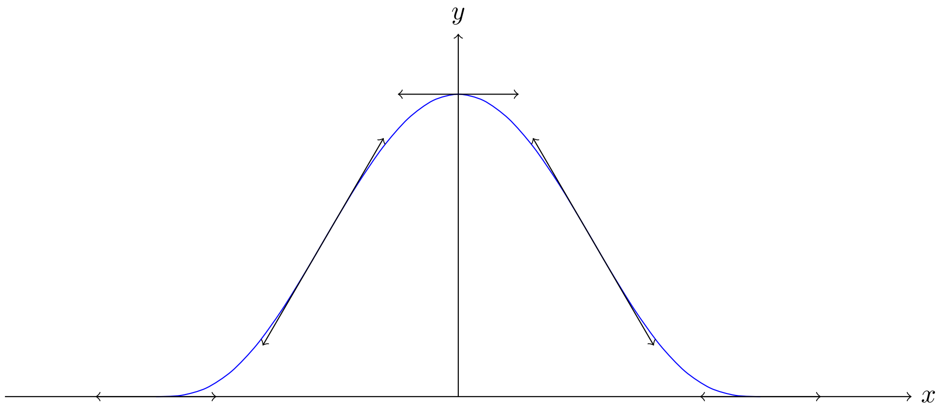
PARTIE A - Préliminaire

1. Puisque j et j^2 sont les deux racines cubiques de l'unité non triviales, on a par somme d'une suite géométrique $j^4+j^2+1=\dfrac{j^6-1}{j-1}=0$, et donc $\boxed{j^4+j^2+1=0.}$
2. Comme A est (la transposée d') une matrice compagnon, on a directement $\chi_A=X^4+X^2+1$ et donc les valeurs propres de A sont $\pm j$ et $\pm j^2$, χ_A est simplement scindé sur $\mathbf{C}$ et donc A est diagonalisable. Pour toute racine λ de χ_A, $A-\lambda I_4$ est de rang 3 et, puisque λ est non nul, le premier mineur principal de $A-\lambda I_4$ fournit un mineur inversible et on obtient ainsi un système échelonné de sorte que le vecteur ${}^{\mathrm{t}}(1,\lambda,\lambda^2,\lambda^3)$ est vecteur propre de A associé à λ. On en déduit que U et D conviennent avec $$\boxed{U=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\ j&j^2&-j&-j^2\\ j^2&j&j^2&j\\ 1&1&-1&-1\end{pmatrix}\text{ et }D=\begin{pmatrix}j&0&0&0\\ 0&j^2&0&0\\ 0&0&-j&0\\ 0&0&0&-j^2\end{pmatrix}.}$$
3. Puisque $U^{-1}AU=D$ l'équation $X'=AX$ s'écrit aussi $(U^{-1}X)'=D(U^{-1}X)$ de sorte que X est solution de (1) si et seulement si $U^{-1}X$ est solution de $Y'=DY$. Comme ce dernier système est diagonal ses solutions sont les applications de la forme
$$t\mapsto\begin{pmatrix}\alpha\exp(jt)\\ \beta\exp(j^2t)\\ \gamma\exp(-jt)\\ \delta\exp(-j^2t)\end{pmatrix}$$
pour $(\alpha,\beta,\gamma,\delta)$ dans $\mathbf{C}^4$ et donc les solutions de $X'=AX$ sont de la forme
$$\boxed{t\mapsto\begin{pmatrix}\alpha\exp(jt)+\beta\exp(j^2t)+\gamma\exp(-jt)+\delta\exp(-j^2t)\\ j\alpha\exp(jt)+j^2\beta\exp(j^2t)-j\gamma\exp(-jt)-j^2\delta\exp(-j^2t)\\ j^2\alpha\exp(jt)+j\beta\exp(j^2t)+j^2\gamma\exp(-jt)+j\delta\exp(-j^2t)\\ \alpha\exp(jt)+\beta\exp(j^2t)-\gamma\exp(-jt)-\delta\exp(-j^2t)\end{pmatrix}\text{ pour }(\alpha,\beta,\gamma,\delta)\text{ dans }\mathbf{C}^4.}$$
4. En posant, pour y de I dans $\mathbf{C}$, $Y=\begin{pmatrix}y\\ y'\\ y''\\ y^{(3)}\end{pmatrix}$, y est solution de (2) si et seulement si Y est solution de (1) et donc les solutions de (2) sont les fonctions de la forme
$$\boxed{t\mapsto\alpha\exp(jt)+\beta\exp(j^2t)+\gamma\exp(-jt)+\delta\exp(-j^2t),\text{ pour }(\alpha,\beta,\gamma,\delta)\text{ dans }\mathbf{C}^4.}$$
D'après le principe de superposition les solutions à valeurs réelles sont les parties réelles de ces solutions, où encore celles qui sont égales à leur conjuguée. Par indépendance des fonctions exponentielles d'exposants différents et puisque $\overline{\pm j}=\pm j^2$, les solutions à valeurs réelles sont celles, parmi les précédentes, qui vérifient $\boxed{\beta=\overline{\alpha}\text{ et }\delta=\overline{\gamma}.}$

PARTIE B - Un lemme de du Bois-Reymond

5. Par définition et puisque les fonctions polynomiales sont de classe C^∞ sur $\mathbf{R}$, h est de classe C^∞ sur $\mathbf{R}$ sauf peut-être en ±1. En ces points ses dérivées de tous ordres admettent des limites à droite et à gauche. Par parité de la fonction, on ne s'intéresse qu'à son comportement en 1. À droite toutes les limites sont nulles tandis qu'à gauche elles sont nulles jusqu'à l'ordre 2, puisque 1 est racine multiple d'ordre 3 de $(1-X^2)^3$. Il en résulte, en utilisant le théorème du prolongement des fonctions de classe C^k dans le cas des fonctions définies en un point, $\boxed{h\in C^2(\mathbf{R},\mathbf{R})\text{ et }h\notin C^3(\mathbf{R},\mathbf{R}).}$

Pour tracer le graphe, par parité on ne s'intéresse qu'à l'intervalle $[0;1]$. Sur cet intervalle $t\mapsto1-t^2$ est positive et décroissante, donc h aussi par croissance du cube sur $\mathbf{R}$. Comme h atteint un maximum en 0, la tangente y est horizontale. Par continuité de h' et h'', on a $h(1)=h'(1)=h''(1)=0$. Enfin un calcul direct montre que pour t dans $[0;1]$ on a $h''(t)=6(1-t^2)(5t^2-1)$ de sorte qu'il y a un point d'inflexion en $\pm\dfrac{\sqrt5}{5}$ et qu'à cet endroit la tangente admet $-\dfrac{96\sqrt5}{125}$ comme pente.



6. L'intervalle $]x_0;x_1[$ est décrit par $\dfrac{x_0+x_1}{2}+t\dfrac{x_1-x_0}{2}$ pour t dans $]-1;1[$ et réciproquement pour x variant dans $]x_0;x_1[$ la quantité $\dfrac{2x-x_0-x_1}{x_1-x_0}$ décrit $]-1;1[$. On peut donc poser, par changement de variable affine, $g(x)=h\left(\dfrac{2x-x_0-x_1}{x_1-x_0}\right)$. Alors, puisqu'on a composé par une fonction affine bijective, donc de classe C^∞ ainsi que sa fonction réciproque, on a
$\boxed{g\in C^2(\mathbf{R},\mathbf{R}) \text{ avec } g(x)>0 \text{ pour } x\in\,]x_0;x_1[\text{ et } g(x)=0 \text{ sinon.}}$

7. On suppose par l'absurde que F est non nulle. Alors on dispose de x dans $[0;1]$ tel que $F(x)\neq 0$ et donc, par continuité de F d'un segment $[x_0;x_1]$ inclus dans $[0;1]$ et tel que F soit de signe constant (strictement) sur ce segment. Mais alors, la fonction g construite précédemment appartient à $E^2_{0,0}$ et donc $\displaystyle\int_0^1 F(x)u(x)\,\mathrm{d}x=0$. Néanmoins Fu est de signe constant sur $[0;1]$, continue et non identiquement nulle, ce qui est une contradiction. Par conséquent $\boxed{F \text{ est nulle.}}$

PARTIE C - Une condition nécessaire d'EULER-LAGRANGE

8. Puisque la formule de TAYLOR est exacte pour les polynômes et par linéarité de la dérivée, il vient pour tout x dans $[0;1]$ et tout t réel, $(f_0+tu)'=f_0'+tu'$ et

$$P(f_0(x)+tu(x))+Q(f_0'(x)+tu'(x))=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{u(x)^kP^{(k)}(f_0(x))+u'(x)^kQ^{(k)}(x)}{k!}t^k$$

et donc, par linéarité de l'intégrale,

$$\boxed{q \text{ est polynomiale et } a_1=\int_0^1\left(P'(f_0(x))u(x)+Q'(f_0'(x))u'(x)\right)\mathrm{d}x.}$$

9. Par linéarité de l'évaluation en 0 et 1, on a $f\in E\iff f-f_0\in E^2_{0,0}$ et en particulier, puisque $E^2_{0,0}$ est un espace vectoriel

$$\forall f\in E\ J(f_0)\leq J(f)\iff \forall u\in E^2_{0,0}\ \min_{t\in\mathbf{R}} J(f_0+tu)=J(f_0)\,,$$

i.e., en adoptant la notation de la question précédente, q est minimale en 0 pour tout choix de u. Or si une fonction polynomiale est minimale en 0 son coefficient du premier degré est nul, puisque 0 est intérieur à son domaine de définition est que c'en est la dérivée en 0, i.e.

$$\boxed{\forall u \in E^2_{0,0} \quad \int_0^1 (P'(f_0(x))u(x) + Q'(f_0'(x))u'(x))\,\mathrm{d}x = 0\ .}$$

Or, puisqu'on a affaire à des fonctions de classe C^2 au moins on a

$$(u \cdot Q' \circ f_0')' = u' \cdot Q' \circ f_0' + u \cdot f_0'' \cdot Q'' \circ f_0'\ .$$

De plus, comme u appartient à $E^2_{0,0}$, $u \cdot Q' \circ f_0'$ s'annule en 0 et 1 et donc, d'après le théorème de Leibniz-Newton, on a

$$\int_0^1 (f_0''(x)Q''(f_0'(x))u(x) + Q'(f_0'(x))u'(x))\,\mathrm{d}x = 0$$

et on en déduit

$$\forall u \in E^2_{0,0} \quad \int_0^1 (P'(f_0(x)) - f_0''(x)Q''(f_0'(x)))\,u(x)\,\mathrm{d}x = 0\ .$$

Il résulte de la partie précédente par continuité de $P' \circ f_0 - f'' \cdot Q'' \circ f_0'$ sur $[0;1]$ que cette fonction est nulle, i.e. avec l'abus de notation de l'énoncé $\boxed{\forall x \in [0;1],\ P'(f_0(x)) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[Q'(f_0'(x))].}$

10. On a $P = 0$ et $Q = X^2$ et donc (Δ) s'écrit $\boxed{f_0'' = 0.}$
 Les solutions sont donc les applications affines. Et par conséquent il y en a une et une seule qui prend des valeurs données en deux points distincts. Ici il s'agit de $\boxed{f_0 = \mathrm{Id}.}$

11. Soit f dans $E^2_{0,1}$. Puisque f est de classe C^1 au moins, f' est de carré intégrable sur $[0;1]$, car continue, de même que la fonction constante égale à 1, il en résulte par inégalité de Cauchy-Schwarz

$$1 = (f(1) - f(0))^2 = \left(\int_0^1 f'(t)\,\mathrm{d}t\right)^2 \leq \int_0^1 \mathrm{d}t \cdot J_1(f)$$

 i.e. $J_1(f) \geq 1$ avec égalité si et seulement si, puisqu'on a affaire à des fonctions continues, f' est proportionnel à 1, i.e. f est affine. La seule fonction affine dans $E^2_{0,1}$ étant l'identité, on en déduit $\boxed{\min_{E^2_{0,1}} J_1 = 1 \text{ et le minimum est réalisé uniquement pour } f = \mathrm{Id}.}$

12. Cette fois-ci on a $P = 0$ et $Q = X^2 + X^3$ de sorte que (Δ) s'écrit $2f_0'' + 6f_0'f_0'' = 0$ ou encore $\boxed{f_0''(3f_0' + 1) = 0.}$
 Soit f une solution de (Δ) et x un point de $[0;1]$ où f'' ne s'annule pas. Alors on dispose d'un voisinage de x sur lequel f'' ne s'annule pas et donc sur lequel f' est constant. Mais alors f'' est nulle en x et cette contradiction assure que les solutions de (Δ) sont celles de $f'' = 0$, i.e. les fonctions affines. Une fonction qui s'annule en deux points distincts étant nécessairement nulle $\boxed{f_0 = 0.}$

13. Soit u la fonction définie sur l'intervalle $[0;1]$ par la formule $f(x) = x^2(1-x)$. Puisque u est polynomiale et qu'on a $u(0) = u(1) = 0$, $u \in E^2_{0,0}$. En reprenant les notations de la question 8, q est une fonction polynomiale de degré au plus 3 dont le coefficient de degré 3 est donné par $\int_0^1 (u'(x))^3\,\mathrm{d}x$. Or, puisque $(u^2, (u')^2)'$ est proportionnel à (u, u'') et $u''' = -6$,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\begin{vmatrix} u & u'' \\ u^2 & (u')^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u' & u''' \\ u^2 & (u')^2 \end{vmatrix} = (u')^3 + 6u^2$$

de sorte qu'on a, puisque $u(0) = u(1) = 0$,

$$\int_0^1 (u'(x))^3 \, \mathrm{d}x = -6 \int_0^1 (u(x))^2 \, \mathrm{d}x < 0$$

puisque u^2 est une fonction continue, positive et non identiquement nulle sur $[0;1]$. Par conséquent q est de degré 3 et admet des limites infinies et de signes opposés en $\pm\infty$. En particulier J_2 ne saurait alors être minoré par 0 : $\boxed{J_2 \text{ n'admet pas de minimum sur } E^2_{0,0}.}$

PARTIE D - Un exemple avec dérivée seconde

14. D'après l'inégalité arithmético-géométrique on a $|ff''| \leq \dfrac{1}{2}\left(f^2 + (f'')^2\right)$ et donc $|ff''|$ est une fonction continue, donc localement intégrable sur $\mathbf{R}_+$, positive et majorée par une combinaison linéaire de fonctions intégrables sur $\mathbf{R}_+$, donc également intégrable sur $\mathbf{R}_+$. Par comparaison on en déduit que $\boxed{ff'' \text{ est intégrable sur } \mathbf{R}_+.}$
Si ff' tend vers $+\infty$ en $+\infty$, on a $1 = \mathrm{o}\left(ff'\right)$ et donc par intégration des relations de comparaison dans le cas divergent $x = \mathrm{o}\left(f^2\right)$ et, par comparaison des fonctions positives, f^2 ne serait pas intégrable en $+\infty$ puisque x ne l'est pas. Cette contradiction assure que $\boxed{ff' \text{ ne tend pas vers } +\infty \text{ en } +\infty.}$

15. Puisque $(f')^2$ est une fonction continue positive, elle n'est pas intégrable sur $\mathbf{R}_+$ si et seulement si $\displaystyle\int_0^x (f')^2$ tend vers $+\infty$ en $+\infty$. Comme ff'' est intégrable on a, puisque $(ff')' = ff'' + (f')^2$ et d'après le théorème de Leibniz-Newton,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} \int_0^x (f'(t))^2 \, \mathrm{d}t = +\infty \quad &\iff \quad \lim_{x\to+\infty} \int_0^x \left[(f'(t))^2 + f(t)f''(t)\right] \mathrm{d}t = +\infty \\ &\iff \quad \lim_{x\to+\infty} \left(f(x)f'(x) - f(0)f'(0)\right) = +\infty\end{aligned}$$

et, par linéarité de la limite et d'après la question précédente, cette dernière assertion est fausse. On en déduit $\boxed{f' \in L^2.}$
Le calcul précédent montre qu'on a, pour x dans $\mathbf{R}_+$,

$$f(x)f'(x) = f(0)f'(0) + \int_0^x \left[(f'(t))^2 + f(t)f''(t)\right] \mathrm{d}t$$

et donc ff' admet une limite en $+\infty$ puisque ff'' et $(f')^2$ sont intégrable sur $\mathbf{R}_+$. Si cette limite est non-nulle, il vient $ff' \sim \lim ff'$ et donc par intégration des relations de comparaison dans le cas divergent $f^2 \sim \lim ff' \cdot \dfrac{x}{2}$ et, par comparaison des fonctions positives, f^2 ne serait pas intégrable en $+\infty$ puisque x ne l'est pas. Cette contradiction assure $\boxed{\lim_{+\infty} ff' = 0.}$

16. Le résultat de la partie I montre que les solutions de (2) sont de la forme

$$t \mapsto u_{\lambda,\varphi,\mu,\psi}(t) = \lambda e^{-t/2} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t + \varphi\right) + \mu e^{t/2} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t + \psi\right)$$

avec $(\lambda, \mu, \varphi, \psi)$ des réels. Toutes ces solutions étant de classe C^∞ sur $\mathbf{R}$, leur appartenance à E équivaut au fait qu'elles soient, ainsi que leur dérivée seconde, de carré intégrable. Soit g une fonction de classe C^2 telle que g, g' et g'' soient bornées sur $\mathbf{R}$, alors, en posant $h(t) = e^{-t/2}g(t)$, h est de classe C^2 sur $\mathbf{R}$ et

$$h^2(t) = e^{-t}g^2(t) = \mathrm{O}\left(e^{-t}\right) \quad \text{et} \quad (h''(t))^2 = e^{-t}\left(\frac{1}{4}g(t) - g'(t) + g''(t)\right)^2 = \mathrm{O}\left(e^{-t}\right)$$

et donc, par comparaison avec la fonction $t \mapsto e^{-t}$ qui est positive et intégrable en $+\infty$, $h \in E$. En particulier pour tous λ et φ réels, $u_{\lambda,\varphi,0,0} \in E$ de même que $t \mapsto e^{-t/2}$. Or, par inégalité arithmético-géométrique, si deux fonctions sont dans L^2 leur produit est intégrable et donc si $u_{0,0,1,\psi}$ appartient à E, alors $t \mapsto \sin\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}t + \psi\right)$ est intégrable. Comme il s'agit d'une fonction continue périodique non nulle, c'est impossible. Puisque E est un espace vectoriel qu'on a, pour $(\lambda, \mu, \varphi, \psi)$ réels,

$$u_{\lambda,\varphi,\mu,\psi} \in E \Longrightarrow \mu u_{0,0,1,\psi} \in E \Longrightarrow \mu = 0$$

et donc les solutions de (2) qui appartiennent à E sont les fonctions $u_{\lambda,\varphi,0,0}$, à savoir

$$\boxed{t \mapsto \lambda e^{-t/2}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t + \varphi\right) \text{ avec } (\lambda, \varphi) \in \mathbf{R}^2}$$

ou encore $\boxed{t \mapsto \alpha e^{-t/2}\cos\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}t\right) + \beta e^{-t/2}\sin\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}t\right) \text{ avec } (\alpha, \beta) \in \mathbf{R}^2.}$

17. D'après ce qui précède si J présente un minimum en un élément f de E, alors f est combinaison linéaire de e_1 et e_2 et donc aussi la partie réelle d'une fonction du type $t \mapsto \lambda \exp(jt)$ avec $\lambda \in \mathbf{C}$. En particulier, puisque $1 + j + j^2 = 0$, $\boxed{f \text{ est solution sur } \mathbf{R}_+ \text{ de } y'' + y' + y = 0.}$

    Comme, pour α et β réels, on a $J(\alpha e_1 + \beta e_2) = \dfrac{1}{4}(\alpha + \sqrt{3}\beta)^2$, et puisque

    $$J(f) = \min_{g \in E} J(g) \leq \min_{\mathrm{Vect}(e_1,e_2)} J(g) = 0 \leq J(f)$$

    on a $J(f) = 0$ et on dispose de α et β réels tels que $\alpha + \sqrt{3}\beta = 0$ et $f = \alpha e_1 + \beta e_2$, i.e. $f(t) = 2\beta e^{-t/2}\sin\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}t - \dfrac{\pi}{3}\right)$. Autrement dit il existe λ dans $\mathbf{R}$ tel que $\boxed{f = \lambda\psi.}$

18. Soit f dans E. Puisque f est de classe C^4, on peut calculer

    $$(f + f' + f'')^2 - \left(f^2 - (f')^2 + (f'')^2\right) = 2(ff' + ff'' + f'f'' + (f')^2) = \left((f + f')^2\right)'$$

    ou encore

    $$(f + f' + f'')^2 - \left((f + f')^2\right)' = \left(f^2 - (f')^2 + (f'')^2\right)$$

    et donc, d'après le théorème de Leibniz-Newton, pour tout réel $A > 0$,

    $$\boxed{\begin{aligned}\int_0^A \left[(f(x))^2 - (f'(x))^2 + (f''(x))^2\right] \mathrm{d}x \quad &= \quad \int_0^A [f(x) + f'(x) + f''(x)]^2 \,\mathrm{d}x \\ &\quad + (f(0) + f'(0))^2 - (f(A) + f'(A))^2 \ .\end{aligned}}$$

    Puisque f et f'' sont de carré intégrable, il en va de même pour f' d'après la question 15 et donc aussi de $f + f' + f''$ puisque L^2 est un espace vectoriel. Il en résulte que $(f + f')^2$ admet une limite en $+\infty$ et comme $f + f'$ est de carré intégrable, cette limite ne saurait être non nulle. Il en résulte $\boxed{\lim_{+\infty}(f + f')^2 = 0.}$

On en déduit $J(f) = (f(0)+f'(0))^2 + \int_0^{+\infty} [f(x)+f'(x)+f''(x)]^2 \, dx$ et donc, en particulier J est une fonction positive et donc, d'après la question précédente,

$\boxed{\min_E J = 0 \text{ et ce minimum est atteint en tous les points de } \mathbf{R}\psi.}$

19. Puisque pour f dans E, on a $J(f) = (f(0)+f'(0))^2 + \int_0^{+\infty} [f(x)+f'(x)+f''(x)]^2 \, dx$, J est à valeurs positive et s'annule si et seulement si f vérifie : $f \in E$, $f+f'+f''=0$ et $f(0)+f'(0)=0$, puisque $(f+f'+f'')^2$ est une fonction continue et positive. Comme 0 vérifie ces conditions, on en déduit que J admet un minimum, atteint en 0. De plus l'espace des solutions de $y+y'+y''=0$ est un espace vectoriel de dimension 2 et la forme linéaire $y \mapsto y(0)+y'(0)$ est non-nulle d'après le théorème de CAUCHY-LIPSCHITZ dans le cas linéaire. Les deux conditions $f+f'+f''=0$ et $f(0)+f'(0)=0$ fournissent donc une droite, à savoir $\mathbf{R}\psi$. Dès lors J admet un minimum en tous les points de $\mathbf{R}\psi$ si et seulement si $\psi \in E$. Autrement dit

J admet un minimum, égal à 0, et l'atteint sur tous les points de $\mathbf{R}\psi$ car

$$\mathbf{R}\psi = \{f \in E \,|\, f+f'+f''=0 \text{ et } f(0)+f'(0)=0\} \ .$$

PARTIE E - Application : une inégalité de HARDY et LITTLEWOOD

20. Si f est dans E et vérifie $\|f\|=0$, alors puisque f^2 est continue et positive, f est nulle et donc l'inégalité de HARDY-LITTLEWOOD est vraie car $f=f'=f''=0$. Il en va de même si $\|f'\|=0$ par positivité des normes.

Pour f dans L^2 et μ dans $\mathbf{R}_+^*$, en posant $f_\mu(x) = f(\mu x)$, $f_\mu \in L^2$ par changement de variable affine bijectif et on a $\|f\|^2 = \mu \|f_\mu\|^2$. Et donc, puisque si f appartient à E on a $f'_\mu = \mu (f')_\mu$ et $f''_\mu = \mu^2 (f'')_\mu$, il vient $\mu \|f'\|^2 = \|f'_\mu\|^2$ et $\mu^3 \|f''\|^2 = \|f''_\mu\|^2$, d'où

$$\mu J(f_\mu) = \mu^4 \|f''\|^2 - \mu^2 \|f'\|^2 + \|f\|^2 \ .$$

Pour f dans E avec $\|f\|$ et $\|f'\|$ non nuls on peut poser $\mu = \dfrac{\sqrt{2}\,\|f\|}{\|f'\|}$ et il vient, puisque μ et $J(f_\mu)$ sont positifs, $\dfrac{4\|f\|^4 \|f''\|^2}{\|f'\|^4} - \|f\|^2 \geq 0$. Par positivité des normes on en déduit, en prenant les racines carrées, $\boxed{\|f'\|^2 \leq 2\|f\| \cdot \|f''\|.}$

21. En reprenant les notations précédentes on a

$$\|f'\|^2 = 2\|f\| \cdot \|f''\| \iff \|f'\| = 0 \quad \text{ou} \quad J(f_\mu) = 0 \text{ avec } \mu = \frac{\sqrt{2}\,\|f\|}{\|f'\|}$$

et cette dernière condition entraîne que f_μ appartient à $\mathbf{R}\psi$. De plus le calcul précédent montre qu'on a $J(\psi_\mu) \leq J(\psi_1)$ puisqu'on a choisi μ de sorte à minimiser $J(\psi_\lambda)$ pour $\lambda > 0$. Comme $J(\psi) = 0$ et que J est à valeurs positives, cela entraîne $J(\psi_\mu) = 0$ et donc $\mu = 1$, i.e. que ψ vérifie le cas d'égalité. Par homogénéité et changement de variable, on en déduit que les fonctions $t \mapsto \lambda\psi(\mu t)$, avec λ et μ réels et $\mu > 0$, sont dans le même cas, et on peut remarquer que le cas $\mu = +\infty$ redonne les fonctions constantes. Par conséquent, pour f dans E,

$\|f'\|^2 = 2\|f\| \cdot \|f''\| \iff f$ est constante ou bien il existe λ et μ réels avec $\mu > 0$ tels que, pour tout t dans $\mathbf{R}_+$, on ait $f(t)\lambda e^{-\mu t} \sin\left(\sqrt{3}\mu t - \dfrac{\pi}{3}\right)$.