Première composition
Mines-Ponts 2012 – MP

Réduction de certaines matrices de coefficients binomiaux

Le but du problème est d'étudier la réduction de matrices définies à partir d'un résultat sur les dénombrements de certaines familles entières, en utilisant les propriétés des polynômes réciproques.

Les parties A, B et C sont indépendantes.

PARTIE I - Équations algébriques réciproques

On note $\mathbf{R}[X]$ l'algèbre des polynômes à coefficients réels. Si P est dans $\mathbf{R}[X]$, on note $\deg(P)$ son degré. Si n est un entier naturel, $\mathbf{R}_n[X]$ désigne le $\mathbf{R}$-espace vectoriel des polynômes P de $\mathbf{R}[X]$ tels que $\deg(P) \leq n$.

1) Montrer que si n est un entier naturel, l'application $u_n : \mathbf{R}_n[X] \to \mathbf{R}_n[X]$ donnée par la formule $u_n(P)(X) = X^n P(\frac{1}{X})$ est bien définie, et que c'est une symétrie.

Un polynôme R de $\mathbf{R}[X]$ est dit *réciproque de première espèce* s'il est non nul et invariant par $u_{\deg(R)}$; il est dit *réciproque de deuxième espèce* s'il est non nul et transformé en son opposé par $u_{\deg(R)}$. On note $\mathcal{P}$ (respectivement $\mathcal{D}$) l'ensemble des polynômes de $\mathbf{R}[X]$ réciproques de première (respectivement de deuxième) espèce.

2) Donner une condition nécessaire et suffisante sur ses coefficients pour qu'un polynôme non nul de $\mathbf{R}[X]$ appartienne à $\mathcal{P}$ (respectivement à $\mathcal{D}$).
3) Établir que si R dans $\mathbf{R}[X]$ est réciproque (c'est-à-dire $R \in \mathcal{P} \cup \mathcal{D}$) et x est une racine de R, alors x est non nul et $\frac{1}{x}$ est aussi une racine de R. Montrer par ailleurs que tout polynôme de $\mathcal{D}$ admet 1 pour racine, et tout polynôme de $\mathcal{P}$ de degré impair admet -1 pour racine.
4) Étant donné trois polynômes P, Q, R de $\mathbf{R}[X]$ tels que $P = QR$, montrer que si deux d'entre eux sont réciproques, alors le troisième l'est aussi. Établir un lien entre les espèces de ces trois polynômes réciproques.
5) Vérifier $P \in \mathcal{P} \implies (X-1)P \in \mathcal{D}$. Réciproquement, montrer que si D appartient à $\mathcal{D}$, il existe un unique P dans $\mathcal{P}$ tel que $D = (X-1)P$?
6) Établir un résultat analogue caractérisant les polynômes de $\mathcal{P}$ de degré impair dans $\mathbf{R}[X]$.
7) Montrer que si p est un entier naturel, il existe un unique P dans $\mathbf{R}[X]$ tel que $X^p + \dfrac{1}{X^p} = P\left(X + \dfrac{1}{X}\right)$.
   Quel est le degré de P ?

Soit R dans $\mathbf{R}[X]$ réciproque n'admettant ni 1 ni -1 comme racine.

8) Montrer que R est réciproque de première espèce et de degré pair. En déduire qu'il existe P dans $\mathbf{R}[X]$ tel que pour tout x dans $\mathbf{R}^*$, on ait l'équivalence $R(x) = 0 \iff P(x + \frac{1}{x}) = 0$. Y a-t-il unicité du polynôme P ? de $\deg(P)$?

PARTIE II - Un problème de dénombrement

Si i et j sont des entiers strictement positifs, on note $S_{i,j}$ (respectivement $S'_{i,j}$) l'ensemble des familles u avec $u = (u_k)_{0 \leq k \leq i}$ à valeurs dans $\mathbf{N}$ telles que $u_0 = 1$ et $u_0 + \cdots + u_i = j$ (respectivement $u_0 + \cdots + u_i \leq j$). La notation $f_{|E}$ désigne la restriction d'une application f à une partie E de son ensemble de départ.

9) Vérifier que $S_{i,j}$ et $S'_{i,j}$ sont des ensembles finis et montrer que l'application de $S_{i+1,j}$ dans $S'_{i,j}$ donnée par $u \mapsto u_{|[\![0;i]\!]}$ est bien définie et bijective.

Dans toute la suite du problème, on note $s_{i,j}$ et $s'_{i,j}$ les cardinaux respectifs de $S_{i,j}$ et $S'_{i,j}$.

10) Montrer $s'_{i,j+1} = s_{i,j+1} + s'_{i,j}$ et en déduire $s'_{i+1,j+1} = s'_{i,j+1} + s'_{i+1,j}$.

Pour p et q entiers naturels, on note $\binom{p}{q}$ le nombre de parties à q éléments d'un ensemble à p éléments.

11) Montrer $s'_{i,j} = \binom{i+j-1}{i}$ et en déduire la valeur de $s_{i,j}$.

PARTIE III - Polynôme caractéristique d'un produit de matrices

Si n est un entier strictement positif, $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ désigne la $\mathbf{R}$-algèbre des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels, d'élément neutre I_n pour la multiplication. On note $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ l'ensemble des matrices inversibles de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$. Si M appartient à $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$, on note $\det(M)$ son déterminant et χ_M son polynôme caractéristique. Dans cette partie, on démontre que pour tous A et B dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$, on a l'égalité $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.

12) Établir le résultat lorsque A est inversible.

13) Conclure en considérant la suite $(A - \frac{1}{k} I_n)_{k \in \mathbf{N}^*}$.

PARTIE IV - Étude spectrale de certaines matrices

Soit n un entier naturel. On considère désormais les matrices S de $\mathscr{M}_{n+1}(\mathbf{R})$ données par $S = (s_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n+1}$ et $S' = (s'_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n+1}$ où $s_{i,j}$ et $s'_{i,j}$ ont été définis dans la partie II

14) Montrer que S est diagonalisable. La diagonaliser pour $n = 0$ et $n = 1$, et calculer χ_S pour $n \leq 2$.

15) Montrer que l'application $\Psi : (\mathbf{R}_n[X])^2 \to \mathbf{R}$ définie par la formule $\Psi(P,Q) = \displaystyle\int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}\,\mathrm{d}t$ est un produit scalaire. On suppose désormais $\mathbf{R}_n[X]$ muni de celui-ci.

16) Vérifier que la famille $\mathcal{B}$ donnée par $\mathcal{B} = (B_0, \ldots, B_n)$ et $B_i = \frac{X^i}{i!}$, est une base de $\mathbf{R}_n[X]$ et évaluer $\psi(B_i, B_j)$ pour $0 \leq i,j \leq n$. En déduire que le spectre de S est inclus dans $\mathbf{R}_+^*$. Que peut-on en conclure sur les rangs de S et de S' ?

Pour i dans $[\![0;n]\!]$, on note $f_i : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ l'application définie par $f_i(t) = t^i e^{-t}$. La notation $f^{(k)}$ désigne la dérivée k-ième d'une fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$.

17) Pour i dans $[\![0;n]\!]$ fixé, vérifier que pour tous j et k entiers naturels, $f_i^{(j)}(t) = o_{t\to+\infty}\left(t^{-k}\right)$. Montrer que la formule suivante

$$\forall t \in \mathbf{R} \qquad L_i(t) = (-1)^i \frac{f_i^{(i)}(t)}{i!} e^t$$

définit un polynôme L_i dans $\mathbf{R}[X]$ dont on déterminera les coefficients.

18) Montrer que $\mathcal{L}$, donné par $\mathcal{L} = (L_0, \ldots, L_n)$, est une base orthonormale de $\mathbf{R}_n[X]$. (On pourra au préalable calculer $\Psi(L_i, B_j)$ pour $j \leq i$.)

On considère l'endomorphisme τ de $\mathbf{R}_n[X]$ défini par $\tau(P) = P(X-1)$. On note T sa matrice dans la base canonique $(1, X, X^2, \ldots, X^n)$ et U son inverse, i.e. $U = T^{-1}$.

19) Expliciter T et U et les comparer à la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{L}$. En déduire S en fonction de U, puis les valeurs de $\det(S)$ et $\det(S')$.

On considère la matrice D de $\mathscr{M}_{n+1}(\mathbf{R})$ définie par $D = (d_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n+1}$ et

$$d_{i,j} = \begin{cases} (-1)^{i+1} & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

20) Calculer $(DU)^2$ et en déduire que S^{-1} est semblable à $U\,{}^{\mathrm{t}}U$, où ${}^{\mathrm{t}}U$ désigne la transposée de U.

21) En conclure que χ_S est un polynôme réciproque et préciser de quelle espèce.

Première composition – Mines-Ponts 2012 – MP

PARTIE I - Équations algébriques réciproques

1) La précomposition par $\frac{1}{X}$ et la multiplication par X^n étant toutes les deux des applications linéaires sur $\mathbf{R}(X)$, u_n est une application linéaire de $\mathbf{R}_n[X]$ dans $\mathbf{R}(X)$ comme restriction de leur composé. On considère $(X^k)_{0\leq k\leq n}$ la base canonique de $\mathbf{R}_n[X]$. Comme on a, pour $k \in [\![0;n]\!]$, $u_n(X^k) = X^{n-k}$ l'image de u_n est incluse dans $\mathbf{R}_n[X]$ et comme u_n^2 coïncide avec l'identité sur la base canonique, d'après ce même calcul, $\boxed{u_n \text{ est bien définie et c'est une symétrie.}}$

2) Soit P dans $\mathbf{R}[X]$, non nul de degré n. On dispose de $(a_k)_{0\leq k\leq n}$ des réels tels que $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$. Le calcul précédent montre que $\boxed{P \text{ appartient à } \mathcal{P} \text{ si et seulement si } \forall k \in [\![0;n]\!]\ a_k = a_{n-k}}$ et $\boxed{P \text{ appartient à } \mathcal{D} \text{ si et seulement si } \forall k \in [\![0;n]\!]\ a_k = -a_{n-k}.}$

3) Soit R dans $\mathbf{R}[X]$ réciproque, de degré n. D'après ce qui précède son terme constant est égal ou opposé à son coefficient dominant et donc R est de valuation nulle, i.e. $\boxed{R \text{ n'admet pas 0 comme racine.}}$

Soit maintenant x une racine de R. En considérant la fonction polynomiale associée, on a $R(\frac{1}{x}) = \frac{1}{x^n}R(x) = 0$ et donc $\boxed{\frac{1}{x} \text{ est aussi une racine de } R.}$

Si R est dans $\mathcal{D}$, alors $R(1) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{n}(-a_{n-k}) = -\sum_{k=0}^{n} a_k$ par réindexation et donc $R(1) = 0$, i.e. $\boxed{R \text{ admet 1 pour racine.}}$

Si R est dans $\mathcal{P}$ et n est impair, alors de même $R(-1) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k a_k = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k a_{n-k} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k} a_k$ par réindexation, soit $R(1) = -\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k = -R(1)$ et donc $R(-1) = 0$, i.e. $\boxed{R \text{ admet } -1 \text{ pour racine.}}$

4) Soit P, Q, R dans $\mathbf{R}[X]$ tels que $P = QR$. Si l'un des trois polynômes est nul, alors par intégrité de $\mathbf{R}[X]$, au moins deux d'entre eux sont nuls. En particulier si deux d'entre eux sont réciproques, aucun n'est nul. Il en résulte $\deg(P) = \deg(Q) + \deg(R)$ et donc $u_{\deg(P)}(P) = u_{\deg(Q)}(Q)u_{\deg(R)}(R)$ car $X^{\deg(P)} = X^{\deg(Q)}X^{\deg(R)}$. Soit $(\varepsilon_P, \varepsilon_Q, \varepsilon_R)$ dans $\{-1,1\}^3$ avec $\varepsilon_P = \varepsilon_Q\varepsilon_R$. L'intégrité de $\mathbf{R}[X]$ et la règle des signes donnent

$$\begin{cases} \quad u_{\deg(P)}(P) = \varepsilon_P P \wedge u_{\deg(Q)}(Q) = \varepsilon_Q Q) \\ \text{ou } u_{\deg(Q)}(Q) = \varepsilon_Q Q \wedge u_{\deg(R)}(R) = \varepsilon_R R \\ \text{ou } u_{\deg(P)}(P) = \varepsilon_P P \wedge u_{\deg(R)}(R) = \varepsilon_R R \end{cases} \iff \begin{cases} \quad u_{\deg(P)}(P) = \varepsilon_P P \\ \text{et } u_{\deg(Q)}(Q) = \varepsilon_Q Q \\ \text{et } u_{\deg(R)}(R) = \varepsilon_R R \end{cases}$$

i.e. $\boxed{\text{si deux d'entre eux sont réciproques, alors le troisième l'est aussi.}}$ La règle des signes montre qu'il y a un nombre pair de polynômes de seconde espèce, i.e.
$\boxed{\text{deux d'entre eux sont même espèce si et seulement si le troisième est de première espèce.}}$

5) Puisque $X - 1$ est un polynôme réciproque de seconde espèce, si P et D sont deux polynômes dans $\mathbf{R}[X]$ vérifiant $D = (X-1)P$, la question précédente montre que P est un polynôme réciproque de première espèce si et seulement D est un polynôme réciproque de seconde espèce. On en conclut en particulier $\boxed{P \in \mathcal{P} \Longrightarrow (X-1)P \in \mathcal{D}.}$ Par ailleurs la question 3 montre que tout polynôme D dans $\mathcal{D}$ est factorisable par $X - 1$, i.e. s'écrit $D = (X-1)P$ avec P dans $\mathbf{R}[X]$. Un tel P est unique puisque $X - 1$ est non nul et $\mathbf{R}[X]$ est intègre. L'équivalence précédente donne alors $\boxed{\text{il existe un unique } P \text{ dans } \mathcal{P} \text{ tel que } D = (X-1)P.}$

6) Comme $X+1$ est un polynôme réciproque de première espèce, la question 5 montre $Q \in \mathcal{P} \implies (X+1)Q \in \mathcal{P}$. De plus, comme Q n'est pas nul, le degré de $(X+1)Q$ est de parité différente de celui de Q. Réciproquement si P est dans $\mathcal{P}$ de degré impair, la question 3 montre que P est factorisable par $X+1$, i.e. s'écrit $P=(X+1)Q$ avec Q dans $\mathbf{R}[X]$. Un tel Q est unique puisque $X+1$ est non nul et $\mathbf{R}[X]$ est intègre. L'équivalence précédente montre alors que Q appartient à $\mathcal{P}$. Il est en particulier non nul et de degré pair. En conclusion, pour P dans $\mathbf{R}[X]$, on a

$\boxed{P \in \mathcal{P} \wedge \deg(P) \text{ impair} \iff \exists! Q \in \mathcal{P}\,(P=(X+1)Q \wedge \deg(Q) \text{ pair}).}$

7) Puisque l'égalité entre deux fractions rationelles de $\mathbf{R}(X)$ entraîne leur égalité dans $\mathbf{C}(X)$ et que $\mathbf{U}$ est infini, pour p entier et P dans $\mathbf{R}[X]$, on a, en utilisant la formule d'Euler avec $z=e^{i\theta}$,

$$X^p + \frac{1}{X^p} = P\left(X+\frac{1}{X}\right) \iff \forall z \in \mathbf{U}\ z^p + \overline{z}^p = P(z+\overline{z}) \iff \forall \theta \in \mathbf{R}\ 2\cos(p\theta) = P(2\cos(\theta))\ .$$

Soit T_p le p-ième polynôme de Tchebychev, i.e. tel que $\forall \theta \in \mathbf{R}\ T_p(\cos(\theta)) = \cos(p\theta)$. Un polynôme P vérifiant la dernière égalité est donc égal à $2T_p(X/2)$ sur $[-2;2]$, donc sur $\mathbf{R}$. La réciproque étant directe $\boxed{\text{il existe un unique } P \text{ dans } \mathbf{R}[X] \text{ tel que } X^p + \frac{1}{X^p} = P\left(X+\frac{1}{X}\right).}$ Puisque T_p est de degré p, il en va de même pour P : $\boxed{\deg(P)=p.}$

Remarque : on peut démontrer l'existence de T_p ainsi. La formule d'Euler entraîne que pour tout entier naturel n, $\cos^n$ est une combinaison linéaire de $(c_k)_{0\le k\le n}$ où $c_k : \theta \mapsto \cos(k\theta)$. Et plus précisément $(1,\cos,\dots,\cos^p)$ est l'image de $(1,\cos,\dots,c_p)$ par une matrice triangulaire de diagonale $(1,1,\frac{1}{2},\dots,\frac{1}{2^{p-1}})$. Comme cette matrice est inversible c_p est combinaison linéaire de $(1,\cos,\dots,\cos^p)$, i.e. un polynôme en cos. Plus précisément un polynôme de degré p et de coefficient dominant 2^{p-1} (si $p\ge 1$) et 1 sinon.

Remarque (bis) : on peut également démontrer le résultat directement. Pour p entier on a

$$X^{p+2} + \frac{1}{X^{p+2}} = \left(X+\frac{1}{X}\right)\left(X^{p+1}+\frac{1}{X^{p+1}}\right) - \left(X^p + \frac{1}{X^p}\right)\ .$$

L'existence de P en résulte par récurrence en posant $P_0=2$, $P_1=X$ et, pour n entier, $P_{n+2} = XP_{n+1}-P_n$. De plus $x\mapsto x+\frac{1}{x}$ prend un nombre infini de valeurs sur $\mathbf{R}^*$ (par exemple car c'est une fonction continue non constante et en vertu du théorème de Bolzano, dit des valeurs intermédiaires) et donc $Q \mapsto Q\left(X+\frac{1}{X}\right)$ de $\mathbf{R}[X]$ dans $\mathbf{R}(X)$ est linéaire (car la précomposition l'est) et de noyau réduit à $\{0\}$, de ce fait est injective. L'unicité de P en résulte. Enfin la relation de récurrence définissant la suite (P_n) entraîne $\deg(P_n)=n$.

8) D'après la question 3 $\boxed{R \text{ est réciproque de première espèce et de degré pair.}}$ On dispose donc de n tel que $\deg(P)=2n$ et alors $\dfrac{1}{X^n}P$ s'écrit, d'après la question 2, $a_n + \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a_k\left(X^{n-k}+X^{k-n}\right)$ et donc, avec les notations de la question précédente et en posant $P = \dfrac{1}{2}P_0 + \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a_k P_{n-k}$, $\dfrac{1}{X^n}R = P\left(X+\dfrac{1}{X}\right)$. En considérant les fonctions rationnelles associées sur $\mathbf{R}^*$, il vient pour tout x dans $\mathbf{R}^*$ $\boxed{R(x)=0 \iff P(x+\frac{1}{x})=0.}$ Cette propriété est partagée par tout autre polynôme de la forme PQ avec Q sans racine réelle, par exemple $Q=X^2+1$, ce qui montre que

$\boxed{\text{ni } P, \text{ ni } \deg(P) \text{ ne sont uniquement déterminés par l'équivalence précédente.}}$

PARTIE II - Un problème de dénombrement

9) Comme on a affaire à des sommes d'entiers naturels toute famille appartenant à $S_{i,j}$ ou $S'_{i,j}$ est consituée d'entiers inférieurs à j, donc ces deux ensembles sont inclus dans $[\![0;j]\!]^i$ et donc $\boxed{S_{i,j} \text{ et } S'_{i,j} \text{ sont des ensembles finis.}}$ Soit u dans $S_{i+1,j}$, on note $u' = u_{|[\![0;i]\!]}$. Par définition on a $u'_0 = u_0 = 1$ et $\forall k \in [\![1;i]\!]\ u'_k = u_k \in \mathbf{N}$. Enfin $\sum_{k=0}^{i} u'_k = j - u_{i+1} \leq j$ par positivité de u_{i+1}. On en déduit que l'application $u \mapsto u'$ est bien définie. On la note φ. On définit ψ sur $S'_{i,j}$ par $\psi(u) = (u_0, \ldots, u_i, j - u_0 - \cdots - u_i)$. Par définition de $S'_{i,j}$, ψ est à valeurs dans $S_{i+1,j}$ et on a $\psi \circ \varphi = \mathrm{Id}_{S_{i+1,j}}$ et $\varphi \circ \psi = \mathrm{Id}_{S'_{i,j}}$. Donc $u \mapsto u_{|[\![0;i]\!]}$ est $\boxed{\text{bien définie et bijective de } S_{i+1,j} \text{ dans } S'_{i,j}.}$

10) On a $[\![1;j+1]\!] = \{j+1\} + [\![1;j]\!]$ et donc

$$S'_{i,j+1} = \left\{u \in S'_{i,j+1} \;\middle|\; u_0 + \cdots + u_i = j+1\right\} + \left\{u \in S'_{i,j+1} \;\middle|\; u_0 + \cdots + u_i \leq j\right\}$$

en notant $A + B$ la réunion disjointe de deux ensembles A et B. En prenant les cardinaux, il vient $\boxed{s'_{i,j+1} = s_{i,j+1} + s'_{i,j}.}$ La question 9 entraîne $S_{i+1,j+1} \simeq S'_{i,j+1}$ et donc en prenant les cardinaux et en appliquant la relation précédente en $i+1$, il vient $\boxed{s'_{i+1,j+1} = s'_{i,j+1} + s'_{i+1,j}.}$

11) À u dans $S'_{i,j}$ on associe l'ensemble $\{u_1 + 1, u_1 + u_2 + 2, \ldots, u_1 + \cdots + u_i + i\}$. Par positivité des termes de u, on a $1 \leq u_1 + 1 < u_1 + u_2 + 2 < \cdots < u_1 + \cdots + u_i + i \leq i + j - 1$ de sorte que l'ensemble considéré est une partie de cardinal i dans $[\![1;i+j-1]\!]$. Réciproquement pour une telle partie, notée A, on ordonne ses éléments notés (a_k) de sorte qu'on a $1 \leq a_1 < a_2 < \cdots < a_i \leq i+j-1$ et on lui associe u donné par $u_1 = a_1 - 1$, $u_2 = a_2 - a_1 - 1$, ..., $u_i = a_i - a_{i-1} - 1$. Par construction on obtient ainsi une bijection de $S'_{i,j}$ dans l'ensemble des parties de cardinal i dans $[\![1;i+j-1]\!]$ et donc $\boxed{s'_{i,j} = \binom{i+j-1}{i}.}$ On en déduit, d'après la question 9, que pour $i > 1$ on a $s_{i,j} = s'_{i-1,j} = \binom{i+j}{i-1}$. Comme on a $S_{1,j} = \{(1, j-1)\}$ et donc $s_{1,j} = 1$, cette formule est encore vraie si $i = 1$, i.e. $\boxed{s_{i,j} = \binom{i+j-2}{i-1}.}$

Remarque : l'esprit du problème est sans doute de démontrer la formule pour $s'_{i,j}$ par récurrence, mais ce n'est pas exigé ! Pour le faire on introduit le prédicat sur $\mathbf{N}^*$ donné par $(\mathbf{P}_n)$: $\forall (i,j) \in (\mathbf{N}^*)^2$, $i + j - 1 = n \Longrightarrow s'_{i,j} = \binom{n}{i}$. D'une façon générale on a $s'_{1,j} = \mathrm{Card}\,\{(1,k) \,|\, k \in [\![0;j-1]\!]\} = j = \binom{j}{1}$ et $s'_{i,1} = \mathrm{Card}\,\{(1,0,\ldots,0)\} = 1 = \binom{i}{i}$. En particulier $(\mathbf{P}_1)$ est vrai. Soit alors n dans $\mathbf{N}^*$ tel que $(\mathbf{P}_n)$ est vrai et (i,j) dans $(\mathbf{N}^*)^2$ tels que $i + j - 1 = n + 1$. Si $i = 1$ ou $j = 1$, l'étude précédente montre $s'_{i,j} = \binom{n+1}{i}$. Sinon l'hypothèse de récurrence et la relation de PASCAL fournissent, en utilisant la relation de la question 10 : $s'_{i,j} = s'_{i-1,j} + s'_{i,j-1} = \binom{n}{i-1} + \binom{n}{i} = \binom{n+1}{i}$ et l'hérédité en découle.

PARTIE III - Polynôme caractéristique d'un produit de matrices

12) Soit λ un scalaire, par multiplicativité du déterminant et inversibilité de A, il vient $AB - \lambda I_n = A(BA - \lambda I_n)A^{-1}$ et $\chi_{AB}(\lambda) = \det(A)\chi_{BA}(\lambda)\det(A)^{-1}$, de sorte que les fonctions polynomiales associées à χ_{AB} et χ_{BA} coïncident et puisque $\mathbf{R}$ est infini, il vient $\boxed{\chi_{AB} = \chi_{BA}.}$

13) Pour k dans $\mathbf{N}^*$, on note $A_k = A - \frac{1}{k}I_n$. On a donc $\det(A_k) = \chi_A(\frac{1}{k})$, de sorte que $\det(A_k)$ est non nul sauf au plus pour un nombre fini de valeurs de k, puisque χ_A n'est pas le polynôme nul. Pour de tels k et pour tout scalaire λ, on a $\det(A_k B - \lambda I_n) = \det(BA_k - \lambda I_n)$. Les deux membres de l'égalité sont des expressions polynomiales évaluées en $\frac{1}{k}$. Lorsque k tend vers l'infini, $\frac{1}{k}$ tend vers 0 et par continuité des fonctions polynomiales, il vient $\chi_{AB}(\lambda) = \chi_{BA}(\lambda)$ et donc, comme précédemment, $\boxed{\chi_{AB} = \chi_{BA}.}$

Remarque : on peut aussi écrire $\begin{pmatrix}\lambda I_n - AB & A\\ (0) & \lambda I_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I_n & (0)\\ B & I_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}I_n & (0)\\ B & I_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda I_n & A\\ (0) & \lambda I_n - BA\end{pmatrix}$ et conclure en considérant les déterminants $\chi_{AB}(\lambda)\lambda^n = \lambda^n\chi_{BA}(\lambda)$, par multiplicativité du déterminant et formule du déterminant de matrices triangulaires par blocs.

PARTIE IV - Étude spectrale de certaines matrices

14) Par définition et par symétrie du triangle de PASCAL, la question 11 montre que S est symétrique réelle. Le théorème spectral permet de conclure que $\boxed{S \text{ est (ortho-)diagonalisable.}}$

Pour $n = 0$, $S = (1)$ et donc $\boxed{\chi_S = X - 1 \text{ et } S \text{ est diagonale.}}$

Pour $n = 1$, on a $S = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$ et donc $\boxed{\chi_S = X^2 - 3X + 1.}$ Il en résulte que les valeurs propres de S sont $\dfrac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$. On peut prendre pour vecteurs propres associés $(2, 1 \pm \sqrt{5})$, de sorte qu'en posant $P = \begin{pmatrix}2 & 2\\ 1+\sqrt{5} & 1-\sqrt{5}\end{pmatrix}$, on a $P^{-1} = \dfrac{1}{20}\begin{pmatrix}5-\sqrt{5} & 2\sqrt{5}\\ 5+\sqrt{5} & -2\sqrt{5}\end{pmatrix}$ et $\boxed{P^{-1}SP = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}3+\sqrt{5} & 0\\ 0 & 3-\sqrt{5}\end{pmatrix}.}$

Pour $n = 2$, on a $S = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 3\\ 1 & 3 & 6\end{pmatrix}$. Sa trace vaut 9. La trace de la comatrice est $1 + 5 + 3$ et son déterminant est, en retranchant la première colonne aux deux autres, celui de $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 5\end{pmatrix}$, i.e. 1. On a donc $\boxed{\chi_S = X^3 - 9X^2 + 9X - 1.}$

15) Par croissance comparée, pour tous polynômes P et Q, $t \mapsto P(t)Q(t)e^{-t}$ est dans $o_{+\infty}\left(\frac{1}{t^2}\right)$ et donc localement intégrable au voisinage de $+\infty$. Comme il s'agit d'une fonction continue sur $\mathbf{R}$, elle est intégrable sur $\mathbf{R}_+$. Par ailleurs $(P, Q) \mapsto PQ$ est bilinéaire symétrique, la multiplication par $t \mapsto e^{-t}$ est linéaire et l'intégration sur $\mathbf{R}_+$ aussi, donc Ψ est bilinéaire symétrique. Si $P = Q$ l'intégrande est une fonction continue positive. Comme l'exponentielle ne s'annule nulle part, l'intégrande est identiquement nul si et seulement si P^2 l'est, i.e. P l'est. Par conséquent Ψ est définie positive et donc $\boxed{\Psi \text{ est un produit scalaire.}}$

16) La famille $\mathcal{B}$ est étagée en degré et de cardinal égal à $n + 1$, i.e. à la dimension de $\mathbf{R}_n[X]$, c'est donc $\boxed{\text{une base de } \mathbf{R}_n[X].}$ Pour $0 \leq i, j \leq n$, on a $\psi(B_i, B_j) = \dfrac{1}{i!\,j!}\Gamma(i + j + 1) = \dbinom{i+j}{i}$, i.e. $\boxed{\psi(B_i, B_j) = s_{i+1,j+1}.}$ On en déduit que pour tout vecteur propre Y pour S, on a, en notant la valeur associée λ et $(a_0, \ldots, a_n)$ les coordonnées de Y dans la base $\mathcal{B}$, $\lambda \|Y\|_2^2 = {}^tYSY = \Psi(P, P)$ avec $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k B_k$ et $\|\cdot\|_2$ la norme euclidienne canonique sur $\mathbf{R}^{n+1}$. On en déduit, puisque Y n'est pas nul et Ψ définie positive, $\lambda = \dfrac{\Psi(P, P)}{\|Y\|_2^2} > 0$, i.e. $\boxed{\text{le spectre de } S \text{ est inclus dans } \mathbf{R}_+^*}$. En particulier $\det(S) > 0$ et donc S est inversible, i.e. $\boxed{\operatorname{rg}(S) = n + 1.}$ En reprenant le raisonnement de la question 10

avec $[\![1;j]\!] = \sum_{k=1}^{j} \{k\}$, il vient $S'_{i,j} = \sum_{k=1}^{j} S_{i,k}$ et donc, en prenant les cardinaux, $s'_{i,j} = \sum_{k=1}^{j} s_{i,k}$. En notant T la matrice triangulaire supérieure dont tous les coefficients sur la diagonale ou au-dessus sont égaux à 1, il vient $S' = ST$. Comme T est de déterminant 1, T est inversible, donc S' aussi, i.e. $\boxed{\mathrm{rg}(S') = n+1.}$

17) Soit n dans $\mathbf{N}$. On note E_n l'espace des solutions de l'équation différentielle linéaire à coefficients constants associée au polynôme P_n donné par $P_n = (X-1)^n$, i.e. $P_n\left(\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)(y) = 0$. Par construction c'est un espace vectoriel stable par dérivation car $\mathbf{R}\left[\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right]$ est une $\mathbf{R}$-algèbre commutative et on sait par ailleurs que c'est l'ensemble des fonctions du type $t \mapsto P(t)e^{-t}$ avec P un polynôme vérifiant $\deg(P) < n$. Par croissance comparée, tout élément de E_n tend vers 0 en l'infini et comme $f_i \in E_{i+1}$, pour tous entiers j et k on a $f_i^{(j)} \in E_{i+1}$ et donc $t \mapsto t^k f_i^{(j)}(t) \in E_{i+k+1}$, en particulier $t^k f_i^{(j)}(t) \in o(1)$ et donc $\boxed{f_i^{(j)}(t) = o_{t\to+\infty}\left(t^{-k}\right).}$ De plus, comme $f_i^{(j)}$ est dans E_{i+1}, il est de la forme $t \mapsto P(t)e^{-t}$ et donc $\boxed{L_i \text{ est une fonction polynomiale.}}$ Soit $E = C^\infty(\mathbf{R},\mathbf{R})$, alors E est une $\mathbf{R}$-algèbre et $\exp \in E$. Comme exp ne s'annule jamais, la multiplication par exp, notée μ, est un automorphisme de E et on a $\mu \circ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \circ \mu^{-1} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - \mathrm{Id}$ et donc $(X-1)^i\left(\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right) = \mu \circ \dfrac{\mathrm{d}^i}{\mathrm{d}x^i} \circ \mu^{-1}$ ou encore $\dfrac{\mathrm{d}^i}{\mathrm{d}x^i} = \sum_{k=0}^{i} (-1)^k \dbinom{i}{k} \mu^{-1} \circ \dfrac{\mathrm{d}^{i-k}}{\mathrm{d}x^{i-k}} \circ \mu$. Par définition de f_i, on en déduit

$$L_i = (-1)^i \sum_{k=0}^{i} (-1)^k \binom{i}{k} \left(\frac{X^i}{i!}\right)^{(i-k)} = (-1)^i \sum_{k=0}^{i} (-1)^k \binom{i}{k} \frac{X^k}{k!}$$

i.e. $\boxed{\text{le coefficient de degré } k \text{ de } L_i \text{ est } \dfrac{(-1)^{i-k}}{k!}\dbinom{i}{k}.}$

18) Soit P et Q deux polynômes de $\mathbf{R}[X]$ avec $\mathrm{val}(P) > 0$. Puisque $(P'-P)Q$ et PQ' sont des polynômes et qu'on a $P(t)Q(t)e^{-t} = o_{+\infty}(1)$, on a par intégration par parties, $\Psi((P'-P),Q) = -P(0)Q(0) - \Psi(P,Q') = -\Psi(P,Q')$. Le calcul de la question précédente montre que pour $j < i$, la formule $P_j(t) = f_i^{(j)}(t)e^t$ définit un polynôme et qu'on a

$$P_j = \sum_{k=0}^{j} (-1)^k \binom{j}{k} (X^i)^{(j-k)}$$

et donc pour $j < i$, $\mathrm{val}(P_j) > 0$. Il en résulte pour Q dans $\mathbf{R}_n[X]$, $\Psi(P_i,Q) = -\Psi(P_{i-1},Q')$ et donc, par récurrence immédiate, $\Psi(P_i,Q) = (-1)^i\Psi(P_0,Q^{(i)})$. En particulier si $\deg(Q) < i$, on a $\Psi(L_i,Q)) = 0$. En particulier pour $j < i$, $\Psi(L_i,L_j) = 0$. Par symétrie du produit scalaire, on en déduit que $\mathcal{L}$ est orthogonale. Par ailleurs on a

$$\Psi(L_i,L_i) = \frac{(-1)^i}{i!}\Psi(P_i,L_i) = \frac{1}{i!}\Psi(P_0,L_i^{(i)}) = \frac{1}{i!}\Psi(X^i,1) = \Psi(B_i,B_0) = 1$$

car $P_0 = X^i$ par construction, $L_i^{(i)}$ d'après la question précédente et en appliquant le résultat de la question 15. Par conséquent $\mathcal{L}$ est une famille orthonormale de cardinal la dimension de $\mathbf{R}_n[X]$, et donc $\boxed{\mathcal{L} \text{ est une base orthonormale de } \mathbf{R}_n[X].}$

19) On remarque tout d'abord que τ est linéaire, car c'est une précomposition par $X-1$, et stabilise $\mathbf{R}_n[X]$ puisqu'elle préserve le degré. C'est un automorphisme de $\mathbf{R}_n[X]$ dont la réciproque est donnée par $P \mapsto P(X+1)$. En posant $T=(t_{i+1,j+1})$ et $U=(u_{i+1,j+1})$ alors $t_{i+1,j+1}$ et $u_{i+1,j+1}$ sont les coefficients de degré i de $(X-1)^j$ et $(X+1)^j$ respectivement. Il vient $\boxed{T=\left((-1)^{j-i}\binom{j}{i}\right)_{0\leq i,j\leq n} \text{ et } U=\left(\binom{j}{i}\right)_{0\leq i,j\leq n}.}$ On a donc $L_j=\sum_{i=0}^{j} t_{i+1,j+1}B_i$, i.e. $\boxed{\text{la matrice de passage de } \mathcal{L} \text{ à } \mathcal{B} \text{ est } T \text{ (donc } U^{-1}).}$ La matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{L}$ est donc U et il vient, d'après la question 15

$$s_{i+1,j+1}=\Psi(B_i,B_j)=\sum_{0\leq k,\ell\leq n} u_{k+1,i+1}u_{\ell+1,j+1}\Psi(L_k,L_\ell)=\sum_{0\leq k\leq n} u_{k+1,i+1}u_{k+1,j+1}$$

i.e. $\boxed{S={}^{\mathrm{t}}UU}$ et, par multiplicativité du déterminant et puisque S et S' ont même déterminant au vu de la réponse à la question 16, et enfin puisque U est triangulaire supérieure avec des 1 sur la diagonale, donc de déterminant 1, $\boxed{\det(S)=\det(S')=1.}$

20) La matrice DUD admet pour coefficients $(-1)^{i+1}(-1)^{j+1}u_{i+1,j+1}$, i.e. $(-1)^{j-i}u_{i+1,j+1}$ et donc $DUD=T=U^{-1}$, et il vient $\boxed{(DU)^2=I_{n+1}.}$ On en déduit, puisque $D=D^{-1}={}^{\mathrm{t}}U$ car D est diagonale à coefficients sur la diagonale égaux à leurs propres inverses, $S^{-1}=U^{-1}\,{}^{\mathrm{t}}U^{-1}=DUD\,{}^{\mathrm{t}}(DUD)=DU\,{}^{\mathrm{t}}UD^{-1}$ et $\boxed{S^{-1} \text{ est semblable à } U\,{}^{\mathrm{t}}U,}$

21) Puisque S^{-1} est semblable à $U\,{}^{\mathrm{t}}U$, on a $\chi_{S^{-1}}=\chi_{U\,{}^{\mathrm{t}}U}$. Il résulte des questions 13 et 19 qu'on a $\chi_{S^{-1}}=\chi_{{}^{\mathrm{t}}UU}=\chi_S$. Soit λ un scalaire non nul. On a

$$\lambda^{n+1}\chi_S(\lambda^{-1})=\det(\lambda(\lambda^{-1}I_{n+1}-S))=\det(S)\det(S^{-1}-\lambda I_{n+1}),$$

i.e. $\lambda^{n+1}\chi_S(\lambda^{-1})=(-1)^{n+1}\chi_{S^{-1}}(\lambda)$ puisque S est de déterminant 1 d'après la question 19. D'où $\chi_S=(-1)^{n+1}u_n(\chi_S)$ car ces deux polynômes coïncident sur un nombre infini de valeurs. Et donc $\boxed{\chi_S \text{ est un polynôme réciproque de première ou seconde espèce selon que } n \text{ est impair ou pair.}}$