Deuxième composition de mathématiques
Mines-Ponts 2013 – MP

Quelques propriétés géométriques du groupe orthogonal

Notations et définitions
Soit E un espace vectoriel euclidien (préhilbertien réel de dimension finie). On note $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ le produit scalaire de E et $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée. Si H est une partie de E, on appelle *enveloppe convexe* de H , notée $\operatorname{conv}(H)$, la plus petite partie convexe de E contenant H, c'est-à-dire l'intersection de tous les convexes de E contenant H.
Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On désigne par $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels. On note I la matrice identité de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ et si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$, on note ${}^{\mathrm{t}}A$ la matrice transposée de A et $\operatorname{tr}(A)$ la trace de A. On rappelle que le *groupe orthogonal* $\mathscr{O}_n(\mathbf{R})$ de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ est l'ensemble des matrices U de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ telles que $U\,{}^{\mathrm{t}}U = I$. On rappelle également qu'une matrice symétrique réelle est dite *positive* si ses valeurs propres sont positives ou nulles.
On pourra identifier $\mathbf{R}^n$ et l'ensemble des matrices colonnes $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R})$, que l'on suppose muni du produit scalaire canonique, pour lequel la base canonique de $\mathbf{R}^n$ est orthonormée. On note $\|\cdot\|_2$ la norme sur $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ telle que, pour tout A dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$,

$$\|A\|_2 = \sup_{X \in \mathbf{R}^n, \|X\|=1} \|AX\| \ .$$

Les parties A, B, C et D sont indépendantes.

PARTIE A - Produit scalaire de matrices

On rappelle que $\operatorname{tr}(A)$ désigne la trace de la matrice A de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$.

1) Montrer que pour toute base orthonormée $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ de $\mathbf{R}^n$, on a la formule $\operatorname{tr}(A) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \langle Ae_i \mid e_i \rangle$.
2) Montrer que l'application $(A, B) \mapsto \operatorname{tr}({}^{\mathrm{t}}AB)$ définit un produit scalaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$, noté $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$.
   On note $\|\cdot\|_1$ la norme euclidienne associée à ce produit scalaire. L'attention des candidat(e)s est attirée sur le fait que $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ est désormais muni de deux normes différentes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$.
3) Si A et B sont symétriques réelles positives, montrer $\langle A \mid B \rangle \geq 0$. On pourra utiliser une base orthonormée de vecteurs propres de B.

PARTIE B - Décomposition polaire

On fixe une base orthonormée (e) de E. Soit f un endomorphisme de E. On note A la matrice de f dans (e).

4) Montrer que ${}^{\mathrm{t}}AA$ est une matrice symétrique réelle positive. Exprimer $\|A\|_2$ en fonction des valeurs propres de ${}^{\mathrm{t}}AA$.
5) Montrer qu'il existe une matrice symétrique réelle positive B vérifiant $B^2 = {}^{\mathrm{t}}AA$. On note h l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base (e) est B.
6) Montrer que la restriction de h à $\operatorname{Im}(h)$ induit un automorphisme de $\operatorname{Im}(h)$. On notera cet automorphisme $\widetilde{h}$.
7) Montrer, pour tout x dans E, $\|h(x)\| = \|f(x)\|$. En déduire que $\operatorname{Ker}(h)$ et $(\operatorname{Im}(f))^\perp$ ont même dimension et qu'il existe un isomorphisme v de $\operatorname{Ker}(h)$ sur $(\operatorname{Im}(f))^\perp$ qui conserve la norme.
8) À l'aide de $\widetilde{h}$ et v, construire un automorphisme orthogonal u de E tel que $f = u \circ h$.
9) En déduire que toute matrice A dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ s'écrit sous la forme $A = US$, où U appartient à $\mathscr{O}_n(\mathbf{R})$ et S est une matrice symétrique positive.
   On admet que si A est inversible, cette écriture est unique.

PARTIE C - Projeté sur un convexe compact

Soit H une partie de E, convexe et compacte, et soit x dans E. On note

$$d(x,H) = \inf_{h\in H} \|x-h\| \ .$$

10) Montrer qu'il existe un unique h_0 dans H tel que $d(x,H) = \|x-h_0\|$. On pourra utiliser pour h_0, h_1 dans H la fonction définie pour tout t réel par la formule $q(t) = \|x - th_0 - (1-t)h_1\|^2$.

11) Montrer que h_0 est caractérisé par la condition $\langle x-h_0 \,|\, h-h_0\rangle \leq 0$ pour tout h dans H. On pourra utiliser la même fonction q qu'à la question précédente.

Le vecteur h_0 s'appelle *projeté* de x sur H.

PARTIE D - Théorème de Carathéodory et compacité

Dans cette partie, on suppose que E est de dimension n. On dit que x dans E est une *combinaison convexe* des p éléments x_1, x_2, …, x_p de E s'il existe des réels λ_1, λ_2, …, λ_p positifs ou nuls tels que

$$x = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{p} \lambda_i = 1 \ .$$

12) Montrer que l'enveloppe convexe $\mathrm{conv}\,(H)$ d'une partie H de E est constituée des combinaisons convexes d'éléments de H.

On souhaite montrer que l'enveloppe convexe $\mathrm{conv}\,(H)$ est constituée des combinaisons convexes d'au plus $n+1$ éléments de H.

Soit x donné par $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i$ une combinaison convexe de x_1, x_2, …, x_p dans H avec $p \geq n+2$.

13) Montrer qu'il existe p réels non tous nuls μ_1, μ_2, …, μ_p tels que

$$\sum_{i=1}^{p} \mu_i x_i = 0 \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{p} \mu_i = 0 \ .$$

On pourra considérer la famille $(x_2 - x_1, x_3 - x_1, \ldots, x_p - x_1)$.

14) En déduire que x s'écrit comme combinaison convexe d'au plus $p-1$ éléments de H et conclure que $\mathrm{conv}\,(H)$ est constitué des combinaisons convexes d'au plus $n+1$ éléments de H.

On pourra considérer une suite de coefficients positifs de la forme $\lambda_i - \theta\mu_i$, pour $i \in \{1, 2, \ldots, p\}$ pour un réel θ bien choisi.

15) Si H est une partie compacte de E, montrer que $\mathrm{conv}\,(H)$ est compact.

On pourra introduire l'ensemble compact de $\mathbf{R}^{n+1}$ défini par

$$\Lambda = \left\{ (t_1, \ldots, t_{n+1}) \in (\mathbf{R}_+)^{n+1} \;\middle|\; \sum_{i=1}^{n+1} t_i = 1 \right\} \ .$$

PARTIE E - Enveloppe convexe de $\mathscr{O}_n(\mathbf{R})$

16) Montrer que l'enveloppe convexe $\mathrm{conv}\,(\mathscr{O}_n(\mathbf{R}))$ est compacte.

On note $\mathcal{B}$ la boule unité fermée de $(\mathscr{M}_n(\mathbf{R}), \|\cdot\|_2)$.

17) Montrer que $\mathrm{conv}\,(\mathscr{O}_n(\mathbf{R}))$ est contenu dans $\mathcal{B}$.

On suppose qu'il existe M dans $\mathcal{B}$ n'appartenant pas à $\mathrm{conv}\,(\mathscr{O}_n(\mathbf{R}))$. On note N le projeté de M sur $\mathrm{conv}\,(\mathscr{O}_n(\mathbf{R}))$ défini à la partie C pour la norme $\|\cdot\|_1$, et on pose $A = {}^{\mathrm{t}}(M-N)$. On écrit enfin $A = US$, avec U orthogonale et S symétrique réelle positive (question 9).

18) Montrer pour tout V dans $\operatorname{conv}(\mathscr{O}_n(\mathbf{R}))$, $\operatorname{tr}(AV) \leq \operatorname{tr}(AN) < \operatorname{tr}(AM)$. En déduire $\operatorname{tr}(S) < \operatorname{tr}(USM)$.

19) Montrer $\operatorname{tr}(MUS) \leq \operatorname{tr}(S)$. On pourra appliquer le résultat de la question 1).

20) Conclure : déterminer $\operatorname{conv}(\mathscr{O}_n(\mathbf{R}))$.

PARTIE F - Points extrémaux

Un élément A de $\mathcal{B}$ est dit *extrémal* dans $\mathcal{B}$ si l'écriture $A = \frac{1}{2}(B+C)$, avec B, C appartenant à $\mathcal{B}$, entraîne $A = B = C$. Dans cette partie, on cherche à déterminer l'ensemble des points extrémaux de $\mathcal{B}$.

21) On suppose que U dans $\mathscr{O}_n(\mathbf{R})$ s'écrit sous la forme $U = \frac{1}{2}(V+W)$, avec V, W appartenant à $\mathcal{B}$. Montrer que pour tout X dans $\mathbf{R}^n$, les vecteurs VX et WX sont liés. En déduire que U est extrémal dans $\mathcal{B}$.

Soit A appartenant à $\mathcal{B}$ mais n'appartenant pas à $\mathscr{O}_n(\mathbf{R})$.

22) Montrer que l'on peut écrire A sous la forme $A = PDQ$, où P et Q sont deux matrices orthogonales et où D est une matrice diagonale dont les éléments diagonaux d_1, d_2, ..., d_n sont positifs ou nuls.

23) Montrer $d_i \leq 1$ pour tout i dans $\{1, 2, \ldots, n\}$, et qu'il existe j dans $\{1, 2, \ldots, n\}$ tel que $d_j < 1$.

24) En déduire qu'il existe deux matrices A_α et $A_{-\alpha}$ appartenant à $\mathcal{B}$ telles que $A = \frac{1}{2}(A_\alpha + A_{-\alpha})$. Conclure.

DEUXIÈME COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES – MINES-PONTS 2013 – MP

PARTIE A - Produit scalaire de matrices

1) Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée et P la matrice de passage de la base canonique $(\varepsilon_i)_{1\leq i\leq n}$ à cette base. Puisqu'on a affaire à des bases orthonormées, P est une matrice orthogonale. Puisque, pour $1 \leq i \leq n$, e_i est la i-ième colonne de P, on a $e_i = P\varepsilon_i$ et donc $\langle Ae_i \,|\, e_i\rangle = \langle AP\varepsilon_i \,|\, P\varepsilon_i\rangle = \left\langle P^{-1}AP\varepsilon_i \;\middle|\; \varepsilon_i\right\rangle$, puisque P préserve le produit scalaire. Il en résulte $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \langle Ae_i \,|\, e_i\rangle = \mathrm{tr}(P^{-1}AP)$ et donc, puisque la trace est invariante par changement de base, $\boxed{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \langle Ae_i \,|\, e_i\rangle = \mathrm{tr}(A).}$

2) Si $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ et $B = (b_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$, alors $\mathrm{tr}({}^{\mathrm{t}}AB)$ est égal à $\sum_{i,j} a_{ij}b_{ij}$ et est égal au produit scalaire des images de A et B par l'isomorphisme canonique entre $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ et $\mathbf{R}^{n^2}$, lorsqu'on munit $\mathbf{R}^{n^2}$ de son produit scalaire canonique. Il en résulte que
$\boxed{(A, B) \mapsto \mathrm{tr}({}^{\mathrm{t}}AB) \text{ définit un produit scalaire.}}$

3) Soit A et B deux matrices symétriques réelles positives. Grâce au théorème spectral, on dispose de bases orthonormées $(e_1, \dots, e_n)$ et $(f_1, \dots, f_n)$ de diagonalisation de A et B respectivement. On note λ_i et μ_j les valeurs propres associées à e_i et f_j respectivement, pour $1 \leq i, j \leq n$. Il vient alors, en utilisant 1) et ${}^{\mathrm{t}}A = A$,

$$\mathrm{tr}({}^{\mathrm{t}}AB) = \sum_{j=1}^{n} \langle ABf_j \,|\, f_j\rangle = \sum_{j=1}^{n} \mu_j \langle Af_j \,|\, f_j\rangle \;.$$

Et donc, en décomposant suivant la base de diagonalisation de A,

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}({}^{\mathrm{t}}AB) &= \sum_{j=1}^{n} \mu_j \left\langle A\left(\sum_{i=1}^{n} \langle f_j \,|\, e_i\rangle e_i\right) \;\middle|\; f_j \right\rangle = \sum_{j=1}^{n} \mu_j \left\langle \sum_{i=1}^{n} \langle f_j \,|\, e_i\rangle \lambda_i e_i \;\middle|\; f_j \right\rangle \\ &= \sum_{j=1}^{n} \mu_j \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \langle f_j \,|\, e_i\rangle \langle e_i \,|\, f_j\rangle = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\mu_j \langle f_j \,|\, e_i\rangle^2\end{aligned}$$

et on a affaire à une somme de termes tous positifs puisque A et B sont positives. Il en résulte $\boxed{\langle A \,|\, B\rangle \geq 0.}$

PARTIE B - Décomposition polaire

4) Puisque la trace est contravariante, la matrice ${}^{\mathrm{t}}AA$ est symétrique réelle. Grâce au théorème spectral, on dispose alors d'une base (orthogonale) de vecteurs propres de ${}^{\mathrm{t}}AA$. Soit X l'un d'eux et λ sa valeur propre associée. On a

$$\|AX\|^2 = {}^{\mathrm{t}}(AX)AX = {}^{\mathrm{t}}X\,{}^{\mathrm{t}}AAX = {}^{\mathrm{t}}X(\lambda X) = \lambda\,{}^{\mathrm{t}}XX = \lambda\,\|X\|^2 \;.$$

Or X est non nul, car vecteur propre, et donc sa norme est non nulle. Il en résulte $\lambda = \dfrac{\|AX\|^2}{\|X\|^2}$ et λ est donc positif, i.e. $\boxed{{}^{\mathrm{t}}AA \text{ est symétrique réelle positive.}}$

Plus précisément, d'après le calcul précédent, on a $\|AX\|^2 \leq \max\left(\mathrm{Sp}({}^{\mathrm{t}}AA)\right) \cdot \|X\|^2$, où Sp désigne le spectre d'une matrice, par positivité de $\|X\|^2$. De plus il y a égalité dans cette inégalité lorsque X est un vecteur propre associé à la plus grande des valeurs propres de ${}^{\mathrm{t}}AA$. Il en résulte $\|A\|_2^2 = \max\left(\mathrm{Sp}({}^{\mathrm{t}}AA)\right)$ et donc
$\boxed{\|A\|_2 \text{ est la racine carrée de la plus grande des valeurs propres de } {}^{\mathrm{t}}AA.}$

5) On dispose d'une base orthonormée de diagonalisation de ${}^{\mathrm{t}}AA$ et donc d'une matrice orthogonale P telle que ${}^{\mathrm{t}}P\,{}^{\mathrm{t}}AAP$ soit diagonale. On note D cette matrice. D'après la question précédente, ses coefficients diagonaux sont positifs, puisque ce sont les valeurs propres de ${}^{\mathrm{t}}AA$. On note Δ la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont les racines carrées de ceux de D, de sorte qu'on a $\Delta^2 = D$. Il vient alors, en posant $B = P\Delta\,{}^{\mathrm{t}}P$,

$$B^2 = P\Delta\,{}^{\mathrm{t}}PP\Delta\,{}^{\mathrm{t}}P = P\Delta^2\,{}^{\mathrm{t}}P = PD\,{}^{\mathrm{t}}P = A \quad \text{et} \quad {}^{\mathrm{t}}B = P\,{}^{\mathrm{t}}\Delta\,{}^{\mathrm{t}}P = P\Delta\,{}^{\mathrm{t}}P = B$$

puisque l'inverse de P est sa transposée et que Δ est symétrique. De plus B est orthogonalement semblable à Δ et donc ses valeurs propres sont réelles positives, égales aux éléments diagonaux de Δ. Il en résulte que $\boxed{B \text{ est symétrique réelle positive et } B^2 = {}^{\mathrm{t}}AA.}$

6) Puisque h admet une matrice symétrique réelle comme matrice dans (e), h est diagonalisable. En particulier $\mathrm{Ker}(h^2) = \mathrm{Ker}(h)$ et donc $\mathrm{Im}(h^2) = \mathrm{Im}(h)$, par dimension et grâce au théorème du rang. Il en résulte que la restriction de h à $\mathrm{Im}(h)$ admet $\mathrm{Im}(h)$ comme image, i.e. est un endomorphisme surjectif de $\mathrm{Im}(h)$. Puisque ce dernier est de dimension finie,

$\boxed{\text{la restriction de } h \text{ à } \mathrm{Im}(h) \text{ induit un automorphisme de } \mathrm{Im}(h).}$

7) Soit x dans E et X sa matrice dans la base (e). On a, par orthonormalité de (e),

$$\|h(x)\|^2 = {}^{\mathrm{t}}(BX)BX = {}^{\mathrm{t}}XB^2X = {}^{\mathrm{t}}X\,{}^{\mathrm{t}}AAX = \|AX\|^2 = \|f(x)\|^2$$

et donc, par positivité des normes, $\boxed{\|h(x)\| = \|f(x)\|.}$

On en déduit $\mathrm{Ker}(h) = \mathrm{Ker}(f)$ et donc, d'après le théorème du rang, $\mathrm{Ker}(h)$ a la même dimension qu'un supplémentaire de $\mathrm{Im}(h)$, en particulier de son supplémentaire orthogonal (dont l'existence est garantie car E est de dimension finie), i.e.

$\boxed{\mathrm{Ker}(h) \text{ et } (\mathrm{Im}(f))^{\perp} \text{ ont même dimension.}}$

On dispose alors de deux bases orthonormées de $\mathrm{Ker}(h)$ et $(\mathrm{Im}(f))^{\perp}$, que l'on complète respectivement en deux bases orthonormées de E. L'endomorphisme v de E qui envoie la première base sur la seconde est alors une isométrie, et elle envoie une base de $\mathrm{Ker}(h)$ sur une base de $(\mathrm{Im}(f))^{\perp}$. Par conséquent

$\boxed{v \text{ est un isomorphisme de } \mathrm{Ker}(h) \text{ sur } (\mathrm{Im}(f))^{\perp} \text{ qui conserve la norme.}}$

8) Puisque h est diagonalisable, ou d'après 6), $E = \mathrm{Ker}(h) \oplus \mathrm{Im}(h)$. Puisque la matrice de h dans une base orthonormée est symétrique réelle, ses sous-espaces propres sont en somme directe orthogonale et donc il vient $E = \mathrm{Ker}(h) \oplus^{\perp} \mathrm{Im}(h)$. De plus, par définition d'un supplémentaire orthogonal, on a également $E = (\mathrm{Im}(f))^{\perp} \oplus^{\perp} \mathrm{Im}(f)$.

Soit alors u l'endomorphisme de E adapté à ces décompositions en sommes directes et défini par ses restrictions à $\mathrm{Im}(h)$ et $\mathrm{Ker}(h)$ respectivement par $f \circ \widetilde{h}^{-1}$ et v. Soit x dans $\mathrm{Im}(h)$, on a

$$\left\| f \circ \widetilde{h}^{-1}(h(x)) \right\| = \|f(x)\| = \|h(x)\|$$

d'après la question précédente et donc $f \circ \widetilde{h}^{-1}$ et v préservent tous deux la norme. De plus, par orthogonalité, pour x dans $\mathrm{Ker}(h)$ et y dans $\mathrm{Im}(h)$, on a

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 = \|v(x)\|^2 + \left\| f \circ \widetilde{h}^{-1}(y) \right\|^2 = \left\| v(x) + f \circ \widetilde{h}^{-1}(y) \right\|^2 = \|u(x) + u(y)\|^2\ ,$$

d'où $\|x+y\|^2 = \|u(x+y)\|^2$, et donc u est un automorphisme orthogonal de E.

Par construction, pour x dans $\mathrm{Ker}(h)$, on a $u \circ h(x) = 0 = f(x)$ puisque $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(h)$, d'après 7) et, pour x dans $\mathrm{Im}(h)$, on a $h(x) = \widetilde{h}(x)$ et donc $u \circ h(x) = f(x)$. Par linéarité il en résulte $f = u \circ h$, i.e. $\boxed{u \text{ est un automorphisme orthogonal de } E \text{ tel que } f = u \circ h.}$

9) Soit A dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$. On lui associe l'endomorphisme f de E dont la matrice dans la base (e) est A. D'après la question précédente, on peut écrire $f = u \circ h$ et, en notant U et S les matrices de u et h dans la base (e), on en déduit $A = US$. Comme (e) est orthonormée et u est orthogonal, il en va de même pour U, et par construction de h, S est une matrice symétrique réelle positive vérifiant $S^2 = {}^{\mathrm{t}}AA$, i.e.

$\boxed{A = US, \text{ avec } U \in \mathscr{O}_n(\mathbf{R}) \text{ et } S \text{ symétrique positive.}}$

PARTIE C - Projeté sur un convexe compact

10) Puisque H est compact, par continuité de la fonction norme sur E et d'après le théorème de WEIERSTRASS, la fonction $y \mapsto \|x-y\|$ atteint son minimum sur H. On dispose donc de h_0 dans H tel que $d(x,H) = \|x - h_0\|$.
Soit alors h_1 un point de H tel que $d(x,H) = \|x-h_1\|$. On a alors, par identité du parallélogramme

$$2\left\|x - \frac{h_0+h_1}{2}\right\|^2 + 2\left\|\frac{h_0-h_1}{2}\right\|^2 = \|x-h_1\|^2 + \|x-h_0\|^2 = 2d(x,H)^2$$

et aussi, par convexité de H, $2\left\|x - \dfrac{h_0+h_1}{2}\right\|^2 \geq 2d(x,H)^2$, d'où $2\left\|\dfrac{h_0-h_1}{2}\right\|^2 \leq 0$. Il en résulte $h_0 = h_1$, i.e. $\boxed{\text{il existe un unique } h_0 \text{ dans } H \text{ tel que } d(x,H) = \|x-h_0\|.}$
Remarque : le triangle (x, h_0, h_1) est isocèle, donc sa hauteur est aussi sa médiatrice. La distance de x à la droite (h_0h_1) est donc atteinte en le milieu du segment $[\,h_0; h_1\,]$, segment qui, par convexité de H, est inclus dans H.

11) Soit h dans H et t dans $]0;1\,]$. Par convexité de H, $(1-t)h_0 + th$ appartient à H et donc

$$\|x - (1-t)h_0 - th\|^2 \geq d(x,H)^2 \ .$$

En développant, il vient

$$d(x,H)^2 \leq \|x-h_0\|^2 - 2t\,\langle x-h_0 \,|\, h-h_0\rangle + t^2\,\|h-h_0\|^2$$

et donc, par stricte positivité de t et puisque $d(x,H)^2 = \|x-h_0\|^2$,

$$0 \leq -2\,\langle x-h_0 \,|\, h-h_0\rangle + t\,\|h-h_0\|^2 \ .$$

Cette inégalité étant vraie pour tout t dans $]0;1\,]$, on peut faire tendre t vers 0 par valeurs strictement positives et il vient $0 \leq -2\,\langle x-h_0 \,|\, h-h_0\rangle$, i.e. $\langle x-h_0 \,|\, h-h_0\rangle \leq 0$.
Soit maintenant h_1 dans H tel que, pour tout h dans H, on ait $\langle x-h_1 \,|\, h-h_1\rangle \leq 0$. Il vient alors $\langle x-h_1 \,|\, h_0-h_1\rangle \leq 0$ puis, comme on a aussi $\langle x-h_0 \,|\, h_1-h_0\rangle \leq 0$, $\langle h_1-h_0 \,|\, h_1-h_0\rangle \leq 0$, en sommant, i.e. $\|h_1-h_0\|^2 \leq 0$, ce qui entraîne $h_1 = h_0$. Autrement dit

$\boxed{h_0 \text{ est caractérisé par la condition } \langle x-h_0 \,|\, h-h_0\rangle \leq 0 \text{ pour tout } h \text{ dans } H.}$

PARTIE D - Théorème de CARATHÉODORY et compacité

12) Par définition d'un convexe, il est stable par combinaison convexe. En particulier tout convexe contenant H contient toutes les combinaisons convexes d'éléments de H. Réciproquement si on note X l'ensemble des combinaisons convexes d'éléments de H, par associativité du barycentre, X est stable par combinaison convexe, et donc X est convexe. Il en résulte que X est le plus petit convexe contenant H, i.e.

$\boxed{\mathrm{conv}\,(H) \text{ est constitué des combinaisons convexes d'éléments de } H.}$

13) Puisque la famille $(x_2 - x_1, x_3 - x_1, \ldots, x_p - x_1)$ est formée de $p-1$ vecteurs, elle a un cardinal strictement supérieur à la dimension n de E, et est donc liée. On dispose donc d'une combinaison linéaire non triviale de ces vecteurs qui soit nulle. Soit donc μ_2, …, μ_p des réels non tous nuls tels que $\sum_{i=2}^{p} \mu_i(x_i - x_1) = 0$. On pose alors $\mu_1 = -\sum_{i=2}^{p} \mu_i$. Les réels μ_1, …, μ_p sont non tous nuls, puisque c'est vrai pour la sous-famille excluant μ_1, et il vient $\boxed{\sum_{i=1}^{p} \mu_i x_i = 0 \text{ et } \sum_{i=1}^{p} \mu_i = 0.}$

14) Par construction, pour tout réel θ, on a $\sum_{i=1}^{p} (\lambda_i - \theta\mu_i)x_i = x - \theta 0 = x$ et $\sum_{i=1}^{p} (\lambda_i - \theta\mu_i) = 1 - \theta 0 = 1$.
Puisque la somme $\sum_{i=1}^{p} \mu_i$ est nulle sans être formée de termes tous nuls, on dispose de termes de signes distincts (strictement) et donc en particulier l'ensemble I défini par $I = \{i \in [\![1;p]\!] \mid \mu_i > 0\}$ est fini et non vide. Il en va donc de même pour l'ensemble Θ donné par $\Theta = \left\{ \frac{\lambda_i}{\mu_i} \;\middle|\; i \in I \right\}$. On peut donc en définir le minimum, noté θ, et on dispose de i_0 dans I tel que $\lambda_{i_0} = \theta\mu_{i_0}$. De plus, par construction $\lambda_i - \theta\mu_i$ est positif pour tout i dans I, mais aussi en dehors de I puisqu'alors λ_i, θ et $-\mu_i$ sont positifs. Puisqu'on a $x = \sum_{i \neq i_0} (\lambda_i - \theta\mu_i)x_i$, x est combinaison convexe des vecteurs $(x_i)_{i \neq i_0}$ et donc

$\boxed{x \text{ s'écrit comme combinaison convexe d'au plus } p-1 \text{ éléments de } H.}$

Par récurrence descendante immédiate x est combinaison convexe d'au plus $n+1$ éléments de H et $\boxed{\operatorname{conv}(H) \text{ est constitué des combinaisons convexes d'au plus } n+1 \text{ éléments de } H.}$

15) L'application $(t_1, \ldots, t_{n+1}) \times (h_1, \ldots, h_{n+1}) \mapsto \sum_{i=1}^{n+1} t_i h_i$, définie sur $\mathbf{R}^{n+1} \times E^{n+1}$ est bilinéaire, donc continue puisque les espaces considérés sont de dimension finie.
De plus l'image de $\Lambda \times H^{n+1}$ par cette application est incluse dans $\operatorname{conv}(H)$, par stabilité par combinaison convexe de $\operatorname{conv}(H)$. D'après ce qui précède, elle lui est même égale. Enfin Λ est l'intersection de $[0;1]^{n+1}$ avec l'hyperplan d'équation $\sum_{i=1}^{n+1} t_i = 1$. Comme le premier est compact en tant que produit de segments (donc compacts) et le second est fermé en tant qu'image réciproque du fermé $\{1\}$ par une forme linéaire continue (car en dimension finie), Λ est compact. En tant que produit cartésien (fini) de compacts, $\Lambda \times H^{n+1}$ l'est aussi et il résulte du théorème de Weierstrass que son image par une application continue est compacte. En particulier, d'après ce qui précède, $\boxed{\operatorname{conv}(H) \text{ est compact.}}$

PARTIE E - Enveloppe convexe de $\mathscr{O}_n(\mathbf{R})$

16) Puisqu'un automorphisme orthogonal préserve la norme, il est de norme 1 pour $\|\cdot\|_2$ et donc $\mathscr{O}_n(\mathbf{R})$ est borné dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ muni de cette norme. De plus les applications $M \mapsto {}^{\mathrm{t}}M$ et $(M, N) \mapsto MN$ définies sur $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ et $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})^2$ sont linéaires et bilinéaires respectivement, donc continues puisqu'on a affaire à un espace de dimension finie. Il en résulte, par composition, qu'il en va de même pour l'application $M \mapsto {}^{\mathrm{t}}MM$ sur $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$. Comme $\mathscr{O}_n(\mathbf{R})$ est l'image réciproque du fermé $\{I_n\}$ par cette application, il est fermé pour toute norme sur $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$. D'après le théorème de Heine-Borel $\mathscr{O}_n(\mathbf{R})$ est compact, pour la norme $\|\cdot\|_2$, et donc en fait pour toute norme, par équivalence des normes en dimension finie. D'après ce qui précède, on en conclut, puisque $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ est de dimension n^2, finie, que

$\boxed{\text{l'enveloppe convexe } \operatorname{conv}(\mathscr{O}_n(\mathbf{R})) \text{ est compacte.}}$

17) D'après la démonstration précédente, $\mathscr{O}_n(\mathbf{R})$ est inclus dans $\mathcal{B}$. Comme toute boule est convexe, $\mathcal{B}$ est un convexe contenant $\mathscr{O}_n(\mathbf{R})$, donc aussi son enveloppe convexe, par définition de l'enveloppe convexe, i.e. $\boxed{\text{conv}\,(\mathscr{O}_n(\mathbf{R})) \text{ est contenu dans } \mathcal{B}.}$

18) Soit V dans $\text{conv}\,(\mathscr{O}_n(\mathbf{R}))$. Comme N est le projeté de M sur $\text{conv}\,(\mathscr{O}_n(\mathbf{R}))$, on a d'après la question 11), $\langle M-N \,|\, V-N\rangle \leq 0$, i.e. $\text{tr}(A(V-N)) \leq 0$. Par linéarité de la trace, il vient $\boxed{\text{tr}(AV) \leq \text{tr}(AN).}$

Puisque M n'appartient pas à $\text{conv}\,(\mathscr{O}_n(\mathbf{R}))$, $M \neq N$, et donc par définition, on a $0 < \|M-N\|^2 = \langle M-N \,|\, M-N\rangle = \text{tr}(A(M-N))$. Par linéarité de la trace il vient

$\boxed{\text{tr}(AN) < \text{tr}(AM).}$

En prenant $V = U^{-1}$, ce qui est licite car U est orthogonal et donc son inverse aussi, il vient $\text{tr}(AV) = \text{tr}(USU^{-1}) = \text{tr}(S)$, puisque la trace est invariante par conjugaison, et donc l'inégalité précédente donne $\boxed{\text{tr}(S) < \text{tr}(USM).}$

19) D'après le théorème spectral, on dispose d'une base $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ d'orthodiagonalisation de la matrice symétrice réelle S. Pour $1 \leq i \leq n$, on a $\|MUe_i\| \leq \|Ue_i\|$ puisque $\|M\|_2 = 1$, et donc $\|MUe_i\| \leq 1$ puisque U préserve la norme du vecteur unitaire e_i. Il résulte donc de l'inégalité de Cauchy-Schwarz qu'on a $\langle MUe_i \,|\, e_i\rangle \leq 1$ puisqu'on a affaire à des vecteurs de normes inférieures à 1. D'après la question 1) et par positivité des valeurs propres de S, il vient

$$\text{tr}(MUS) = \sum_{i=1}^{n} \langle MUSe_i \,|\, e_i\rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \langle MUe_i \,|\, e_i\rangle \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$$

et cette dernière somme étant la somme des valeurs propres de S, c'en est la trace et il vient

$\boxed{\text{tr}(MUS) \leq \text{tr}(S).}$

20) Les deux questions précédentes montre que l'hypothèse faite sur M est absurde et donc

$\boxed{\text{conv}\,(\mathscr{O}_n(\mathbf{R})) = \mathcal{B}.}$

PARTIE F - Points extrémaux

21) Soit X dans $\mathbf{R}^n$. On a

$$\frac{1}{2}(\|VX\| + \|WX\|) \leq \frac{1}{2}(\|X\| + \|X\|) = \|X\| = \|UX\| = \left\|\frac{1}{2}(VX + WX)\right\|$$

et donc, d'après l'inégalité triangulaire pour la norme euclidienne, il doit y avoir égalité et donc, d'après la caractérisation du cas d'égalité, les vecteurs

$\boxed{VX \text{ et } WX \text{ sont (positivement) liés.}}$

On en déduit également que les vecteurs VX et WX sont de norme 1. Ils sont donc égaux, et ainsi égaux à leur demi-somme, i.e. $VX = WX = UX$. Comme c'est vrai pour tout X, $V = W = U$ et on en déduit que $\boxed{U \text{ est extrémal dans } \mathcal{B}.}$

22) D'après la question 9), on dispose de U et S respectivement orthogonale et symétrique réelle positive telles que $A = US$. D'après le théorème spectral, on dispose de Q orthogonale et de D diagonale, à diagonale positive (ou nulle), telles que $S = {}^{\text{t}}QDQ$. En posant $P = U\,{}^{\text{t}}Q$, P est orthogonal puisque $\mathscr{O}_n(\mathbf{R})$ est un groupe multiplicatif, et $\boxed{A = PDQ.}$

23) Puisque P et Q préservent la norme et sont des automorphismes, l'image de la sphère unité par Q est elle-même, et $\|A\|_2 = \|PDQ\|_2 = \|D\|_2$. Puisque D est diagonale, on a $\|D\|_2 = \max_{1\leq i\leq n} |d_i|$ et on en déduit, par positivité des éléments de D, que pour tout i dans $[\![1;n]\!]$, $\boxed{0 \leq d_i \leq 1.}$

De plus si tous les coefficients diagonaux de D étaient égaux à 1, D serait l'identité et donc A serait égal à PQ. En particulier A serait orthogonal. Il en résulte qu'il existe j dans $[\![1;n]\!]$ tel que $\boxed{d_j < 1.}$

24) Pour α dans $\mathbf{R}$, on pose $D_\alpha = D + \alpha E_{j,j}$, où $E_{j,j}$ est la matrice de la base canonique ayant 1 comme unique coordonnée non nulle en j-ième ligne et j-ième colonne. Si $-1 - d_j \leq \alpha \leq 1 - d_j$, alors la matrice D_α est diagonale et tous ses coefficients diagonaux sont de valeur absolue inférieure à 1. Il en résulte $D_\alpha \in \mathcal{B}$, d'après la remarque faite à la question précédente. Puisque P et Q sont orthogonaux, en posant $A_\alpha = PD_\alpha Q$, on a également $A_\alpha \in \mathcal{B}$.

Puisqu'on a $0 \leq d_j < 1$, on a $-1 - d_j \leq -1 \leq 0 < 1 - d_j$ et donc pour α vérifiant $|\alpha| < 1 - d_j$, A_α et $A_{-\alpha}$ appartiennent à $\mathcal{B}$. Par construction A en est la demi-somme, i.e.

$$\boxed{A_\alpha \text{ et } A_{-\alpha} \text{ appartiennent à } \mathcal{B} \text{ et } A = \frac{1}{2}(A_\alpha + A_{-\alpha}).}$$

On en déduit que A n'est pas extrémal et donc, grâce à 21) et 23), on conclut que

$$\boxed{\text{les points extrémaux de } \mathcal{B} \text{ sont exactement les éléments de } \mathscr{O}_n(\mathbf{R}).}$$