Première composition
Mines-Ponts 2015 – MP

Opérateur de Volterra et équations différentielles

L'objectif de ce problème est l'étude d'un opérateur de Volterra appliqué notamment à la résolution de certaines équations différentielles.
On considère l'espace vectoriel E des fonctions réelles définies et continues sur l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, muni du produit scalaire défini pour tous f, g dans E par :

$$\langle f \mid g\rangle = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t\ .$$

On note $\|f\| = \sqrt{\langle f \mid f\rangle}$ la norme associée à ce produit scalaire. Un endomorphisme V de E est dit *symétrique défini positif* si pour tous f, g dans E, on a : $\langle V(f) \mid g\rangle = \langle f \mid V(g)\rangle$ et si de plus $\langle V(f) \mid f\rangle > 0$ pour tout f dans E non nul.

Les parties I *et* II *sont mutuellement indépendantes.*

PARTIE I - Opérateur de Volterra

On note V et V^* les endomorphismes de E définis par les formules :

$$V(f)(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

$$V^*(f)(x) = \int_x^{\pi/2} f(t)\,\mathrm{d}t$$

pour tous f dans E et x dans $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

1) En observant que $V(f)$ et $-V^*(f)$ sont des primitives de f, montrer que pour tous f, g dans E, on a : $\langle V(f) \mid g\rangle = \langle f \mid V^*(g)\rangle$.
2) Montrer que l'endomorphisme $V^* \circ V$ est symétrique défini positif. En déduire que ses valeurs propres sont strictement positives.

Soit λ une valeur propre de $V^* \circ V$ et f_λ un vecteur propre associé à λ.

3) Montrer que f_λ est de classe C^2 et est solution de l'équation différentielle : $y'' + \dfrac{1}{\lambda}y = 0$ avec les conditions $y(\frac{\pi}{2}) = y'(0) = 0$.
4) En déduire que λ est une valeur propre de $V^* \circ V$ si et seulement s'il existe n entier naturel tel que $\lambda = \dfrac{1}{(2n+1)^2}$. Préciser alors les vecteurs propres associés.

PARTIE II - Théorème d'approximation de Weierstrass

Soit n un entier strictement positif, x dans $[0; 1]$ et $f : [0; 1] \to \mathbf{R}$ une fonction continue. On note $X_1, X_2, \ldots, X_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes et distribuées selon la même loi de Bernoulli de paramètre x. On note également : $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$, $Z_n = \dfrac{S_n}{n}$ et $B_n(f)(x) = \mathbf{E}\left(f(Z_n)\right)$.

5) Rappeler sans démonstration, la loi de S_n. En déduire, avec démonstration, les valeurs de l'espérance et de la variance de S_n en fonction de n et de x.

6) En utilisant l'inégalité de BIENAYMÉ-TCHEBYCHEV, montrer que pour tout α strictement positif

$$\sum_{\substack{0\leq k\leq n \\ \left|\frac{k}{n}-x\right|\geq\alpha}} \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} \leq \frac{1}{4n\alpha^2}$$

7) Montrer

$$B_n(f)(x) - f(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} \left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right)$$

et en déduire que la suite $(B_n(f))_{n\in\mathbf{N}}$ converge uniformément vers f sur $[0;1]$. On pourra utiliser le résultat de la question précédente ainsi que le théorème de HEINE.

On a donc établi le *théorème de* WEIERSTRASS sur le segment $[0;1]$: toute fonction continue sur $[0;1]$ y est limite uniforme d'une suite de polynômes. On en déduit aisément, et on l'admet, le théorème d'approximation de WEIERSTRASS sur un segment quelconque $[a;b]$.

PARTIE III - Développement de $V^* \circ V(f)$ en série trigonométrique

On considère maintenant l'espace vectoriel G des fonctions réelles définies et continues sur l'intervalle $[0;\pi]$, muni du produit scalaire défini pour tous f, g dans G par :

$$\langle f \mid g\rangle_G = \int_0^{\pi} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t\ .$$

On note : $\|f\|_G = \sqrt{\langle f \mid f\rangle_G}$ la norme associée à ce produit scalaire.
Pour n entier, on définit la fonction c_n dans G par la formule $c_n(t) = \cos(nt)$ et on note $F_n = \mathrm{V}ect\,(c_0,\ldots,c_n)$ le sous espace vectoriel de G engendré par $(c_0,\ldots,c_n)$. On note également P_{F_n} la projection orthogonale de G sur F_n.

8) Montrer que si p est un polynôme de degré n entier, la fonction $t \longmapsto p(\cos(t))$ définie sur $[0;\pi]$ appartient à F_n.

9) Trouver une suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de nombres réels strictement positifs telle que la suite $(\alpha_n c_n)_{n\in\mathbf{N}}$ soit orthonormée. Déduire du théorème d'approximation de WEIERSTRASS que la suite orthonormée $(\alpha_n c_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est totale.

10) Soit f dans G, montrer que $\|f - P_{F_n}(f)\|_G$ tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini. Si de plus la suite $(P_{F_n}(f))_{n\in\mathbf{N}}$ converge uniformément sur $[0;\pi]$ vers une fonction g, montrer $g = f$.

Pour tout x dans $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$, on définit la fonction g_x sur $[0;\pi]$ par la formule :

$$g_x(t) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} - \max(x,t) & \text{si } 0 \leq t \leq \dfrac{\pi}{2} \\ -g_x(\pi - t) & \text{si } \dfrac{\pi}{2} \leq t \leq \pi \end{cases}$$

11) Soit n entier. Déterminer les coordonnées de $P_{F_n}(g_x)$ sur la base $(c_0, c_1, \ldots, c_n)$ de F_n. En déduire pour tout t dans $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$:

$$\frac{\pi}{2} - \max(x,t) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos((2n+1)x)}{(2n+1)^2}\cos((2n+1)t)\ .$$

12) Montrer que pour tous f dans E et x dans $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$:

$$V^* \circ V(f)(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2} - \max(x,t)\right) f(t)\,\mathrm{d}t$$

et en déduire la suite des coefficients $(a_n(f))_{n\in\mathbf{N}}$ pour laquelle on a

$$V^* \circ V(f)(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(f)\cos((2n+1)x)\ .$$

PARTIE IV - Équations différentielles du type Sturm-Liouville

Soit h dans E, λ réel et l'équation différentielle :

$$(S)\quad \begin{cases} y'' + \lambda y + h = 0 \\ y(\frac{\pi}{2}) = y'(0) = 0 \end{cases}$$

On définit, pour tout entier n, φ_n dans E par la formule : $\varphi_n(t) = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\cos((2n+1)t)$.

13) Montrer pour tous f dans E et n entier, $\langle V^* \circ V(f)\,|\,\varphi_n\rangle = \dfrac{1}{(2n+1)^2}\langle f\,|\,\varphi_n\rangle$.

14) Montrer que g est solution de l'équation différentielle (S) si et seulement si $g = \lambda V^* \circ V(g) + V^* \circ V(h)$ et que dans ce cas, on a les formules suivantes pour tout entier n :

$$\left(1 - \frac{\lambda}{(2n+1)^2}\right)\langle g\,|\,\varphi_n\rangle = \frac{1}{(2n+1)^2}\langle h\,|\,\varphi_n\rangle$$

et

$$g = \sum_{n=0}^{+\infty}\langle g\,|\,\varphi_n\rangle\,\varphi_n\ .$$

15) On suppose dans cette question que λ n'est *pas* égale au carré d'un entier impair. Montrer que la série

$$\sum \frac{1}{(2n+1)^2 - \lambda}\langle h\,|\,\varphi_n\rangle\,\varphi_n$$

est normalement convergente. Exhiber alors une solution de (S).

On suppose maintenant qu'il existe p entier tel que $\lambda = (2p+1)^2$.

16) Montrer que si $\langle h\,|\,\varphi_p\rangle = 0$ alors (S) a une infinité de solutions, puis exhiber l'une d'entre elles. Que peut-on dire si $\langle h\,|\,\varphi_p\rangle \neq 0$?

Première composition – Mines-Ponts 2015 – MP

PARTIE I - Opérateur de Volterra

1) D'après le théorème fondamental du calcul différentiel et intégral, pour f dans E, $V(f)$ et $-V^*(f)$ sont des primitives de f, la première s'annulant en 0 et la seconde s'annulant en $\pi/2$. Pour f et g dans E, on a donc $(V(f)V^*(g))' = fV^*(g) - V(f)g$ et, par intégration sur $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$ et annulation en 0 et $\pi/2$ de $V(f)V^*(g)$, il vient $\boxed{\langle V(f)\,|\,g\rangle = \langle f\,|\,V^*(g)\rangle.}$

2) Pour f et g dans E, on a d'après ce qui précède

$$\langle V^*\circ V(f)\,|\,g\rangle = \langle V(f)\,|\,V(g)\rangle = \langle f\,|\,V^*\circ V(g)\rangle$$

et donc $\langle V^*\circ V(f)\,|\,f\rangle = \|V(f)\|^2$. De plus $V(f)=0$ entraîne $f = V(f)'=0$ et donc si f est non nul, $\langle V^*\circ V(f)\,|\,f\rangle > 0$, ce qui montre que $\boxed{V^*\circ V \text{ est symétrique défini positif.}}$

Il résulte alors du théorème spectral que $V^*\circ V$ est orthodiagonalisable et, si (λ, f) est un couple propre pour cet endomorphisme, on a $\lambda\,\|f\|^2 = \langle V^*\circ V(f)\,|\,f\rangle = \|V(f)\|^2$ et donc $\lambda > 0$ puisque f est non nul et qu'on vient de voir qu'alors $V(f)$ n'est pas nul. Il en résulte que

$\boxed{\text{les valeurs propres de } V^*\circ V \text{ sont strictement positives.}}$

3) Puisque $V^*\circ V(f_\lambda)$ est la primitive s'annulant en $\pi/2$ de la primitive s'annulant en 0 de λf_λ, qui est continue, elle est de classe C^2 et donc, puisque λ est non nul, f_λ l'est aussi et il vient, en dérivant deux fois :

$$f_\lambda\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{\lambda}V^*\circ V(f_\lambda) = 0 \quad \text{et} \quad f_\lambda' = -\frac{1}{\lambda}V(f_\lambda)$$

puis

$$f_\lambda'(0) = -\frac{1}{\lambda}V(f_\lambda)(0) = 0 \quad \text{et} \quad f_\lambda'' = -\frac{1}{\lambda}f_\lambda$$

i.e. $\boxed{f_\lambda \text{ est de classe } C^2 \text{ et vérifie } y'' + \dfrac{1}{\lambda}y = 0 \text{ et } y(\tfrac{\pi}{2}) = y'(0) = 0.}$

4) On en déduit, par intégration de l'équation différentielle, que f_λ est combinaison linéaire de $x\mapsto \cos(x/\sqrt{\lambda})$ et de $x\mapsto\sin(x/\sqrt{\lambda})$. En raison de la condition $f_\lambda'(0)=0$, f_λ est en fait un multiple de $x\mapsto\cos(x/\sqrt{\lambda})$ et la condition sur $f_\lambda(\pi/2)$ s'écrit $\frac{\pi}{2\sqrt{\lambda}} \in \frac{\pi}{2} + \pi\mathbf{Z}$ et comme le membre de droite est positif on en déduit que nécessairement $\dfrac{1}{\sqrt{\lambda}} \in 1+2\mathbf{N}$. Réciproquement la fonction précédente convient, i.e.

$\boxed{\lambda \in \mathrm{Sp}(V^*\circ V) \text{ si et seulement s'il existe } n \text{ dans } \mathbf{N} \text{ tel que } \lambda = \dfrac{1}{(2n+1)^2} \text{ et alors les vecteurs propres associés sont de la forme } x\mapsto \alpha\cos((2n+1)x), \text{ avec } \alpha\in\mathbf{R}^*.}$

PARTIE II - Théorème d'approximation de Weierstrass

5) $\boxed{S_n \text{ suit une loi binomiale de paramètres } (n,x).}$

Puisque S_n est bornée, elle admet des moments de tous ordres. Et on a, par indépendance et par linéarité de l'espérance

$$\mathbf{E}(S_n) = \sum_{k=1}^{n}\mathbf{E}(X_k) \quad \text{et} \quad \mathrm{V}(S_n) = \sum_{k=1}^{n}\mathrm{V}(X_k)\,,$$

i.e. $\boxed{\mathbf{E}(S_n) = nx \text{ et } \mathrm{V}(S_n) = nx(1-x).}$

6) Puisque S_n admet un moment d'ordre 2, par inégalité de Bienaymé-Tchebychev, il vient, pour α strictement positif,

$$\mathbf{P}\left(|S_n - nx| \geq n\alpha\right) \leq \frac{V(S_n)}{(n\alpha)^2} = \frac{nx(1-x)}{n^2\alpha^2}\ .$$

Or, par inégalité arithmético-géométrique, puisque x et $1-x$ sont positifs, on a $x(1-x) = \sqrt{x(1-x)}^2 \leq \left(\dfrac{x+(1-x)}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{4}$ avec égalité si et seulement si $x = 1-x = \dfrac{1}{2}$. De plus

$$(|S_n - nx| \geq n\alpha) = \sum_{\substack{0\leq k\leq n \\ \left|\frac{k}{n}-x\right|\geq\alpha}} (S_n = k)$$

et donc, par additivité des probabilités, $\boxed{\displaystyle\sum_{\substack{0\leq k\leq n \\ \left|\frac{k}{n}-x\right|\geq\alpha}} \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} \leq \frac{1}{4n\alpha^2}.}$

7) D'après la formule de transfert, pour g continue de $[0;1]$ dans $\mathbf{R}$, on a

$$\mathbf{E}\left(g(Z_n)\right) = \mathbf{E}\left(g\left(\frac{S_n}{n}\right)\right) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} g\left(\frac{k}{n}\right)$$

et donc, en appliquant cette formule à $g = f - f(x)$ et en utilisant la linéarité de l'espérance, il vient

$$B_n(g)(x) = B_n(f)(x) - f(x)\mathbf{E}\left(1\right) = B_n(f)(x) - f(x)$$

puis $\boxed{\displaystyle B_n(f)(x) - f(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k}\left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right).}$

Soit ε strictement positif. Puisque f est continue sur le segment $[0;1]$, il résulte de la compacité de ce segment et du théorème de Heine, que f y est uniformément continue. Soit alors α tel que

$$\forall (t,u) \in [0;1]^2 \qquad |t-u| \leq \alpha \Longrightarrow |f(t) - f(u)| \leq \varepsilon\ .$$

Puisque $[0;1]$ est compact et f y est continue, il résulte du théorème de Weierstrass qu'il est y est bornée. En notant $\|\cdot\|_\infty$ la norme de la convergence uniforme sur $[0;1]$, on a donc, pour $0 \leq k \leq n$, $\left|f\left(\dfrac{k}{n}\right) - f(x)\right| \leq 2\|f\|_\infty$ par inégalité triangulaire. En séparant la somme précédente selon les valeurs de k vérifiant ou non $\left|\dfrac{k}{n} - x\right| < \alpha$, il vient, encore par inégalité triangulaire,

$$|B_n(f)(x) - f(x)| \leq \varepsilon\mathbf{P}\left(|S_n - nx| < n\alpha\right) + 2\|f\|_\infty \frac{1}{4n\alpha^2}$$

et donc, puisqu'une probabilité est inférieure à 1 et pour n supérieur à $\dfrac{\|f\|_\infty}{2\alpha^2}$, on a $|B_n(f)(x) - f(x)| \leq 2\varepsilon$. Comme cette majoration est indépendante de x, on en déduit que, pour le même n (dépendant de α, donc de ε, mais pas de x), on a $\|B_n(f) - f\|_\infty \leq 2\varepsilon$. Donc

$\boxed{(B_n(f))_{n\in\mathbf{N}} \text{ converge uniformément vers } f \text{ sur } [0;1].}$

PARTIE III - Développement de $V^* \circ V(f)$ en série trigonométrique

8) Soit p un polynôme de degré n entier. La fonction $t \longmapsto p(\cos(t))$, définie sur $[0;\pi]$, appartient donc $\mathrm{V}ect\,(1,\cos,\ldots,\cos^n)$. Or il résulte de la formule d'Euler et de celle du binôme de Newton que, pour k dans $[\![1;n]\!]$, on a

$$\cos^k = \frac{1}{2^{k-1}} \sum_{0\leq j<\frac{k}{2}} \binom{k}{j} c_{n-2j} + \frac{\delta_{k\in 2\mathbf{Z}}}{2^k}\binom{k}{k/2} c_0$$

où, $\delta_{k\in 2\mathbf{Z}}$ vaut 1 ou 0 selon que k est pair ou non. En particulier $c_k \in F_n$ et donc $\boxed{p\circ\cos \text{ appartient à } F_n.}$

9) Pour n et m dans $\mathbf{N}$, on a $2c_nc_m = c_{n+m} + c_{|n-m|}$, d'après les formules d'addition du cosinus (et en utilisant la parité du cosinus) et donc, par intégration sur $[0;\pi]$ et par linéarité de l'intégrale, $2\,\langle c_n \mid c_m\rangle = \pi(\delta_{n+m}+\delta_{n-m})$, où δ_i vaut 1 ou 0 selon que i est nul ou pas. On en déduit que la famille $(c_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est orthogonale, puis qu'on a $\|c_0\|^2 = \pi$ et $\|c_n\|^2 = \dfrac{\pi}{2}$ si $n > 0$. Par conséquent, en posant $\boxed{\alpha_0 = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}} \text{ et } \alpha_n = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}} \text{ pour } n\in\mathbf{N}^*,\ (\alpha_nc_n)_{n\in\mathbf{N}} \text{ est orthonormée.}}$

Soit f dans G. Alors $f\circ\arccos$ est une fonction continue sur $[-1;1]$ par composition de fonctions continues et on dispose donc, grâce au théorème d'approximation de Weierstrass, d'une suite p_n de fonctions polynomiales telle que $\lim\limits_n \sup\limits_{[-1;1]} |f\circ\arccos - p_n| = 0$ ou encore, puisque cos est à valeurs dans $[-1;1]$, $\lim\limits_n \sup\limits_{[0;\pi]} |f\circ\arccos\circ\cos - p_n\circ\cos| = 0$. Il résulte alors de l'inégalité de la moyenne qu'on a $\|f - p_n\circ\cos\|_G = o\,(1)$, et donc $d(f,F_n) = o\,(1)$, d'après la question précédente. Autrement dit l'adhérence de $\mathrm{V}ect\,(\alpha_nc_n)_{n\in\mathbf{N}}$ contient f, i.e. $\boxed{(\alpha_nc_n)_{n\in\mathbf{N}} \text{ est totale.}}$

10) D'après le théorème de Pythagore $\|f - P_{F_n}(f)\|_G = d(f,F_n)$ et donc, d'après ce qui précède, $\boxed{\lim \|f - P_{F_n}(f)\|_G = 0.}$

Si la suite $(P_{F_n}(f))_{n\in\mathbf{N}}$ converge uniformément sur $[0;\pi]$ vers une fonction g, alors cette fonction est continue, en tant que limite uniforme de fonctions continues et, par inégalité triangulaire et d'après l'inégalité de la moyenne, on a

$$0 \leq \|f-g\|_G \leq \|f - P_{F_n}(f)\|_G + \|P_{F_n}(f) - g\|_G \leq \|f - P_{F_n}(f)\|_G + \sqrt{\pi}\,\|P_{F_n}(f) - g\|_\infty = o\,(1)$$

où la norme de la convergence uniforme est prise sur $[0;\pi]$, puisque le majorant est somme de deux termes tendant vers 0. Par encadrement des limites, $\|f-g\| = 0$ et donc $\boxed{g = f.}$