

Norme d'une matrice aléatoire

L'objectif de ce problème est d'étudier une inégalité de concentration pour la norme opérationnelle d'une matrice aléatoire dont les coefficients sont mutuellement indépendants et « uniformément sous-gaussiennes ». Soit n un entier strictement positif. On identifie \mathbf{R}^n à l'espace $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ des vecteurs colonnes à n coordonnées

réelles. Pour tout $x = {}^t(x_1, \dots, x_n)$ dans \mathbf{R}^n , on note : $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$.

La sphère unité de \mathbf{R}^n est notée $S^{n-1} = \{x \in \mathbf{R}^n \mid \|x\| = 1\}$. On identifie une matrice carrée $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ à l'endomorphisme de \mathbf{R}^n canoniquement associé et on note $\sigma(M)$ l'ensemble de ses valeurs propres réelles.

Les parties **A**, **B** et **C** sont mutuellement indépendantes.

PARTIE A - Norme d'opérateur d'une matrice

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

- 1) Montrer que S^{n-1} est un compact de \mathbf{R}^n et en déduire l'existence de

$$\|M\|_{op} = \max \{ \|Mx\| \mid x \in S^{n-1} \} .$$

- 2) Montrer que l'application qui à $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ associe $\|M\|_{op}$ est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Montrer en outre que pour tous x et y dans \mathbf{R}^n , on a l'inégalité : $\|Mx - My\| \leq \|M\|_{op} \|x - y\|$.
- 3) Si M est symétrique, établir l'égalité $\|M\|_{op} = \max \{ |\lambda| \mid \lambda \in \sigma(M) \}$. On pourra commencer par le cas où M est diagonale.

On note J_n la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1.

- 4) Déterminer les valeurs propres et les espaces propres de J_n en précisant la dimension des espaces propres. En déduire la valeur de $\|J_n\|_{op}$.

Soit $M = (M_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

- 5) Démontrer l'inégalité $\|M\|_{op} \geq \max \{ |M_{i,j}| \mid 1 \leq i, j \leq n \}$.

- 6) Établir $\|M\|_{op} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n M_{i,j}^2}$ et donner une condition nécessaire et suffisante sur le rang de M pour que cette inégalité soit une égalité.

On note Σ_n l'ensemble des matrices $M = (M_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ telles que $|M_{i,j}| \leq 1$ pour tous $i, j \in \llbracket 1; n \rrbracket$.

- 7) Montrer que pour tout $M \in \Sigma_n$, $\|M\|_{op} \leq n$. Caractériser et dénombrer les matrices M de Σ_n pour lesquelles $\|M\|_{op} = n$.

PARTIE B - Variables aléatoires sous-gaussiennes

Dans toute la suite du problème, toutes les variables aléatoires considérées sont réelles et discrètes, définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$. Soit $\alpha > 0$. On dit qu'une variable aléatoire X est α -sous-gaussienne si :

$$\forall t \in \mathbf{R}, \quad \mathbf{E}(\exp(tX)) \leq \exp\left(\frac{\alpha^2 t^2}{2}\right) .$$

On rappelle la notation $\text{ch}(t) = \frac{\exp(t) + \exp(-t)}{2}$.

- 8) Montrer que pour tout $t \in \mathbf{R}$, on a $\text{ch}(t) \leq \exp\left(\frac{t^2}{2}\right)$.

- 9) Soit $t \in \mathbf{R}$. Démontrer que si $x \in [-1; 1]$, on a $\exp(tx) \leq \frac{1+x}{2} \exp(t) + \frac{1-x}{2} \exp(-t)$.
- 10) Soit X une variable aléatoire réelle bornée par 1 et centrée. Montrer que X est 1-sous-gaussienne. En déduire que si X est bornée par $\alpha > 0$ et centrée, alors elle est α -sous-gaussienne.
- 11) Soit X_1, \dots, X_n des variables aléatoires mutuellement indépendantes et α -sous-gaussiennes, et $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ des nombres réels tels que $\sum_{i=1}^n \mu_i^2 = 1$. Montrer que la variable aléatoire $\sum_{i=1}^n \mu_i X_i$ est aussi α -sous-gaussienne.
- 12) Soit X une variable aléatoire α -sous-gaussienne et $\lambda > 0$. Montrer que pour tout $t > 0$:

$$\mathbf{P}(X \geq \lambda) \leq \exp\left(\frac{\alpha^2 t^2}{2} - t\lambda\right).$$

En déduire $\mathbf{P}(|X| \geq \lambda) \leq 2 \exp\left(-\frac{\lambda^2}{2\alpha^2}\right)$.

Dans la suite du problème, on admet qu'une variable aléatoire X à valeurs dans \mathbf{N} est d'espérance finie si et seulement si la série $\sum \mathbf{P}(X \geq k)$ converge et que dans ce cas :

$$\mathbf{E}(X) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{P}(X \geq k).$$

- 13) Si X est une variable aléatoire à valeurs dans \mathbf{R}_+ , montrer que X est d'espérance finie si et seulement si la série de terme général $\mathbf{P}(X \geq k)$ converge et que dans ce cas :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{P}(X \geq k) \leq \mathbf{E}(X) \leq 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{P}(X \geq k).$$

Pour tout $s \in]1; +\infty[$, on note $\zeta(s) = \sum_{k=1}^{+\infty} k^{-s}$.

- 14) Soit X une variable aléatoire α -sous-gaussienne et $\beta > 0$. Montrer que pour tout entier $k > 0$:

$$\mathbf{P}\left(\exp\left(\frac{\beta^2 X^2}{2}\right) \geq k\right) \leq 2k^{-\eta}$$

où on a posé $\eta = \alpha^{-2}\beta^{-2}$. En déduire que si $\alpha\beta < 1$, la variable aléatoire $\exp\left(\frac{\beta^2 X^2}{2}\right)$ est d'espérance finie majorée par $1 + 2\zeta(\eta)$.

En particulier, en prenant $\alpha\beta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et en utilisant l'inégalité $1 + 2\zeta(2) \leq 5$ (que l'on ne demande pas de justifier), on obtient immédiatement, et on l'admet, que si X est une variable aléatoire α -sous-gaussienne, on a l'inégalité d'ORLICZ :

$$\mathbf{E}\left(\exp\left(\frac{X^2}{4\alpha^2}\right)\right) \leq 5.$$

PARTIE C - Recouvrements de la sphère

Si $a \in \mathbf{R}^n$, on note $B_{a,r} = \{x \in \mathbf{R}^n \mid \|x - a\| \leq r\}$ la boule fermée de centre a et de rayon r . Soit K une partie compacte non vide de \mathbf{R}^n , et soit $\varepsilon > 0$.

- 15) Montrer que l'on peut trouver un sous-ensemble fini A de K tel que : $K \subset \bigcup_{a \in A} B_{a, \frac{\varepsilon}{2}}$.

- 16) Soit Λ un sous-ensemble de K tel que pour tous x, y distincts dans Λ , $\|x - y\| > \varepsilon$. Montrer que Λ est fini et que son cardinal est majoré par celui d'un ensemble A du type considéré à la question précédente. Si de plus Λ est de cardinal maximal, montrer

$$K \subset \bigcup_{a \in \Lambda} B_{a, \varepsilon}.$$

On admet l'existence d'une fonction μ , appelée volume, définie sur l'ensemble des parties compactes de \mathbf{R}^n et vérifiant les propriétés suivantes :

- (i) Pour tout vecteur a de \mathbf{R}^n et tout nombre réel $r > 0$, $\mu(B_{a,r}) = r^n$.
(ii) Pour toute famille K_1, \dots, K_m de compacts de \mathbf{R}^n deux à deux disjoints on a :

$$\mu \left(\bigcup_{1 \leq i \leq m} K_i \right) = \sum_{i=1}^m \mu(K_i).$$

- (iii) Pour tous compacts K, K' de \mathbf{R}^n , $K \subset K'$ implique $\mu(K) \leq \mu(K')$.

Soit Λ une partie finie de S^{n-1} telle que pour tous x, y distincts dans Λ , $\|x - y\| > \varepsilon$.

- 17) Vérifier que les boules $B_{a, \frac{\varepsilon}{2}}$ pour $a \in \Lambda$ sont toutes contenues dans $B_{0, 1 + \frac{\varepsilon}{2}}$. Montrer alors que le cardinal de Λ est majoré par $\left(\frac{2 + \varepsilon}{\varepsilon}\right)^n$.
- 18) Justifier l'existence d'une partie finie Λ_n de S^{n-1} , de cardinal majoré par 5^n , et telle que :

$$S^{n-1} \subset \bigcup_{a \in \Lambda_n} B_{a, \frac{1}{2}}.$$

PARTIE D - Norme d'une matrice aléatoire

On fixe un nombre réel $\alpha > 0$ et on pose $\gamma = \frac{1}{4\alpha^2}$.

Soit n un entier strictement positif. On définit une famille de variables aléatoires réelles $M_{i,j}^{(n)}$ indexées par $i, j \in \llbracket 1; n \rrbracket$, mutuellement indépendantes et α -sous-gaussiennes. On note $M^{(n)}$ la matrice aléatoire $(M_{i,j}^{(n)})_{1 \leq i, j \leq n}$.

Si $x \in S^{n-1}$, on note $y = M^{(n)}x$ qui est ainsi un vecteur aléatoire dont les composantes y_1, \dots, y_n sont des variables aléatoires réelles.

- 19) Montrer que pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, la variable aléatoire y_i est α -sous-gaussienne.

En déduire $\mathbf{E} \left(\exp \left(\gamma \|y\|^2 \right) \right) \leq 5^n$ et pour tout réel $r > 0$:

$$\mathbf{P} \left(\|y\| \geq r\sqrt{n} \right) \leq \left(5e^{-\gamma r^2} \right)^n.$$

- 20) Soit Λ_n une partie de S^{n-1} vérifiant les conditions de la question 18. Pour tout réel $r > 0$, montrer que $\|M^{(n)}\|_{op} \geq 2r\sqrt{n}$ implique l'existence d'un $a \in \Lambda_n$ tel que $\|M^{(n)}a\| \geq r\sqrt{n}$. En déduire $\mathbf{P} \left(\|M^{(n)}\|_{op} \geq 2r\sqrt{n} \right) \leq \left(25e^{-\gamma r^2} \right)^n$.

DEUXIÈME COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES – MINES-PONTS 2015 – MP

Norme d'une matrice aléatoire

PARTIE A - Norme d'opérateur d'une matrice

- 1) L'application norme étant 1-lipschitzienne, elle est continue et donc S^{n-1} est fermé en tant qu'image réciproque du fermé $\{1\}$ par une application continue. Par construction S^{n-1} est borné par 1 et donc, d'après le théorème de HEINE-BOREL, S^{n-1} est compact pour la norme $\|\cdot\|$ et donc pour toute norme, puisque \mathbf{R}^n est de dimension finie.

Pour cette même raison toute application linéaire sur \mathbf{R}^n est continue et donc $x \mapsto Mx$ est continue. Par compacité de S^{n-1} et grâce au théorème de WEIERSTRASS, on en déduit que $\{\|Mx\| \mid x \in S^{n-1}\}$ est une partie compacte de \mathbf{R} . Comme elle est non vide, puisque S^{n-1} ne l'est pas, elle admet un maximum, i.e. S^{n-1} est compact et $\|M\|_{op}$ existe.

- 2) En tant que maximum d'une partie incluse dans \mathbf{R}_+ , $\|\cdot\|_{op}$ est à valeurs dans \mathbf{R}_+ et n'est nulle que pour les M dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ vérifiant $\{\|Mx\| \mid x \in S^{n-1}\} = \{0\}$. Or pour tout y dans \mathbf{R}^n on dispose de x dans S^{n-1} tel que $y = \|y\|x$ et donc $Mx = 0 \implies My = \|y\|Mx = 0$ par linéarité. On en déduit $\forall x \in S^{n-1} Mx = 0 \implies M = 0$, i.e. $\|M\|_{op} = 0 \implies M = 0$.

Par homogénéité de la norme sur \mathbf{R}^n , pour M dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ et α dans \mathbf{R} , on a

$$\{\|\alpha Mx\| \mid x \in S^{n-1}\} = \{|\alpha| \|Mx\| \mid x \in S^{n-1}\}$$

et, par croissance de la multiplication par $|\alpha|$,

$$\|\alpha M\|_{op} = |\alpha| \max \{\|Mx\| \mid x \in S^{n-1}\} = |\alpha| \|M\|_{op} .$$

Enfin, par inégalité triangulaire, pour M et N dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ et x dans S^{n-1} ,

$$\|(M+N)x\| = \|Mx + Nx\| \leq \|Mx\| + \|Nx\| \leq \|M\|_{op} + \|N\|_{op} .$$

Il en résulte $\|M+N\|_{op} \leq \|M\|_{op} + \|N\|_{op}$. Par conséquent $\|\cdot\|_{op}$ est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

Soit x et y dans \mathbf{R}^n , on dispose de u dans S^{n-1} tel que $x - y = \|x - y\|u$ et il vient par linéarité et homogénéité,

$$\|Mx - My\| = \|M(x - y)\| = \|x - y\| \|Mu\| \leq \|M\|_{op} \|x - y\| .$$

- 3) Soit M une matrice symétrique dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ et x dans \mathbf{R}^n . D'après le théorème spectral on a $\mathbf{R}^n = \bigoplus_{\lambda \in \sigma(M)}^\perp \text{Ker}(M - \lambda \text{Id})$ et donc on peut écrire $x = \sum_{\lambda \in \sigma(M)} x_\lambda$ avec $(x_\lambda)_{\lambda \in \sigma(M)}$ une famille orthogonale

de vecteurs propres vérifiant $Mx_\lambda = \lambda x_\lambda$. Il vient donc, par orthogonalité,

$$\|Mx\|^2 = \left\| \sum_{\lambda \in \sigma(M)} \lambda x_\lambda \right\|^2 = \sum_{\lambda \in \sigma(M)} \lambda^2 \|x_\lambda\|^2$$

et donc, par positivité, en notant $m = \max \{|\lambda| \mid \lambda \in \sigma(M)\}$ (ce qui est licite par finitude de l'ensemble considéré),

$$\|Mx\|^2 \leq m^2 \sum_{\lambda \in \sigma(M)} \|x_\lambda\|^2 = m^2 \|x\|^2 ,$$

la dernière égalité résultant de l'orthogonalité de la famille $(x_\lambda)_{\lambda \in \sigma(M)}$. On en déduit $\|M\|_{op} \leq m$ par croissance de la racine carrée sur \mathbf{R}_+ et positivité des quantités étudiées. Soit enfin λ dans $\sigma(M)$ tel que $|\lambda| = m$ (ce qui est licite, toujours par finitude de l'ensemble considéré) et y dans $\text{Ker}(M - \lambda \text{Id})$, non nul. On dispose alors de x dans $\text{Ker}(M - \lambda \text{Id})$ unitaire tel que $y = \|y\|x$, puisque $\text{Ker}(M - \lambda \text{Id})$ est un espace vectoriel. Il vient $\|Mx\| = \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\| = m$ et on en déduit $\|M\|_{op} = \max \{|\lambda| \mid \lambda \in \sigma(M)\}$.

- 4) Soit φ la forme linéaire sur \mathbf{R}^n donnée par $(x_1, \dots, x_n) \mapsto \sum_{i=1}^n x_i$ et u le vecteur de \mathbf{R}^n donné par $u = {}^t(1, \dots, 1)$. Par définition de J_n , pour x dans \mathbf{R}^n , on a $Jx = \varphi(x)u$ et donc $\text{Ker}(J_n) = \text{Ker}(\varphi)$ et $\text{Im}(J_n) = \mathbf{R}u$. Il en résulte, puisque φ est non nul, que le noyau de J_n est de dimension $n - 1$. Par exemple en utilisant la trace, on en déduit que l'autre valeur propre de J_n est n et, par exemple en utilisant l'orthogonalité des espaces propres de J_n donnée par le théorème spectral, que l'espace propre associé à n est $\mathbf{R}u$, i.e. $\text{Im}(u)$. En résumé

$$\sigma(J_n) = \{0, n\} \text{ si } n \geq 2 \text{ et } \sigma(J_n) = \{n\} \text{ sinon, } \text{Ker}(J_n) \text{ est de dimension } n - 1 \text{ et admet pour équation } \sum_{i=1}^n x_i = 0 \text{ et } \text{Ker}(J_n - nI_n) \text{ est la droite engendrée par } {}^t(1, \dots, 1).$$

Comme J_n est symétrique réelle, il résulte de la question précédente qu'on a $\|J_n\|_{op} = n$.

- 5) Soit i et j dans $\llbracket 1; n \rrbracket$. On note (e_1, \dots, e_n) la base canonique de \mathbf{R}^n et $\langle \cdot | \cdot \rangle$ le produit scalaire canonique de sorte qu'il vient, par inégalité de CAUCHY-SCHWARZ,

$$|M_{i,j}| = |\langle e_i | Me_j \rangle| \leq \|Me_j\| \|e_i\| \leq \|M\|_{op}$$

puisque l'on a affaire à des vecteurs unitaires. Il en résulte $\|M\|_{op} \geq \max\{|M_{i,j}| \mid 1 \leq i, j \leq n\}$.

- 6) Soit x dans \mathbf{R}^n , unitaire, et $(m_i)_{1 \leq i \leq n}$ les vecteurs lignes de M , i.e. $m_i = {}^t(M_{i,1}, \dots, M_{i,n})$. Il vient alors en notant $\langle \cdot | \cdot \rangle$ le produit scalaire canonique, $\|Mx\|^2 = \sum_{i=1}^n \langle m_i | x \rangle^2$ et donc, grâce à l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ,

$$\|Mx\|^2 \leq \sum_{i=1}^n \|m_i\|^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n M_{i,j}^2$$

avec égalité si x est colinéaire aux vecteurs lignes de M . Par positivité des quantités étudiées, on obtient donc l'inégalité recherchée avec égalité si et seulement si les vecteurs lignes de M sont colinéaires à un même vecteur, i.e. appartiennent à une même droite vectorielle ou encore si et seulement si le rang de la transposée de M , ou celui de M car ils sont égaux, est inférieur à 1. Autrement dit

$$\|M\|_{op} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n M_{i,j}^2}, \text{ avec égalité si et seulement si } M \text{ est de rang inférieur ou égal à } 1.$$

- 7) Pour M dans Σ_n , l'inégalité précédente donne directement

$$\|M\|_{op} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n M_{i,j}^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n 1} = n$$

avec égalité si et seulement si M est de rang inférieur ou égal à 1 (pour la première inégalité) et tous ses coefficients sont de valeur absolue 1 (pour la seconde). Il y a donc égalité si et seulement si on dispose de $(\varepsilon_j)_{1 \leq j \leq n}$ dans $\{\pm 1\}^n$ tel que $(M_{1,j})_{1 \leq j \leq n} = (\varepsilon_j)_{1 \leq j \leq n}$ et si toutes les autres colonnes de M sont proportionnelles à cette colonne non nulle. Comme les coefficients de proportionnalité sont nécessairement de valeur absolue égale à 1, il y a égalité si et seulement si on dispose de $(\varepsilon_j)_{1 \leq j \leq n}$ et $(\varepsilon'_i)_{1 \leq i \leq n}$ dans $\{\pm 1\}^n$ avec $\varepsilon'_1 = 1$ et tels que, pour tous i et j dans $\llbracket 1; n \rrbracket$, $M_{i,j} = \varepsilon'_i \varepsilon_j$. En conclusion pour M dans Σ_n , on a

$\|M\|_{op} \leq n$ avec égalité pour les 2^{2n-1} matrices de la forme

$$M = \begin{pmatrix} \pm 1 \\ \vdots \\ \pm 1 \end{pmatrix} (\pm 1 \quad \dots \quad \pm 1)$$

(et où l'on peut fixer arbitrairement un des signes, par exemple le premier terme du vecteur ligne peut être fixé à 1).

PARTIE B - Variables aléatoires sous-gaussiennes

- 8) La fonction th est concave sur \mathbf{R}_+ , par exemple parce que sa dérivée (à savoir $1/\text{ch}^2$) est décroissante sur \mathbf{R}_+ et donc sous sa tangente en 0 : pour tout t dans \mathbf{R}_+ , on a $\text{th}(t) \leq t$. Par croissance de l'intégrale et parité de ch il vient, pour t dans \mathbf{R} ,

$$\ln(\text{ch}(t)) = \ln(\text{ch}(|t|)) = \int_0^{|t|} \frac{\text{ch}'(x)}{\text{ch}(x)} dx = \int_0^{|t|} \text{th}(x) dx \leq \int_0^{|t|} x dx = \frac{t^2}{2}$$

et donc, par croissance de l'exponentielle, pour tout $t \in \mathbf{R}$, $\text{ch}(t) \leq \exp\left(\frac{t^2}{2}\right)$.

Remarque : un autre argument, moins élégant, utilise le développement en série entière des fonctions considérées. On a, pour t réel

$$\text{ch}(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n}}{(2n)!}$$

et donc, puisqu'on a affaire à des quantités positives et que le produit des entiers de 1 à $2n$ est supérieur à celui des entiers pairs compris entre les mêmes bornes,

$$\text{ch}(t) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n}}{2^n n!} = e^{t^2/2}.$$

- 9) Soit t dans \mathbf{R} et x dans $[-1; 1]$. Alors $\frac{1+x}{2}$ et $\frac{1-x}{2}$ sont deux réels positifs de somme 1 et donc, par convexité de l'exponentielle sur \mathbf{R} et donc en particulier entre t et $-t$, il vient

$$\exp(tx) = \exp\left(\frac{1+x}{2}t + \frac{1-x}{2}(-t)\right) \leq \frac{1+x}{2} \exp(t) + \frac{1-x}{2} \exp(-t)$$

i.e. $\exp(tx) \leq \frac{1+x}{2} \exp(t) + \frac{1-x}{2} \exp(-t)$.

- 10) Soit X une variable aléatoire réelle bornée par 1 et centrée, et t un réel. La variable aléatoire $\exp(tX)$ est donc bornée et admet par conséquent une espérance. De plus, d'après ce qui précède, elle est majorée par $\text{ch}(t) + \text{sh}(t)X$ et donc, par croissance et linéarité de l'espérance, il vient $\mathbf{E}(\exp(tX)) \leq \text{ch}(t)$, puisque X est centrée. On en déduit grâce à la question 8, que X est 1-sous-gaussienne.

Soit maintenant X une variable aléatoire réelle bornée par α et centrée, avec $\alpha > 0$. Alors on peut appliquer le résultat précédent à $\frac{1}{\alpha}X$, qui est donc 1-sous-gaussienne. On en déduit pour t réel, $\mathbf{E}(\exp(tX)) = \mathbf{E}(\exp((\alpha t)X/\alpha)) \leq \exp((\alpha t)^2/2)$ et donc X est α -sous-gaussienne.

11) Soit t réel. On a

$$\exp\left(t \sum_{i=1}^n \mu_i X_i\right) = \prod_{i=1}^n \exp(t \mu_i X_i)$$

et donc, par indépendance mutuelle de X_1, \dots, X_n et grâce au lemme des coalitions, il vient

$$\mathbf{E} \left(\exp\left(t \sum_{i=1}^n \mu_i X_i\right) \right) = \prod_{i=1}^n \mathbf{E}(\exp(t \mu_i X_i))$$

et donc, par positivité des exponentielles et en utilisant le caractère α -sous-gaussien,

$$\mathbf{E} \left(\exp\left(t \sum_{i=1}^n \mu_i X_i\right) \right) \leq \prod_{i=1}^n \exp(\alpha^2 \mu_i^2 t^2 / 2) = \exp(\alpha^2 t^2 / 2)$$

puisque $\sum_{i=1}^n \mu_i^2 = 1$. Il en résulte que la variable aléatoire $\sum_{i=1}^n \mu_i X_i$ est α -sous-gaussienne.

12) La fonction exponentielle est croissante et strictement positive, définie sur \mathbf{R} . Il en va de même, pour t dans \mathbf{R}_+^* , de $x \mapsto \exp(tx)$ sur \mathbf{R} et il résulte donc de l'inégalité de MARKOV $\mathbf{P}(X \geq \lambda) \leq \frac{\mathbf{E}(\exp(tX))}{\exp(t\lambda)}$.

En utilisant le caractère α -sous-gaussien, il vient

$$\mathbf{P}(X \geq \lambda) \leq \exp\left(\frac{\alpha^2 t^2}{2} - t\lambda\right).$$

On obtient une majoration optimale en posant $t = \lambda/\alpha^2$, ce qui est licite puisque c'est un réel strictement positif tout comme λ . Il vient alors $\mathbf{P}(X \geq \lambda) \leq \exp\left(-\frac{\lambda^2}{2\alpha^2}\right)$. D'après la question précédente appliquée au cas $n = 1$ et $\mu_1 = -1$, $-X$ est également α -sous-gaussienne et donc ce qu'on vient de démontrer entraîne $\mathbf{P}(-X \geq \lambda) \leq \exp\left(-\frac{\lambda^2}{2\alpha^2}\right)$. Par additivité des probabilités, il en résulte

$$\mathbf{P}(|X| \geq \lambda) \leq 2 \exp\left(-\frac{\lambda^2}{2\alpha^2}\right).$$

Le résultat admis est classique, voir par exemple la feuille de TD. Une démonstration simple est donnée par le théorème de sommation par paquets dans le cas positif. En effet $\sum_{k=1}^{+\infty} k \mathbf{P}(X = k)$ et $\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{P}(X \geq k)$ sont deux façons de sommer la famille $(\mathbf{P}(X = k) \mathbf{1}_{\llbracket 1; k \rrbracket}(n))_{(n, k) \in \mathbf{N}^2}$.

13) Soit X une variable aléatoire à valeurs dans \mathbf{R}_+ . Alors $[X]$ est une variable aléatoire à valeurs dans \mathbf{N} et elle vérifie $[X] \leq X \leq [X] + 1$. Puisqu'on a affaire à des variables positives, on peut en prendre les espérances dans $\mathbf{R}_+ \cup \{+\infty\}$ et il vient par croissance de l'espérance $\mathbf{E}([X]) \leq \mathbf{E}(X) \leq 1 + \mathbf{E}([X])$. Il en résulte en particulier que $\mathbf{E}(X)$ et $\mathbf{E}([X])$ sont simultanément finis ou infinis. De plus on a pour tout k dans \mathbf{N} , $(X \geq k) = ([X] \geq k)$ et donc la formule admise donne

$$\mathbf{E}([X]) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{P}(X \geq k),$$

les deux membres étant simultanément finis ou infinis. Autrement dit

X admet une espérance (finie) si et seulement si $\sum \mathbf{P}(X \geq k)$ converge et dans ce cas :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{P}(X \geq k) \leq \mathbf{E}(X) \leq 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{P}(X \geq k) .$$

- 14) Pour k dans \mathbf{N}^* , par croissance stricte du logarithme, positivité de $\beta^2/2$ et croissance stricte de la racine carrée, il vient

$$\exp\left(\frac{\beta^2 X^2}{2}\right) \geq k \iff \frac{\beta^2 X^2}{2} \geq \ln(k) \iff X^2 \geq \frac{2 \ln(k)}{\beta^2} \iff |X| \geq \sqrt{\frac{2 \ln(k)}{\beta^2}}$$

et donc, en utilisant la question 12 si $k > 1$, ou en remarquant $1 \leq 2$ si $k = 1$,

$$\mathbf{P}\left(\exp\left(\frac{\beta^2 X^2}{2}\right) \geq k\right) \leq 2 \exp\left(-\frac{\ln(k)}{\alpha^2 \beta^2}\right)$$

i.e. $\mathbf{P}\left(\exp\left(\frac{\beta^2 X^2}{2}\right) \geq k\right) \leq 2k^{-\eta}.$

Si $\alpha\beta < 1$, alors $\eta > 1$ et donc la série $\sum k^{-\eta}$ est une série de RIEMANN convergente, de somme $\zeta(\eta)$ et donc, par comparaison entre séries à termes positifs, la série $\sum \mathbf{P}\left(\exp\left(\frac{\beta^2 X^2}{2}\right) \geq k\right)$ est convergente.

D'après ce qui précède on en déduit que

$$\exp\left(\frac{\beta^2 X^2}{2}\right) \text{ est d'espérance finie majorée par } 1 + 2\zeta(\eta).$$

L'inégalité admise n'est pas compliquée. Pour $k \geq 2$ on a $k^2 \geq 2^k$ et donc $\zeta(2) \leq 1 + \frac{1}{2} < 2$, d'où $1 + 2\zeta(2) \leq 5$.

PARTIE C - Recouvrements de la sphère

- 15) On raisonne par l'absurde en supposant que, pour tout sous-ensemble fini A de K , K n'est pas inclus dans $\bigcup_{a \in A} B_{a, \frac{\varepsilon}{2}}$. Soit alors a_1 un point de K . On construit alors une suite de points de K par récurrence de la façon suivante : si a_1, \dots, a_n sont construits, puisque $\{a_1, \dots, a_n\}$ est fini, $K \setminus \bigcup_{i=1}^n B_{a_i, \frac{\varepsilon}{2}}$ n'est pas vide et on choisit arbitrairement a_{n+1} dans cet ensemble. Par construction pour n et m entiers avec $n < m$, on a $a_m \notin \bigcup_{i=1}^{m-1} B_{a_i, \frac{\varepsilon}{2}}$ et en particulier $\|a_n - a_m\| \geq \frac{\varepsilon}{2}$. Une telle suite ne saurait avoir une valeur d'adhérence, ce qui contredit le théorème de BOLZANO-WEIERSTRASS puisque K est compact et (a_n) est à valeurs dans K . On en conclut que l'on peut trouver un sous-ensemble fini A de K tel que :

$$K \subset \bigcup_{a \in A} B_{a, \frac{\varepsilon}{2}}.$$

- 16) Soit A comme précédemment. À tout x de Λ on peut associer au moins un élément de A que l'on notera $a(x)$. Puisque $B_{a(x), \frac{\varepsilon}{2}}$ est de diamètre ε , pour tout y dans Λ distinct de x , on a $y \notin B_{a(x), \frac{\varepsilon}{2}}$ et donc $a(y) \neq a(x)$. De la sorte on a construit une application injective de Λ dans A et donc Λ est fini, de cardinal majoré par celui de A .

Si de plus Λ est de cardinal maximal, pour tout k dans K , $\Lambda \cup \{k\}$ ne vérifie pas l'hypothèse et donc $\exists a \in \Lambda \|k - a\| \leq \varepsilon$. Autrement dit $K \subset \bigcup_{a \in \Lambda} B_{a, \varepsilon}$.

- 17) Soit a dans Λ et x dans $B_{a, \frac{\varepsilon}{2}}$. Par inégalité triangulaire il vient $\|x\| \leq \|x - a\| + \|a\| \leq \frac{\varepsilon}{2} + 1$ et donc

$$B_{a, \frac{\varepsilon}{2}} \subset B_{0, 1 + \frac{\varepsilon}{2}}.$$

De plus si a appartient à Λ , $B_{a, \frac{\varepsilon}{2}}$ est fermé, en tant que boule fermée, et borné, par exemple inclus dans $B_{0, 1 + \frac{\varepsilon}{2}}$. Donc d'après le théorème de HEINE-BOREL, c'est un compact puisque \mathbf{R}^n est de dimension finie. De plus la famille finie de compacts $(B_{a, \frac{\varepsilon}{2}})_{a \in \Lambda}$ est formée d'ensembles deux à deux disjoints puisque, pour x dans \mathbf{R}^n et a et b dans Λ , on a, par inégalité triangulaire,

$$x \in B_{a, \frac{\varepsilon}{2}} \cap B_{b, \frac{\varepsilon}{2}} \implies \|a - b\| \leq \|a - x\| + \|x - b\| \leq \varepsilon \implies a = b.$$

On en déduit, en utilisant successivement les propriétés (i), (ii), (iii) et (i) de μ ,

$$\text{Card}(\Lambda) \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^n = \sum_{a \in \Lambda} \mu(B_{a, \frac{\varepsilon}{2}}) = \mu\left(\bigcup_{a \in \Lambda} B_{a, \frac{\varepsilon}{2}}\right) \leq \mu(B_{0, 1 + \frac{\varepsilon}{2}}) = \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right)^n$$

et donc $\boxed{\text{Card}(\Lambda) \leq \left(\frac{2 + \varepsilon}{\varepsilon}\right)^n}$.

- 18) Soit $K = S^{n-1}$. C'est un compact, d'après la question 1, non vide puisque $n > 0$. On considère alors la partie de \mathbf{N} donnée par $\{\text{Card}(\Lambda) \mid \Lambda \subset K \text{ et } \forall (x, y) \in K^2, \|x - y\| \leq \frac{1}{2} \implies x = y\}$. Cet ensemble est non vide puisqu'il contient 0, pour $\Lambda = \emptyset$. D'après la question 16, c'est un ensemble majoré et on peut donc en considérer le maximum, noté m . On dispose alors de Λ_n inclus dans K vérifiant $\forall (x, y) \in K^2, \|x - y\| \leq \frac{1}{2} \implies x = y$ et de cardinal m . Alors, d'après les questions 17 et 15 avec $\varepsilon = \frac{1}{2}$, on a

$$\boxed{\text{Card}(\Lambda_n) \leq 5^n \text{ et } S^{n-1} \subset \bigcup_{a \in \Lambda_n} B_{a, \frac{1}{2}}.}$$

PARTIE D - Norme d'une matrice aléatoire

- 19) Soit i dans $\llbracket 1; n \rrbracket$. On a $y_i = \sum_{j=1}^n M_{i,j}^{(n)} x_j$ et donc, par indépendance mutuelle de $(M_{i,j}^{(n)})_{1 \leq i, j \leq n}$, on déduit d'une part grâce au lemme des coalitions que les variables (y_1, \dots, y_n) sont mutuellement indépendantes et d'autre part, grâce à la question 11 et au fait que x est unitaire, que y_i est α -sous-gaussienne. Par indépendance et en utilisant l'inégalité d'ORLICZ, il vient par positivité

$$\mathbf{E}\left(\exp\left(\gamma \|y\|^2\right)\right) = \mathbf{E}\left(\exp\left(\gamma \sum_{i=1}^n y_i^2\right)\right) = \prod_{i=1}^n \mathbf{E}\left(\exp(\gamma y_i^2)\right) \leq 5^n$$

et donc, puisque $\|y\|$ est une variable aléatoire, que $t \mapsto \exp(\gamma t^2)$ est une fonction croissante à valeurs strictement positives et grâce à l'inégalité de MARKOV, pour $r > 0$,

$$\mathbf{P}\left(\|y\| \geq r\sqrt{n}\right) \leq \frac{\mathbf{E}\left(\exp\left(\gamma \|y\|^2\right)\right)}{\exp(n\gamma r^2)} = \frac{5^n}{\exp(n\gamma r^2)}$$

et donc

$$\boxed{\mathbf{E}\left(\exp\left(\gamma \|y\|^2\right)\right) \leq 5^n \text{ et } \mathbf{P}\left(\|y\| \geq r\sqrt{n}\right) \leq \left(5e^{-\gamma r^2}\right)^n.}$$

- 20) Soit M dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. D'après la question 1 on dispose de x dans S^{n-1} tel que $\|Mx\| = \|M\|_{op}$. Par hypothèse sur Λ_n on dispose de a dans Λ_n tel que $x \in B_{a, \frac{1}{2}}$ et donc, grâce à la question 2, $\|Mx - Ma\| \leq \frac{1}{2} \|M\|_{op}$. Il en résulte par inégalité triangulaire $\|Ma\| \geq \|Mx\| - \|Mx - Ma\| \geq \frac{1}{2} \|M\|_{op}$. Par conséquent, pour tout r dans \mathbf{R}_+^* , si on a $\|M^{(n)}\|_{op} \geq 2r\sqrt{n}$, on dispose de a dans Λ_n tel que $\boxed{\|M^{(n)}a\| \geq r\sqrt{n}}$.

Pour r dans \mathbf{R}_+^* , on a donc

$$\left(\|M^{(n)}\|_{op} \geq 2r\sqrt{n} \right) \subset \bigcup_{a \in \Lambda_n} \left(\|M^{(n)}a\| \geq r\sqrt{n} \right)$$

et ainsi, par sous-additivité de la probabilité et en utilisant l'inégalité précédente ainsi que l'hypothèse sur Λ_n

$$\mathbf{P} \left(\|M^{(n)}\|_{op} \geq 2r\sqrt{n} \right) \leq \sum_{a \in \Lambda_n} \mathbf{P} \left(\|M^{(n)}a\| \geq r\sqrt{n} \right) \leq 5^n \left(5e^{-\gamma r^2} \right)^n$$

i.e. $\boxed{\mathbf{P} \left(\|M^{(n)}\|_{op} \geq 2r\sqrt{n} \right) \leq \left(25e^{-\gamma r^2} \right)^n .}$