Mines-Ponts MP 2017 – Première épreuve

Étude d'un endomorphisme d'un espace de fonctions numériques

Soit I un intervalle de la forme $[-a;a]$ où a est un réel strictement positif. Dans tout le problème, on considère les ensembles suivants :

- $\mathcal{E}$ le $\mathbf{C}$-espace vectoriel constitué des applications de I dans $\mathbf{C}$ de classe C^∞ ;
- $\mathcal{D}$ la partie de $\mathcal{E}$ constituée de ses éléments développables en série entière sur un voisinage de 0 ;
- $\mathcal{P}$ la partie de $\mathcal{E}$ constituée de ses éléments polynomiaux.

Pour tout n dans $\mathbf{N}$, on note

$$W_n = \int_0^{\pi/2} (\sin(t))^n \,\mathrm{d}t$$

et si f appartient à $\mathcal{E}$, on note $u(f)$ et $v(f)$ les applications de I dans $\mathbf{C}$ définies par les formules

$$\forall x \in I\,, \quad u(f)(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} f(x\sin(t))\,\mathrm{d}t$$

$$\forall x \in I\,, \quad v(f)(x) = f(0) + x\int_0^{\pi/2} f'(x\sin(t))\,\mathrm{d}t$$

Les candidat·e·s devront justifier leurs affirmations.

PARTIE A - Préliminaires

1. Justifier que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{D}$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{E}$.
2. a) Soit f dans $\mathcal{E}$. Montrer que $u(f)$ et $v(f)$ sont bien définis et que $u(f)$ et $v(f)$ sont lipschitziennes.
   b) En utilisant l'inégalité de Taylor-Lagrange, montrer que, pour x dans I, $u(f)$ et $v(f)$ admettent des développements limités à l'ordre 1 en x, et les préciser.
   c) En déduire que $u(f)$ et $v(f)$ appartiennent à $\mathcal{E}$.
   d) Montrer que l'on définit ainsi des endomorphismes u et v de $\mathcal{E}$.
3. Montrer que $\mathcal{P}$ est stable par u et v.
4. Établir pour n dans $\mathbf{N}$ une relation simple entre W_{n+2} et W_n. En déduire pour tout n dans $\mathbf{N}$,
$$W_n W_{n+1} = \frac{\pi}{2(n+1)}$$
5. Montrer que la suite $(W_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est strictement décroissante. Déterminer sa limite et donner un équivalent de cette suite.

PARTIE B - Étude de la continuité de u et v

On considère la norme M sur $\mathcal{E}$ définie pour tout f dans $\mathcal{E}$ par la formule

$$M(f) = \max_{x\in I} |f(x)|$$

6. Vérifier que M est bien définie et montrer que u est une application continue de l'espace vectoriel normé $(\mathcal{E}, M)$ dans lui même.
7. L'application v est-elle continue de $(\mathcal{E}, M)$ dans lui même ?
8. Vérifier que l'application $N : \mathcal{E} \to \mathbf{R}$ définie par $N(f) = M(f) + M(f')$ est une norme sur $\mathcal{E}$, et montrer que v est continue de $(\mathcal{E}, N)$ dans $(\mathcal{E}, M)$. Les normes N et M sont-elles équivalentes ?
9. Si $f \in \mathcal{E}$ et $\varepsilon > 0$, montrer qu'il existe $p \in \mathcal{P}$ tel que $f(0) = p(0)$ et $|f'(x) - p'(x)| \leq \varepsilon$ pour tout $x \in I$. En déduire que $\mathcal{P}$ est dense dans l'espace vectoriel normé $(\mathcal{E}, N)$.

PARTIE C - Étude de l'inversibilité de u et v

10. Déterminer les restrictions de $u \circ v$ et $v \circ u$ à $\mathcal{P}$.
11. Déterminer $(u \circ v)(f)$ pour tout $f \in \mathcal{E}$. Le réel 0 est-il valeur propre de l'endomorphisme v ?
12. Déterminer également $(v \circ u)(f)$ pour tout $f \in \mathcal{E}$. Conclure.

Applications.

13. a) Montrer que la fonction sh : $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ donnée par $\mathrm{sh}(t) = \dfrac{1}{2}(e^t - e^{-t})$ définit une bijection de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, de classe C^∞ et dont la réciproque est également de classe C^∞. On note cette réciproque argsh. Donner les dérivées première et seconde de argsh.

    b) Pour tout $f \in \mathcal{E}$, donner une relation liant $v(f)$ et $u(f')$. Calculer $u(\arctan')$ à l'aide du changement de variable $z = \tan(t)$ et en déduire $u(\mathrm{argsh}'')$.
14. Montrer que $f \in \mathcal{E}$ est paire (resp. impaire) si et seulement si $u(f)$ l'est. Qu'en est-il pour v ?

PARTIE D - Étude des valeurs propres de u et v

15. Montrer que λ est une valeur propre de v si et seulement si $\dfrac{1}{\lambda}$ est une valeur propre de u. Qu'en est-il des vecteurs propres correspondants ?
16. Montrer que $\mathcal{D}$ est stable par u. L'est-il par v ?

On considère une valeur propre λ de u, de vecteur propre associé $f \in \mathcal{E}$.

17. Vérifier que si n appartient à $\mathbf{N}$, le nombre donné par $m_n = \max_{t \in I} \left| f^{(n)}(t) \right|$ est bien défini et établir

$$\forall x \in I\,, \quad |\lambda| \left| f^{(n)}(x) \right| \leq \frac{2 m_n W_n}{\pi}\,.$$

    En déduire $f \in \mathcal{P}$.
18. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de u et v.
19. L'espace vectoriel $\mathcal{E}$ admet-il une base de vecteurs propres de u ? De v ? L'ensemble des valeurs propres de u (resp. de v) est-il une partie fermée de $\mathbf{C}$?

Mines-Ponts MP 2017 – Première épreuve

PARTIE A - Préliminaires

1. Les parties $\mathcal{P}$ et $\mathcal{D}$ sont par définition incluses dans $\mathcal{E}$ et contiennent la fonction nulle. Une combinaison linéaire de deux polynômes en étant un et celle de deux fonctions développables en série entière au voisinage de 0 avec un rayon de convergence respectivement r et r' en étant une avec un rayon de convergence supérieur à $\min(r, r')$, on en déduit que ce sont des $\boxed{\text{sous-espaces vectoriels de } \mathcal{E}.}$

2. a) Soit x dans I, les fonctions $t \mapsto f(x\sin(t))$ et $x \mapsto f'(x\sin(t))$ sont continues donc intégrables sur le segment $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$. Par conséquent $\boxed{u(f) \text{ et } v(f) \text{ sont bien définis.}}$
Puisque f' est de classe C^∞, comme f, d'après le théorème de Weierstrass elle est bornée sur I. Soit donc $k = \sup_I |f'|$. D'après l'inégalité de Lagrange (inégalité des accroissements finis), on a pour x et y dans I et t dans $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$

$$|f(x\sin(t)) - f(y\sin(t))| \leq k\,|x-y|\sin(t) \leq k\,|x-y|$$

et donc, par inégalité triangulaire et croissance de l'intégrale,

$$|u(f)(x) - u(f)(y)| \leq k\,|x-y|$$

et donc $\boxed{u(f) \text{ est lipschitzienne.}}$
Comme f appartient à $\mathcal{E}$, f' aussi. D'après ce qui précède, on dispose de k dans $\mathbf{R}_+$ tel que $u(f')$ soit k-lipschitzienne sur I, donc continue. En vertu du théorème de Weierstrass, elle y est bornée et il vient, pour x et y dans I

$$\begin{aligned} |v(f)(x) - v(f)(y)| &= \left|\frac{\pi}{2}(x-y)u(f')(x) + \frac{\pi}{2}y\,(u(f')(x) - u(f')(y))\right| \\ &\leq \frac{\pi}{2}\,|x-y|\sup_I |u(f')(t)| + \frac{a\pi}{2}\,|u(f')(x) - u(f')(y)| \\ &\leq \left(\frac{\pi}{2}\sup_I |u(f')(t)| + \frac{ka\pi}{2}\right)|x-y| \end{aligned}$$

et donc $\boxed{v(f) \text{ est lipschitzienne.}}$

b) Puisque f est de classe C^∞, sa dérivée seconde est bornée sur I et on dispose de M tel que, pour x et y dans I et t dans $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$, on ait

$$|f(y\sin(t)) - f(x\sin(t)) - (x-y)\sin(t)f'(x\sin(t))| \leq M\frac{(x-y)^2\sin^2(t)}{2}$$

et donc, par inégalité triangulaire et croissance de l'intégrale

$$\left|u(f)(y) - u(f)(x) - (x-y)\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\sin(t)f'(x\sin(t))\,\mathrm{d}t\right| \leq \frac{M}{4}(x-y)^2$$

et en particulier

$$u(f)(y) = u(f)(x) + (y-x)\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\sin(t)f'(x\sin(t))\,\mathrm{d}t + o\,(y-x)\ ,$$

i.e. $\boxed{u(f) \text{ admet un développement limité à l'ordre 1 en } x.}$

Par définition de $v(f)$, on en déduit, puisque f' appartient à $\mathcal{E}$

$$v(f)(y) = f(0) + \frac{2}{\pi}(x+y-x)\left(u(f')(x) + (y-x)\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \sin(t) f''(x\sin(t))\,\mathrm{d}t + o\,(y-x)\right)$$

et donc

$$v(f)(y) = v(f)(x) + (y-x)\left(\int_0^{\pi/2} (f'(x\sin(t)) + x\sin(t) f''(x\sin(t)))\,\mathrm{d}t\right) + o\,(y-x)$$

i.e. $\boxed{v(f) \text{ admet un développement limité à l'ordre 1 en } x.}$

c) Les deux questions précédentes montrent que $u(f)$ et $v(f)$ sont dérivables, de dérivées données par

$$u(f)'(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \sin(t) f'(x\sin(t))\,\mathrm{d}t$$

et

$$v(f)'(x) = \int_0^{\pi/2} f'(x\sin(t))\,\mathrm{d}t + x\int_0^{\pi/2} \sin(t) f''(x\sin(t))\,\mathrm{d}t\ .$$

En adaptant la démonstration de la question précédente il vient pour n entier, x et y dans I et t dans $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

$$\left|\sin^n(t) f^{(n)}(x\sin(t)) - \sin^n(t) f^{(n)}(y\sin(t))\right| \leq k\,|x-y| \sin^{n+1}(t) \leq k\,|x-y|$$

où $k = \sup_I \left|f^{(n+1)}\right|$. Une récurrence rapide montre alors que $u(f)$ est de classe C^∞ sur I, de dérivées données par

$$u(f)^{(n)}(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \sin^n(t) f^{(n)}(x\sin(t))\,\mathrm{d}t\ .$$

Comme $v(f)$ est, de ce fait, combinaison algébrique de fonctions de classe C^∞ sur I, elle l'est aussi, i.e. $\boxed{u(f) \text{ et } v(f) \text{ appartiennent à } \mathcal{E}.}$

d) Par linéarité de l'intégrale et de la composition à gauche, u est linéaire. Par linéarité de l'évaluation en 0 et stabilité par combinaisons linéaires (à coefficients dans l'algèbre des fonctions de classe C^∞ sur I) de $\mathscr{L}(\mathcal{E})$, v est également linéaire, et ainsi $\boxed{u \text{ et } v \text{ sont des endomorphismes de } \mathcal{E}.}$

3. Pour n entier on a directement, en identifant polynôme et fonction polynomiale sur I, $u(X^n) = \frac{2W_n}{\pi}X^n$, $v(1) = 1$ et, pour $n > 0$, $v(X^n) = nW_{n-1}X^n$. Par linéarité de u et v, on en déduit que $\boxed{\mathcal{P} \text{ est stable par } u \text{ et } v.}$

4. Pour n entier on a, par intégration par parties et en utilisant $1 - \sin^2 = \cos^2$,

$$(n+1)(W_n - W_{n+2}) = \int_0^{\pi/2} (n+1)\sin^n(t)\cos^2(t)\,\mathrm{d}t = W_{n+2}$$

i.e. $\boxed{(n+1)W_n = (n+2)W_{n+2}.}$

En particulier la suite de terme général $(n+1)W_nW_{n+1}$ est constante. Comme son premier terme vaut $\frac{\pi}{2}$, il vient $\boxed{W_nW_{n+1} = \frac{\pi}{2(n+1)}.}$

5. Pour t dans $\left]0; \dfrac{\pi}{2}\right[$, l'intégrande dans W_n est une fonction strictement décroissante de n et donc, par croissance de l'intégrale et continuité des intégrandes, $\boxed{(W_n)_{n\in\mathbf{N}} \text{ est strictement décroissante.}}$
Par décroissance, il vient pour n entier $W_{n+2} < W_{n+1} < W_n$ et, puisque $W_n \sim W_{n+2}$, d'après la relation trouvée à la question précédente, il vient $nW_n^2 \sim (n+1)W_nW_{n+1}$. On en déduit $W_n^2 \sim \dfrac{\pi}{2n}$ et, par multiplicativité et continuité de la racine carrée et par positivité de W_n, $\boxed{W_n \sim \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}} \text{ et } \lim W_n = 0.}$

PARTIE B - Étude de la continuité de u et v

6. Puisque f est continue sur le segment I qui est compact, elle y atteint ses bornes d'après le théorème de Weierstrass et donc $\boxed{M \text{ est bien défini.}}$
Il résulte de l'inégalité de la moyenne qu'on a, pour x dans I, $|u(f)(x)| \le M(f)$, i.e. $M(u(f)) \le M(f)$ et donc, par caractérisation des applications linéaires continues,
$\boxed{u \text{ est une application continue de } (\mathcal{E}, M) \text{ dans lui même.}}$

7. D'après les calculs effectués en question 3, le spectre de v contient les termes de la suite (nW_{n-1}) et donc, d'après la question 5, son spectre n'est pas borné. Par homogénéité de la norme, on en conclut que v n'est lipschitzienne pour aucune norme, donc en particulier pour M, et ainsi
$\boxed{v \text{ n'est pas continue de } (\mathcal{E}, M) \text{ dans lui même.}}$

8. L'homogénéité et la positivité de N résultent de celles de M, de même que l'inégalité triangulaire pour N résulte de la linéarité de la dérivation et de l'inégalité triangulaire pour M. De plus $M \le N$, donc N satisfait à l'axiome de séparation puisqu'il est vrai pour M, i.e. $\boxed{N \text{ est une norme sur } \mathcal{E}.}$
Pour f dans $\mathcal{E}$ on a par inégalité triangulaire $M(v(f)) \le M(f) + a\dfrac{\pi}{2}M(f') \le a\dfrac{\pi}{2}N(f)$ et donc
$\boxed{v \text{ est continue de } (\mathcal{E}, N) \text{ dans } (\mathcal{E}, M).}$
Puisque v est continue en munissant l'espace source de la norme N et non continue quand on le munit de la norme M, $\boxed{N \text{ et } M \text{ ne sont pas équivalentes.}}$

9. Soit f dans $\mathcal{E}$ et $\varepsilon > 0$. D'après le théorème d'approximation de Weierstrass, puisque I est compact et f' est continu, on dispose d'un polynôme q tel que $M(f' - q) \le \varepsilon$. Soit p le polynôme défini par $p(0) = f(0)$ et $p' = q$, i.e. donné par $p(x) = f(0) + \displaystyle\int_0^x q(t)\,\mathrm{d}t$, alors $\boxed{f(0) = p(0) \text{ et } M(f' - p') \le \varepsilon.}$
Par inégalité de Lagrange (inégalité des accroissements finis), il vient pour x dans I,
$$|(f-p)(x)| = |(f-p)(x) - (f-p)(0)| \le |x|\, M(f'-q) \le a\varepsilon$$
et donc $M(f - p) \le a\varepsilon$ puis $N(f - p) \le (a+1)\varepsilon$. Il en résulte que
$\boxed{\mathcal{P} \text{ est dense dans l'espace vectoriel normé } (\mathcal{E}, N).}$

PARTIE C - Étude de l'inversibilité de u et v

10. D'après les calculs effectués en question 3, la base canonique de $\mathcal{P}$ est propre pour u et v, donc u et v commutent sur cette base, donc sur $\mathcal{P}$. D'après ces mêmes calculs et la relation établie en question 4, $u \circ v$ est l'identité sur la base canonique, i.e. $\boxed{\text{en restriction à } \mathcal{P},\ u \circ v \text{ et } v \circ u \text{ sont l'identité.}}$

11. Par composition, $u \circ v$ est une application continue de $(\mathcal{E}, N)$ dans $(\mathcal{E}, M)$. Comme $M \le N$, l'identité est également continue de $(\mathcal{E}, N)$ dans $(\mathcal{E}, M)$ (car 1-lipschitzienne par exemple). Il en va donc de même

pour $u \circ v - \mathrm{Id}$, dont la restriction à $\mathcal{P}$ est nulle. Par densité de ce dernier ensemble dans $(\mathcal{E}, N)$, on en conclut $u \circ v = 0$ sur $\mathcal{E}$, i.e. $\boxed{(u \circ v)(f) = f.}$

La composée $u \circ v$ étant injective, v l'est aussi et donc $\boxed{0 \text{ n'est pas valeur propre de } v.}$

12. Soit f dans $\mathcal{E}$. On note φ_f la fonction pente en 0 associée, i.e. pour x dans I on a $f(x) = f(0) + x\varphi_f(x)$ et $\varphi_f(0) = f'(0)$. Alors $\varphi_f \in \mathcal{E}$ et si g est la primitive de $v\left(\dfrac{2}{\pi}\varphi_f\right)$ valant $f(0)$ en 0, i.e. pour x dans I

$$g(x) = f(0) + \int_0^x v\left(\frac{2}{\pi}\varphi_f\right)(t)\,\mathrm{d}t$$

alors, d'après ce qui précède, $u(g') = \dfrac{2}{\pi}\varphi_f$ et donc $v(g) = f$. On en déduit $v \circ u(f) = v(u \circ v(g)) = v(g) = f$, i.e. $\boxed{(v \circ u)(f) = f.}$

On en conclut que u et v sont inversibles et $\boxed{u = v^{-1}.}$

Remarque : on peut aussi utiliser l'expression de $u(f)'$ et l'inégalité de la moyenne pour obtenir $M(u(f)') \leq M(f')$ et donc $N(u(f)) \leq N(f)$, ce qui montre que u est continu de $(\mathcal{E}, N)$ dans lui-même. Il en résulte que $v \circ u - \mathrm{Id}$ est continu de $(\mathcal{E}, N)$ dans $(\mathcal{E}, M)$, nul sur un sous-espace dense et donc nul sur $\mathcal{E}$.

13. a) Puisque l'exponentielle est de classe C^∞ et ne s'annule pas, sh est de classe C^∞ par opérations algébriques sur ces fonctions. Si x et t sont réels, on a, par non annulation puis positivité stricte de e^t,

$$\begin{aligned} \mathrm{sh}(t) = x &\iff e^t - 2x - e^{-t} = 0 \\ &\iff e^{2t} - 2xe^t - 1 = 0 \\ &\iff \left|e^t - x\right| = \sqrt{1+x^2} \\ &\iff e^t = x + \sqrt{1+x^2} \end{aligned}$$

et donc $\mathrm{sh}(t) = x \iff t = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$, cette dernière expression étant bien définie car l'argument du logarithme est du signe de $\sqrt{1+x^2}$ (qui est le plus grand des deux termes en valeur absolue) et est donc strictement positif. Cette expression de t est composée d'une fonction de classe C^∞ de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}_+^*$ et du logarithme, et est donc dans $\mathcal{E}$, i.e. $\boxed{\text{sh est bijective de classe } C^\infty \text{ ainsi que sa réciproque.}}$

Au vu de l'expression trouvée (ou en utilisant $\mathrm{argsh} \circ \mathrm{sh} = \mathrm{Id}$), il vient pour x réel

$\boxed{\mathrm{argsh}'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}}$ et donc $\boxed{\mathrm{argsh}''(x) = -x(1+x^2)^{-3/2}.}$

b) Soit f dans $\mathcal{E}$ et x dans I, par définition on a $\boxed{v(f)(x) = f(0) + \dfrac{\pi}{2}xu(f')(x).}$

Par définition on a, pour x dans I, par changement de variable de classe C^1 bijectif donné par $z = \tan(t)$ i.e. $t = \arctan(z)$ pour t dans $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right[$ et z dans $\mathbf{R}_+$,

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2}u(\arctan')(x) &= \int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}t}{1 + x^2\sin^2(t)} \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}z}{1 + z^2(1+x^2)} \\ &= \frac{\pi}{2}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \end{aligned}$$

i.e. $\boxed{u(\arctan') = \text{argsh}'.}$

On en déduit $v(\text{argsh}') = \arctan'$ et donc, pour x dans I,

$$1 + \frac{\pi}{2} x u(\text{argsh}'')(x) = \frac{1}{1+x^2}\ , \text{ i.e. } x u(\text{argsh}'')(x) = \frac{2x^2}{\pi(1+x^2)}$$

Par continuité de $u(\text{argsh}'')$ en 0, il vient $\boxed{u(\text{argsh}'')(x) = \dfrac{2x}{\pi(1+x^2)}.}$

14. Soit f dans $\mathcal{E}$. Par définition de $u(f)$, on a $u(f) \circ (-\text{Id}) = u(f \circ (-\text{Id}))$, de sorte qu'on a, par linéarité de u, pour tout scalaire ε,

$$\begin{aligned} u(f) \circ (-\text{Id}) = \varepsilon u(f) \quad &\iff \quad u(f \circ (-\text{Id})) = u(\varepsilon f) \\ &\iff \quad f \circ (-\text{Id}) = \varepsilon f \end{aligned}$$

par bijectivité de u. En appliquant le résultat à $v(f)$, on obtient $f \circ (-\text{Id}) = \varepsilon f \iff v(f) \circ (-\text{Id}) = \varepsilon v(f)$. En prenant $\varepsilon = 1$ et $\varepsilon = -1$, on en déduit

$\boxed{f \text{ est paire (resp. impaire) si et seulement si } u(f) \text{ l'est, si et seulement si } v(f) \text{ l'est.}}$

PARTIE D - Étude des valeurs propres de u et v

15. Puisque u et v sont inversibles, elles n'ont pas de valeur propre nulle. Comme elles sont inverses l'une de l'autre, pour f dans $\mathcal{E}$ et λ dans $\mathbf{C}^*$, on a

$$v(f) = \lambda f \iff f = u(\lambda f) \iff f = \lambda u(f) \iff u(f) = \frac{1}{\lambda} f$$

et donc $\boxed{\lambda \text{ est valeur propre de } v \text{ si et seulement si } \dfrac{1}{\lambda} \text{ l'est pour } u.}$ De plus

$\boxed{f \text{ est vecteur propre pour } v \text{ associé à } \lambda \text{ si et seulement s'il l'est pour } u \text{ avec la valeur propre } \dfrac{1}{\lambda}.}$

16. Soit f dans $\mathcal{D}$. Pour n entier on pose $a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$, $P_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, R le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$, supposé non nul. Pour r vérifiant $0 < r < R$ et $J = I \cap [-r; r]$, la suite de polynômes (P_n) converge normalement donc uniformément vers f sur J. En appliquant les résultats du problème à J au lieu de I, on en déduit que $u(f)$ est limite uniforme des polynômes $u(P_n)$, i.e. est somme de la série entière $\dfrac{2}{\pi} \sum a_n W_n z^n$ sur J. En particulier $u(f) \in \mathcal{D}$ et donc $\boxed{\mathcal{D} \text{ est stable par } u.}$
Remarque : en posant $b_n = a_n W_n$ on a $b_n = o\,(a_n)$ et $a_n = o\,(n b_n)$, ce qui montre que les séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ ont même rayon de convergence.
Comme f est dans $\mathcal{D}$, il en va de même de f', donc de $u(f')$ et donc aussi de $v(f)$ au vu de la relation entre $v(f)$ et $u(f')$. On en déduit que $\boxed{\mathcal{D} \text{ est stable par } v.}$

17. Soit n dans $\mathbf{N}$. Comme f est de classe C^∞, $f^{(n)}$ est une fonction continue sur le segment I. D'après le théorème de Weierstrass $f^{(n)}$ atteint ses bornes sur I et donc $\boxed{m_n \text{ est bien défini.}}$
Par inégalité de la moyenne et en utilisant l'expression des dérivées de $u(f)$, la positivité de sin sur $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$, $u(f) = \lambda f$ et donc $u(f)^{(n)} = \lambda f^{(n)}$, il vient pour x dans I $\boxed{|\lambda|\left|f^{(n)}(x)\right| \leq \dfrac{2 m_n W_n}{\pi}.}$

Puisque $f^{(n)}$ atteint ses bornes, il vient $|\lambda| m_n \leq \dfrac{2m_n W_n}{\pi}$ puis $m_n(\pi|\lambda| - 2W_n) \leq 0$. Puisque $\pi|\lambda| - 2W_n = \pi|\lambda| + o(1)$, pour n assez grand $\pi|\lambda| - 2W_n$ est strictement positif et alors, pour un tel n, $m_n \leq 0$, d'où $m_n = 0$ par positiivité de m_n. On en déduit $f^{(n)} = 0$ sur I et donc f est polynomiale, i.e. $\boxed{f \in \mathcal{P}.}$

18. D'après ce qui précède les vecteurs propres de u, et donc de v, appartiennent à $\mathcal{P}$, dont une base propre a déjà été obtenue. Les valeurs propres associées étant toutes distinctes, par décroissance stricte de (W_n), on en déduit que $\boxed{\text{les vecteurs propres de } u \text{ et } v \text{ sont les fonctions monomiales.}}$

    $\boxed{\text{Une fonction monomiale de degré } n \text{ est associée à la valeur propre } \dfrac{2W_n}{\pi} \text{ pour } u \text{ et donc } \dfrac{\pi}{2W_n} \text{ pour } v.}$

19. Puisqu'on a obtenu une liste exhaustive des vecteurs propres de u et de v, on en déduit que ceux-ci n'engendrent pas $\mathcal{E}$ et donc $\boxed{\mathcal{E} \text{ n'admet pas de base de vecteurs propres ni pour } u, \text{ ni pour } v.}$

    Puisque (W_n) tend vers 0 et que 0 n'est pas valeur propre de u,

    $\boxed{\text{l'ensemble des valeurs propres de } u \text{ n'est pas fermé dans } \mathbf{C}.}$

    Soit (λ_n) une suite de valeurs propres de v dans $\mathbf{C}$. En particulier c'est une suite bornée. Soit M un réel tel que $\forall n \in \mathbf{N}$, $|\lambda_n| \leq M$. Comme $\lim \dfrac{\pi}{2W_n} = +\infty$ on dispose de n_0 dans $\mathbf{N}$ tel que $\forall n \geq n_0$, $\dfrac{\pi}{2W_n} > M$. On en déduit que (λ_n) est à valeurs dans $\left\{ \dfrac{\pi}{2W_n} \;\middle|\; n < n_0 \right\}$, à savoir dans un ensemble fini. Comme un ensemble fini est fermé, la limite de (λ_n) appartient à cet ensemble et est donc une valeur propre de v. Par conséquent $\boxed{\text{l'ensemble des valeurs propres de } v \text{ est fermé dans } \mathbf{C}.}$