Deuxième composition de mathématiques
Mines-Pont 1999 – MP

Soit $\mathcal{E}$ l'espace vectoriel complexe des fonctions complexes définies et continues sur le segment $I = [0, \pi]$. Soit $\|\cdot\|_\infty$ l'application qui, à toute fonction f de $\mathcal{E}$ associe le maximum du module de la fonction f sur l'intervalle I :

$$\|f\|_\infty = \max_{0 \le x \le \pi} |f(x)| \,.$$

Il est connu que $\mathcal{E}$ est un espace vectoriel normé.
Soit $\mathcal{F}$ le sous-ensemble des fonctions f continûment dérivables, qui appartiennent à l'espace vectoriel $\mathcal{E}$, qui prennent la valeur 0 aux points 0 et π et dont l'intégrale du carré du module de la fonction dérivée f' est majorée par 1 :

$$\mathcal{F} = \left\{ f \in \mathcal{E} \;\middle|\; f \in C^1(I, \mathbf{C}) \,,\, \int_0^\pi |f'(x)|^2 \,\mathrm{d}x \le 1 \,,\, f(0) = f(\pi) = 0 \right\} \,.$$

Soit $\mathcal{G}$ l'ensemble des fonctions complexes f définies sur le segment $I = [0, \pi]$ possédant la propriété : il existe une suite complexe $(b_n)_{n \ge 1}$ telle que

- la série de terme général $c_n = n^2 |b_n|^2$, $n \ge 1$, est convergente et sa somme est majorée par $2/\pi$,
- pour tout réel x de l'intervalle I, la série trigonométrique de terme général $b_n \sin(nx)$, $n \ge 1$, est convergente et sa somme est égale à $f(x)$.

$$\mathcal{G} = \left\{ f \;:\; I \to \mathbf{C} \;\middle|\; \exists (b_n)_{n \ge 1} \in \mathbf{C}^{\mathbf{N}^*} \,,\, \sum_{n=1}^{\infty} n^2 |b_n|^2 \le \frac{2}{\pi} \,,\, \forall x \in I \;\, f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx) \right\} \,.$$

Le but du problème est d'étudier d'une part les relations existant entre les ensembles $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$, d'autre part leurs propriétés.

PARTIE I - Résultat préliminaires

I.1. Convergence de la série trigonométrique $\sum_{n \ge 1} b_n \sin(nx)$.

Soit une suite complexe $(b_n)_{n \ge 1}$ telle que la série de terme général $n^2 |b_n|^2$, $n \ge 1$, soit convergente. Démontrer qe la série de terme général b_n, $n \ge 1$, est absolument convergente en utilisant par exemple l'inégalité :

$$\forall (a, b) \in (\mathbf{R}_+)^2 \,, \quad 2ab \le a^2 + b^2 \,.$$

En déduire que $\mathcal{G}$ est inclus dans $\mathcal{E}$.

I.2. Un exemple de fonction appartenant à l'ensemble $\mathcal{G}$.

a. En admettant le résultat classique $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, calculer la somme S de la série de terme général $\dfrac{1}{(2k+1)^2}$, $k \ge 0$: $S = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$.

b. Soit h la fonction définie sur l'intervalle I par la relation $h(x) = \min(x, \pi - x)$. Soit $\tilde{h}$ la fonction définie sur la droite réelle, impaire, périodique de période 2π, de restriction à l'intervalle I égale à la fonction h.

i. Montrer que la fonction $\tilde{h}$ est continue ; déterminer sa série de Fourier.

ii. Quelle est la somme de la série de Fourier de la fonction $\tilde{h}$? Retrouver la valeur de S calculée ci-dessus.

iii. En déduire que la fonction $k : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{\pi}} h(x)$ appartient à l'ensemble $\mathcal{G}$.

I.3. Égalité entre une fonction périodique et la somme de sa série de Fourier.

Démontrer que, si f est une fonction complexe, définie et continue sur la droite réelle, 2π-périodique, dont la série de Fourier converge uniformément, la fonction f est alors égale à la somme de sa série de Fourier.

PARTIE II - L'ensemble $\mathcal{F}$ est inclus dans l'ensemble $\mathcal{G}$

II.1. Une fonction de $\mathcal{F}$ est la somme d'une série trigonométrique.

Soit f une fonction donnée de l'ensemble $\mathcal{F}$.

a. Soit $\tilde{f}$ la fonction, définie sur la droite réelle, impaire, périodique de période 2π, de restriction à l'intervalle I égale à la fonction f. Établir que cette fonction $\tilde{f}$ est continûment dérivable sur la droite réelle.

b. En déduire l'existence d'une suite complexe $(b_n)_{n\geq 1}$ telle que, pour tout réel x de l'intervalle I, le réel $f(x)$ soit égal à la somme de la série trigonométrique de terme général $b_n \sin(nx)$, $n \geq 1$. Préciser la convergence de cette série.

II.2. Inclusion de $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{G}$.

Soit f une fonction appartenant à l'ensemble $\mathcal{F}$; démontrer que cette fonction f appartient aussi à l'ensemble $\mathcal{G}$. Est-ce que l'inclusion de $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{G}$ est stricte ?

PARTIE III - Densité de $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{G}$ pour la norme déduite de celle de $\mathcal{E}$. Le sous-ensemble $\mathcal{G}$ de $\mathcal{E}$ est compact.

III.1. Densité de $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{G}$.

Soit g une fonction appartenant à $\mathcal{G}$; la fonction g est somme d'une série trigonométrique de terme général $b_n \sin(nx)$, $n \geq 1$; soit g_p la somme des p premiers termes de cette série (p est un entier strictement positif) : $g_p(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{p} b_n \sin(nx)$.

Démontrer que pour tout entier p, $p \geq 1$, la fonction g_p appartient au sous-ensemble $\mathcal{F}$. Établir que la fonction g est la limite dans l'espace vectoriel normé $\mathcal{E}$ de la suite des fonctions g_p, $p \geq 1$. En déduire que le sous-ensemble $\mathcal{F}$ de $\mathcal{G}$ est dense dans $\mathcal{G}$.

III.2. Limite d'une suite convergente de fonctions appartenant à $\mathcal{G}$.

Soit $(f_r)_{r\in\mathbf{N}}$ une suite de fonctions appartenant au sous-ensemble $\mathcal{G}$ qui converge dans $\mathcal{E}$ vers une fonction f. Par définition de $\mathcal{G}$, pour chaque fonction f_r, on dispose d'une suite de nombres complexes $b_{r,n}$, $n \geq 1$, telle que

- la série de terme général $n^2|b_{r,n}|^2$, $n \geq 1$, est convergente ; sa somme est majorée par $\dfrac{2}{\pi}$;
- pour tout entier n, $n \geq 1$, et tout réel x de I, $f_r(x)$ est la somme de la série de terme général $b_{r,n} \sin(nx)$, $n \geq 1$: $f_r(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_{r,n} \sin(nx)$.

a. Démontrer que, pour tout entier n fixé, $n \geq 1$, la suite $(b_{r,n})_{r\in\mathbf{N}}$ est convergente et a une limite b_n, qui est le nombre complexe défini par la relation ci-dessous :

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(nx)\,\mathrm{d}x \,.$$

b. Établir que les nombres complexes b_n, $n \geq 1$, définis ci-dessus ont la propriété : la série de terme général $n^2|b_n|^2$, $n \geq 1$, est convergente ; sa somme vérifie l'inégalité suivante : $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^2|b_n|^2 \leq \frac{2}{\pi}$.

c. En déduire que la fonction f appartient à l'ensemble $\mathcal{G}$.

III.3. Adhérence des sous-ensembles $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ dans $\mathcal{E}$.

Déterminer l'adhérence du sous-ensemble $\mathcal{G}$ dans $\mathcal{E}$; en déduire que $\mathcal{G}$ est fermé. Quelle est l'adhérence dans $\mathcal{E}$ du sous-ensemble $\mathcal{F}$?

III.4. Le sous-ensemble $\mathcal{G}$ est compact.

a. Soit f une fonction appartenant au sous-ensemble $\mathcal{F}$. Démontrer, pour tout couple de réels x et y de l'intervalle I, vérifiant l'inégalité $x \leq y$, la relation :

$$|f(x) - f(y)| \leq \sqrt{y - x}\ .$$

Utiliser, par exemple, l'expression de la différence $f(y) - f(x)$ au moyen d'une intégrale.

b. Soit $(f_r)_{r \in \mathbf{N}}$ une suite de fonctions appartenant au sous-ensemble $\mathcal{F}$; il est admis qu'il existe une suite extraite $(f_{\varphi(r)})_{r \in \mathbf{N}}$ qui converge simplement en tout point de l'intervalle I d'abscisse rationnelle : pour tout rationnel z, $0 \leq z \leq \pi$, $(f_{\varphi(r)}(z))_{r \in \mathbf{N}}$ est une suite convergente.

Démontrer que la suite de fonctions $g_r = f_{\varphi(r)}$, $r \in \mathbf{N}$, converge uniformément sur l'intervalle I.

c. En déduire que le sous-ensemble $\mathcal{G}$ est compact.

Deuxième composition de mathématiques – Mines-Pont 1999 – MP

PARTIE I - Résultat préliminaires

I.1. L'inégalité suggérée par le texte est vraie car c'est l'inégalité entre moyenne géométrique et moyenne quadratique, ou résulte d'une identité remarquable. On a donc, pour n dans $\mathbf{N}^*$,

$$|b_n| =\leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n^2}+(n^2|b_n|^2)\right)$$

et la série $\sum_{n\geq 1}|b_n|$ est donc majorée par la somme de deux séries convergentes, la première puisque c'est une série de Riemann convergente, la seconde par hypothèse. Par le théorème de comparaison des séries à termes positifs,

$\boxed{\text{la série } \sum_{n\geq 1} b_n \text{ est absolument convergente.}}$

Soit maintenant f dans $\mathcal{G}$. On dispose alors de $(b_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ dans $\mathbf{C}^{\mathbf{N}^*}$ tel que $\sum_{n=1}^{+\infty} n^2|b_n|^2$ converge et, pour x dans I, $f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty} b_n\sin(nx)$. Comme $\sup_{x\in I}|b_n\sin(nx)|\leq |b_n|$, le résultat montre que la série de fonctions définissant f est normalement, donc uniformément, convergente sur I. Comme on a affaire à des fonctions trigonométriques, f est somme de fonctions continues sur I. Par convergence uniforme, on en déduit que f est continue sur I. Il en résulte $\boxed{\mathcal{G}\subset\mathcal{E}.}$

I.2. a. Les séries $\sum_{k\geq 0}\frac{1}{(2k+1)^2}$ et $\sum_{k\geq 1}\frac{1}{(2k)^2}$ sont des séries à termes positifs, majorées par la série de Riemann $\sum_{n\geq 1} n^{-2}$ et sont donc convergentes. De plus, on a $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k)^2}=\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$ et donc $S=\frac{3}{4}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$, i.e. $\boxed{S=\frac{\pi^2}{8}.}$

b. i. La fonction h est continue sur I en tant que minimum de fonctions continues. Plus précisément h est affine par morceaux et vaut 0 en 0 et π, et $\pi/2$ en $\pi/2$. Comme $h(0)=-h(0)=0$, $\tilde{h}$ est continue en 0. Comme $h(\pi)=0=-h(\pi)$, $\tilde{h}$ est continue en π. Par 2π-périodicité, $\boxed{\tilde{h} \text{ est continue.}}$

Comme $\tilde{h}$ est impaire, son développement en série de Fourier est sinusoïdal. Puisque $\tilde{h}$ est symétrique par rapport à $\pi/2$, ses coefficients d'indice pair sont nuls et on a, pour n dans $\mathbf{N}^*$

$$b_{2n+1}(\tilde{h})=\frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2} x\sin(nx)\,\mathrm{d}x=(-1)^n\frac{4}{(2n+1)^2\pi}$$

i.e. $\boxed{\text{la série de Fourier de } \tilde{h} \text{ est } \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin((2n+1)x)}{(2n+1)^2}.}$

ii. Puisque $\tilde{h}$ est continue et affine par morceaux, elle est en particulier 2π-périodique, continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux. Le théorème de Dirichlet assure donc que

$\boxed{\tilde{h} \text{ est somme de sa série de Fourier.}}$

En particulier pour $x=\pi/2$, il vient $h(\pi/2)=\pi/2=4S/\pi$, i.e. $\boxed{S=\frac{\pi^2}{8}.}$

iii. La fonction k est donc somme de la série trigonométrique associée à la suite complexe définie par $b_n = \dfrac{4\sin(n\pi/2)}{n^2\pi^{3/2}}$, pour $n \in \mathbf{N}^*$. Or, pour n dans $\mathbf{N}^*$, $n^2|b_n|^2 = O(n^{-2})$ et donc d'après le critère de Riemann la série $\sum_{n\geq 1} n^2|b_n|^2$ est convergente. Plus précisément il vient

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2|b_n|^2 = \frac{16}{\pi^3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{16S}{\pi^3} = \frac{2}{\pi}$$

et donc $\boxed{\text{la fonction } k \text{ appartient à } \mathcal{G}.}$

I.3. On note $C_{2\pi}$ l'espace vectoriel des fonctions complexes, continues sur $\mathbf{R}$ et 2π-périodiques, et on le munit du produit scalaire défini par $\langle u \,|\, v\rangle = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\overline{u(t)}v(t)\,\mathrm{d}t$. Pour n dans $\mathbf{Z}$, on note e_n la fonction $t \mapsto \exp(int)$, de sorte que, pour u dans $C_{2\pi}$, ses coefficients de Fourier sont définis par $c_n(u) = \langle e_n \,|\, u\rangle$ et les sommes partielles de sa série de Fourier sont définies par $S_n(u) = \sum_{k=-n}^{n} c_k(u)e_k$.

Soit alors f une fonction dans $C_{2\pi}$ dont la série de Fourier converge uniformément. On note g la somme de la série de Fourier de f, i.e. $g = \lim S_n(f)$, la limite étant uniforme.

Comme g est limite uniforme de polynômes trigonométriques, donc de fonctions continues et 2π-périodiques, elle est aussi continue et 2π-périodique, i.e. $g \in C_{2\pi}$.

De plus on a, pour k et n des entiers tels que $0 \leq |k| \leq n$, $\langle e_k \,|\, S_n(f)\rangle = c_k(f)$. Il en résulte, sous les mêmes hypothèses, $c_k(f) - c_k(g) = \langle e_k \,|\, S_n(f) - g\rangle$ et donc

$$|c_k(f) - c_k(g)| \leq \|S_n(f) - g\|_2 \leq \|S_n(f) - g\|_\infty$$

d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz et celle de la moyenne. Il en résulte que f et g ont mêmes coefficients de Fourier. Or l'application $f \mapsto \hat{f}$ de $C_{2\pi}$ dans $\ell^2(\mathbf{Z})$ est injective, d'après la formule de Parseval, et donc $f = g$, i.e. $\boxed{f \text{ est somme de sa série de Fourier.}}$

PARTIE II - L'ensemble $\mathcal{F}$ est inclus dans l'ensemble $\mathcal{G}$

II.1. a. Puisque f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, $\tilde{f}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbf{R}$ et ses points de discontinuités et de non-dérivabilité éventuels sont dans $\pi\mathbf{Z}$. Par 2π-périodicité, il suffit de montrer que $\tilde{f}$ est dérivable en 0 et π.

Comme $f(0) = 0$, on a $f(x) = xf'_g(0) + o(x)$ au voisinage de 0 (et pour x dans I). Si $-x$ est dans I, on a donc $\tilde{f}(x) = -f(-x) = xf'_g(0) + o(x)$, de sorte qu'on a $\tilde{f}(x) = xf'_g(0) + o(x)$ au voisinage de 0 (pour x réel) et donc $\tilde{f}$ est continue et dérivable en 0, de dérivée $f'_g(0)$, par équivalence entre dérivabilité et existence d'un développement limité d'ordre 1 (critère de Weierstraß). De plus $\lim_{x\to 0^+} f'(x) = f'(0)$ par hypothèse. Par imparité, on a, pour x dans $]0,\pi[$, $\tilde{f}'(-x) = f'(x)$ et donc $\tilde{f}$ est continûment dérivable en 0.

La fonction $x \mapsto f(\pi - x)$ appartient également à $\mathcal{F}$ et d'après ce qui précède son prolongement par imparité et 2π-périodicité est continûment dérivable en 0, ce qui équivaut au fait que $\tilde{f}$ est continûment dérivable en π.

On en déduit que $\boxed{\tilde{f} \text{ est continûment dérivable sur } \mathbf{R}.}$

b. D'après le théorème de Dirichlet $\tilde{f}$ est somme de sa série de Fourier. Comme elle est impaire, elle est somme d'une série sinusoïdale et ses coefficients de Fourier sinusoïdaux sont en fait obtenus par la formule

$$b_n = b_n(\tilde{f}) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t\ .$$

En particulier, en restreignant l'intervalle d'étude à I, f est somme de la série de Fourier de $\tilde{f}$ sur I et de plus, de par le théorème de Dirichlet, la convergence de cette série est normale :

il existe une suite complexe $(b_n)_{n\geq 1}$ telle que, pour x dans I, $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx)$. La convergence de la série est uniforme sur I et, plus précisément, f est la somme d'une série de fonctions normalement convergente sur I.

II.2. À f on associe $\tilde{f}$ comme en II.1. En particulier $\tilde{f}'$ est dans $C_{2\pi}$ et est paire. La formule de Parseval donne

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} |f'(t)|^2 \,\mathrm{d}t = |a_0(\tilde{f}')|^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} |a_n(\tilde{f}')|^2 \ .$$

De la formule, valable pour n dans $\mathbf{Z}$, $c_n(\tilde{f}') = inc_n(\tilde{f})$, on tire $a_0(\tilde{f}') = 0$ et, pour n dans $\mathbf{N}^*$, $a_n(\tilde{f}') = nb_n(\tilde{f})$. Il en résulte que la série $\sum_{n\geq 1} n^2|b_n(\tilde{f})|^2$ converge et que sa somme est égale à $\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} |f'(t)|^2 \,\mathrm{d}t$ et est donc inférieure à $\dfrac{2}{\pi}$. D'après ce qui précède, f étant somme de la série $\sum_{n\geq 1} b_n(\tilde{f})\sin(nx)$, on en conclut que $\boxed{f \text{ appartient à } \mathcal{G}.}$

Comme k appartient à $\mathcal{G}$ mais n'est pas dérivable en $\pi/2$, $\boxed{\text{l'inclusion de } \mathcal{F} \text{ dans } \mathcal{G} \text{ est stricte.}}$

PARTIE III - Densité de $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{G}$ pour la norme déduite de celle de $\mathcal{E}$. Le sous-ensemble $\mathcal{G}$ de $\mathcal{E}$ est compact.

III.1. Pour p dans $\mathbf{N}^*$, g_p est un polynôme trigonométrique et se prolonge donc en une fonction définie sur $\mathbf{R}$, 2π-périodique et de classe $\mathcal{C}^{\infty}$ sur $\mathbf{R}$. Comme il s'agit de polynômes sinusoïdaux, g_p est nulle en 0 et en π. La formule de Parseval appliquée à g_p' donne, avec les mêmes arguments qu'en II.2,

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} |g_p'(t)|^2 \,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{p} n^2|b_n|^2 \leq \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} n^2|b_n|^2 \leq \frac{1}{\pi}$$

et donc $\boxed{g_p \text{ appartient à } \mathcal{F}.}$

D'après I.1, la série $\sum b_n \sin(nx)$ est normalement convergente et donc uniformément sur I. Il en résulte que la suite (g_p) converge uniformément vers f, i.e.

$\boxed{g = \lim g_p, \text{ la limite étant prise dans l'espace vectoriel normé } \mathcal{E}.}$

La fonction g étant quelconque dans $\mathcal{G}$, on en déduit que $\boxed{\mathcal{F} \text{ est dense dans } \mathcal{G}.}$

III.2. a. Soit r dans $\mathbf{N}$. La série de fonctions définissant f_r convergeant normalement, d'après I.1, elle est somme de sa série de Fourier, d'après I.3, et ses coefficients de Fourier sont donnés par prolongement par imparité et 2π-périodicité, i.e.

$$b_n(f_r) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f_r(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t = b_{r,n} \ .$$

Par convergence uniforme de (f_r) vers f, l'inégalité de la moyenne assure que, pour n fixé dans $\mathbf{N}^*$, $(b_{r,n})_{r\in\mathbf{N}}$ converge vers $b_n(f)$, défini par

$$b_n(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t = b_n \ .$$

En effet

$$|b_{r,n} - b_n| \leq \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} |f_r(t) - f(t)|\,\mathrm{d}t \leq 2\left\|f_r - f\right\|_{\infty} \ .$$

$$\boxed{\text{Pour } n \text{ dans } \mathbf{N}^*,\ (b_{r,n})_{r\in\mathbf{N}} \text{ converge vers } \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\sin(nx)\,\mathrm{d}x.}$$

b. Soit N dans $\mathbf{N}^*$, on a, pour tout r dans $\mathbf{N}$,

$$\sum_{n=1}^{N} n^2|b_{r,n}|^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} n^2|b_{r,n}|^2 \leq \frac{2}{\pi}$$

et donc, par passage à la limite en r, $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} n^2|b_n|^2 \leq \frac{2}{\pi}$. On en déduit que la série à termes positifs $\sum_{n\geq 1} n^2|b_n|^2$ est majorée donc convergente et que sa somme est inférieure à $\dfrac{2}{\pi}$, i.e.

$$\boxed{\text{la série } \textstyle\sum_{n\geq 1} n^2|b_n|^2 \text{ est convergente, de somme inférieure à } \dfrac{2}{\pi}.}$$

c. On prolonge f par imparité et 2π-périodicité. Sa série de Fourier est alors normalement convergente, d'après I.1, et donc, d'après I.3, f est somme de sa série de Fourier. Il en résulte que $\boxed{f \text{ appartient à } \mathcal{G}.}$

III.3. Ce qui précède montre que l'adhérence de $\mathcal{G}$ est lui-même et donc qu'il est fermé dans $\mathcal{E}$. Comme $\mathcal{F}$ est dense dans $\mathcal{G}$, son adhérence contient $\mathcal{G}$ et, puisque ce dernier est fermé, lui est en fait égale : $\boxed{\mathcal{G} \text{ est fermé et égal aux adhérences de } \mathcal{G} \text{ et de } \mathcal{F}.}$

III.4. a. Soit x et y dans I avec $x \leq y$. D'après le théorème fondamental du calcul différentiel et intégral (Leibniz-Newton) et l'inégalité de Cauchy-Schwarz, il vient

$$|f(y)-f(x)|^2 = \left|\int_x^y f'(t)\,\mathrm{d}t\right|^2 \leq \int_x^y \mathrm{d}t \cdot \int_x^y |f'(t)|^2\,\mathrm{d}t\,.$$

Par positivité de $|f'|$, il vient

$$|f(y)-f(x)|^2 \leq (y-x)\cdot\int_0^1 |f'(t)|^2\,\mathrm{d}t \leq y-x\,,$$

d'où $\boxed{|f(x)-f(y)| \leq \sqrt{y-x}.}$

b. Pour z dans I et rationnel, on pose $g(z) = \lim g_r(z)$. On commence par montrer que g admet un prolongement continu sur I en vérifiant le critère séquentiel, i.e. le critère de Cauchy uniforme.

Il résulte de la question précédente, par passage à la limite, que pour x et y dans I et rationnels, $|g(x)-g(y)| \leq \sqrt{|y-x|}$. Il en résulte que g est uniformément continue sur $I\cap\mathbf{Q}$ et donc admet un unique prolongement (uniformément) continu sur l'adhérence de cet ensemble, i.e. I.

Bien que ce soit un résultat du cours, voici une démonstration de ce résultat. Si $(x_p)_{p\in\mathbf{N}}$ est une suite de Cauchy dans $I\cap\mathbf{Q}$, $(g(x_p))_{p\in\mathbf{N}}$ est une suite de Cauchy dans $\mathbf{C}$ et est donc convergente. Soit maintenant $(x_p)_{p\in\mathbf{N}}$ et $(y_q)_{q\in\mathbf{N}}$ deux suites de rationnels dans I, convergeant vers le même réel z dans I (non nécessairement rationnel), comme les suites $(g(x_p))_{p\in\mathbf{N}}$ et $(g(y_q))_{q\in\mathbf{N}}$ sont de Cauchy, on dispose de leurs limites respectives ℓ et ℓ'. Comme la suite dont les termes pairs sont les x_p et les termes impairs les y_q converge vers z, cette suite est de Cauchy et donc sa transformée par g est de Cauchy. Par unicité de la limite on en déduit $\ell = \ell'$ et on peut noter $g(z) = \ell$.

On a donc défini g sur I. De plus si x et y sont deux réels dans I et si $(x_p)_{p\in\mathbf{N}}$ et $(y_q)_{q\in\mathbf{N}}$ sont deux suites de rationnels dans I, convergeant respectivement vers x et y, par passage à la limite dans $|g(x_r)-g(y_r)| \leq \sqrt{|x_r-y_r|}$, on déduit $|g(x)-g(y)| \leq \sqrt{|y-x|}$. Et donc g est continue.

Les fonctions g_r et g étant uniformément continues avec le même module de continuité uniforme, la convergence est uniforme. Ce résultat n'est pas explicitement au programme et en voici donc une démonstration ad hoc.

Soit n dans $\mathbf{N}$ et $(x_i)_{0\leq i\leq n+1}$ la subdivision régulière de I, de pas $1/(n+1)$. Les points de la subdivision sont rationnels. Soit alors x dans I et i dans $[\![1, n+1]\!]$ tel que $x_{i-1} \leq x \leq x_i$. Pour r dans $\mathbf{N}$, il vient

$$|g(x) - g_r(x)| \leq |g(x) - g(x_i)| + |g(x_i) - g_r(x_i)| + |g_r(x_i) - g_r(x)| \leq |g(x_i) - g_r(x_i)| + \frac{2}{\sqrt{n+1}} .$$

Soit alors ε dans $\mathbf{R}_+^*$. On dispose de n dans $\mathbf{N}$ tel que $\dfrac{2}{\sqrt{n+1}} \leq \varepsilon$ et alors on dispose de r_0 dans $\mathbf{N}$ tel que, pour tout i dans $[\![1, n+1]\!]$ et tout r dans $\mathbf{N}$ supérieur à r_0, $|g(x_i) - g_r(x_i)| \leq \varepsilon$. On aura alors, pour $r \geq r_0$, $|g(x) - g_r(x)| \leq 2\varepsilon$ et donc

$$\|g - g_r\|_\infty \leq 2\varepsilon .$$

On en déduit que $\boxed{\text{la suite } (f_{\varphi(r)})_{r\in\mathbf{N}} \text{ converge uniformément sur l'intervalle } I.}$

c. Soit (g_r) une suite à valeurs dans $\mathcal{G}$. Par densité de $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{G}$, on dispose, pour tout r dans $\mathbf{N}$, de f_r dans $\mathcal{F}$ tel que $\|f_r - g_r\|_\infty \leq 2^{-r}$. D'après la question précédente on peut extraire de $(f_r)_{r\in\mathbf{N}}$ une suite convergeant dans $\mathcal{E}$, et donc dans $\mathcal{G}$ puisque l'adhérence de $\mathcal{F}$ est $\mathcal{G}$. Mais alors la même extraction fournit une suite extraite de (g_r) convergeant vers la même limite puisque $(\|f_r - g_r\|_\infty)$ tend vers 0. Il en résulte que, de toute suite à valeurs dans $\mathcal{G}$, on peut extraire une suite convergeant dans $\mathcal{G}$. D'après la caractérisation de Bolzano-Weierstraß des compacts, on en déduit que $\boxed{\mathcal{G} \text{ est compact.}}$