Première composition de mathématiques
TPE 1990 – MP

Le problème consiste à étudier la fonction $X \mapsto L(X)$ où X est un n-uplet de réels $(x_1, \dots, x_n)$ de $[\,-1;1\,]$ vérifiant $x_1 \leq \cdots \leq x_n$, et L est la fonction définie par

$$L(X) = \prod_{1 \leq r < s \leq n} (x_s - x_r) \prod_{1 \leq k \leq n} (1 - x_k^2)^{\frac{3}{4}} .$$

I - Les ensembles E, E' et la fonction L

Soit n un entier supérieur ou égal à 2 et $\mathbf{R}^n$ l'espace euclidien de dimension n. Un élément X de $\mathbf{R}^n$ sera assimilé à la suite de ses coordonnées $(x_1, \dots, x_n)$.
La distance euclidienne entre deux éléments X et X', avec $X = (x_1, \dots, x_n)$ et $X' = (x'_1, \dots, x'_n)$, est donnée par $d(X, X') = \sqrt{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (x'_k - x_k)^2}$. On désigne par E et E' respectivement les parties de $\mathbf{R}^n$ formées des n-uplets $(x_1, \dots, x_n)$ tels que $-1 \leq x_1 \leq \cdots \leq x_n \leq 1$, respectivement $-1 < x_1 < \cdots < x_n < 1$. Ce sont des parties respectivement fermée et ouverte de $\mathbf{R}^n$ et on ne demande pas de démontrer ce fait. Pour X dans E, on pose $L(X) = \displaystyle\prod_{1 \leq r < s \leq n} (x_s - x_r) \prod_{1 \leq k \leq n} (1 - x_k^2)^{\frac{3}{4}}$.

1. Justifier la continuité de L sur E.
2. Déterminer la borne inférieure m de L sur E ainsi qu'une condition nécessaire et suffisante concernant X dans E pour qu'on ait $L(X) = m$.
3. Soit X et Y deux éléments de E' distincts, et Z leur milieu, i.e. $X = (x_1, \dots, x_n)$, $Y = (y_1, \dots, y_n)$ et $Z = (z_1, \dots, z_n)$ avec $\forall k \in [\![1;n]\!]\ z_k = \dfrac{x_k + y_k}{2}$.
   a. Démontrer que Z appartient à E'.
   b. Soit i et j deux entiers vérifiant $1 \leq i < j \leq n$. Calculer en fonction de $x_j - x_i$ et de $y_j - y_i$, la différence $(z_j - z_i)^2 - (x_j - x_i)(y_j - y_i)$. Comparer $(z_j - z_i)^2$ à $(x_j - x_i)(y_j - y_i)$ et préciser si et à quelle condition ces produits peuvent être égaux.
   c. Comparer de même $(1 - z_k)^2$ et $(1 - x_k)(1 - y_k)$. Peuvent-ils être égaux et à quelle condition ?
   d. Effectuer le même travail pour $(1 + z_k)^2$ et $(1 + x_k)(1 + y_k)$.
   e. Trouver une relation d'inégalité entre $L(X)$, $L(Y)$ et $(L(Z))^2$ et préciser si l'inégalité est stricte ou large.

II - Le nombre M et le point A

1. Justifier que L admet et atteint une borne supérieure, notée M, sur E.
2. Démontrer que M est stictement positif et qu'il existe un unique élément A de E' tel que $L(A) = M$.

Dorénavant on désignera par $(a_1, \dots, a_n)$ les coordonnées de cet élément A.

3. Pour p dans $[\![1;n]\!]$ et X dans E', démontrer l'existence de $\dfrac{1}{L(X)} \dfrac{\partial L}{\partial x_p}(X)$ et le calculer en fonction des coordonnées x_k de X.

4. Pour p dans $[\![1;n]\!]$ fixé, on considère l'ensemble des points X de E' dont les coordonnées vérifient $\forall k \in [\![1;n]\!]\ k \neq p \Longrightarrow x_k = a_k$. Pour un tel X on posera alors $L(X) = \lambda(x_p)$.
   a. Que peut-on dire de $\lambda(x_p) - M$ selon qu'on a $x_p = a_p$ ou non ?
   b. Donner la valeur de $\lambda'(a_p)$. On donnera le résultat sous forme d'une relation liant les réels a_k, ce qui fournit lorsque p décrit $[\![1;n]\!]$ un ensemble de n relations liant les a_k.

III - Le polynôme Ω et l'équation différentielle $\mathcal{E}$

On utilise l'élément A défini en partie II. On pose pour t réel et p dans $[\![1;n]\!]$

$$\Omega(t) = \prod_{k=1}^{n}(t-a_k) \qquad \text{et} \quad \Delta_p(t) = \prod_{\substack{1\leq k\leq n \\ k\neq p}}(t-a_k)\ .$$

1. Dans cette question t varie dans un intervalle $\mathcal{I}$ inclus dans $[-1;1]$ contenant a_p et ne contenant aucun autre a_k.
   Exprimer $\dfrac{\Omega''(a_p)}{\Omega'(a_p)}$ en fonction de $\dfrac{\Delta_p'(a_p)}{\Delta_p(a_p)}$. Utiliser ensuite le résultat de II.4 pour en déduire l'existence de deux polynômes α et β premiers entre eux tels que $\alpha(a_p)\Omega''(a_p)+\beta(a_p)\Omega'(a_p) = 0$ et α unitaire.
2. Trouver une constante γ réelle tel que le polynôme Ψ donné par $\Psi = \alpha\Omega'' + \beta\Omega' + \gamma\Omega$ ait un degré strictement inférieur à n.
   Quelle est la valeur de $\Psi(a_p)$? Que peut-on en déduire pour le polynôme Ψ ? Écrire une équation différentielle $(\mathcal{E})$ vérifiée par Ω.
   Que peut-on dire d'un polynôme unitaire Q solution de $(\mathcal{E})$?

IV - Factorisation de Ω, calcul de a_p

1. Transformer l'équation différentielle définie sur $]-1;1[$ par $(t^2-1)y'' + 3ty' - n(n+2)y = 0$ grâce au changement de variable $\theta = \arccos(t)$. En déduire une équation différentielle $(\mathcal{E}')$ vérifiée par u, définie sur $]0;\pi[$ par $u(\theta) = \Omega(\cos(\theta))$.
   On pose $z(\theta) = u(\theta)\sin(\theta)$. Écrire une équation différentielle $(\mathcal{E}'')$ vérifiée par z, z' et z'' sur $]0;\pi[$, puis la résoudre.
2. Écrire de deux façons différentes la limite, quand t tend 1 par valeurs strictement inférieures, de $\sin(\theta(t))\Omega(t)$ avec $\theta(t) = \arccos(t)$.
   En déduire $\Omega(t)$ pour t dans $]-1;1[$ en fonction de θ et d'une constante réelle, que l'on ne cherchera pas à calculer pour l'instant.
3. En utilisant d'une part l'expression que l'on vient de trouver et d'autre part les n racines de Ω, calculer a_p pour p dans $[\![1;n]\!]$.

V - Calcul de $\Omega'(a_p)$

Pour m entier variable supérieur ou égal à 1, on pose $\Phi_m(t) = \dfrac{\sin(m\theta)}{\sin(\theta)}$ avec $t \in\ ]-1;1[$ et $\theta = \arccos(t)$.

1. Trouver une relation linéaire liant $\Phi_m(t)$, $\Phi_{m+1}(t)$ et $\Phi_{m+2}(t)$ dont les coefficients peuvent dépendre de t.
2. Démontrer que Φ_m est une fonction polynomiale. Préciser le degré du polynôme associé ainsi que son coefficient dominant.
3. En déduire l'expression de $\Omega(t)$ pour t dans $]-1;1[$ en fonction de θ et n.
4. Calculer $\Omega'(t)$ pour t dans $]-1;1[$ en fonction de θ et en déduire $\Omega'(a_p)$.

VI - Calcul de T

1. Décomposer sur $\mathbf{C}$ le polynôme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} z^k$ en produit de facteurs du premier degré en z.
2. En déduire, en spécialisant z en une valeur convenable, la valeur de T avec

$$T = \prod_{1\leq p\leq n} \sin^2\left(\frac{p\pi}{n+1}\right) .$$

VII - Calcul de M

On pose $V = \displaystyle\prod_{1\leq q<p\leq n} (a_p - a_q)$ et $W = \displaystyle\prod_{1\leq k\leq n} (1 - a_k^2)$.

1. Calculer en fonction de n et de V les nombres $\displaystyle\prod_{1\leq p<q\leq n} (a_p - a_q)$ et $\displaystyle\prod_{\substack{1\leq p,q\leq n\\ p\neq q}} (a_p - a_q)$.
2. Calculer V^2 en fonction des nombres $\Omega'(a_p)$ pour $1 \leq p \leq n$ et de l'entier n, puis en fonction de n seul.
3. Calculer W en fonction de n.
4. Calculer M.

VIII - Application

Soit $D(\theta_1, \ldots, \theta_n)$ donné par

$$D(\theta_1, \ldots, \theta_n) = \sqrt{\left|\prod_{k=1}^{n} \sin(\theta_k)\right|} \begin{vmatrix} \sin(\theta_1) & \sin(2\theta_1) & \cdots & \sin(n\theta_1) \\ \sin(\theta_2) & \sin(2\theta_2) & \cdots & \sin(n\theta_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sin(\theta_n) & \sin(2\theta_n) & \cdots & \sin(n\theta_n) \end{vmatrix} .$$

1. Justifier que D est bornée sur $\mathbf{R}^n$ et atteint un maximum dans $[-\pi;\pi]^n$, noté Δ.
2. Pour θ_k réel fixé, utiliser le résultat de V.2 pour factoriser partiellement le déterminant apparaissant dans D, l'expression obtenue faisant figurer un déterminant où interviennent les polynômes Φ_k. On pourra poser $x_k = \cos(\theta_k)$.
3. On pose $x_k = \cos(\theta_k)$ et on suppose les θ_k ordonnés de sorte que la suite $(x_k)_{1\leq k\leq n}$ soit croissante.
   a. Écrire $|D|$ en fonction des réels x_k et démontrer que le déterminant qui y figure peut-être simplifié en ajoutant aux colonnes, à partir de la deuxième, des combinaisons linéaires convenables des colonnes précédentes.
   b. En déduire la valeur de Δ en fonction de n.

PREMIÈRE COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES – TPE 1990 – MP

I - Les ensembles E, E' et la fonction L

1. Les fonctions polynomiales sont continues sur $\mathbf{R}^n$ et la fonction $x \mapsto x^{3/4}$ est continue sur $\mathbf{R}_+$. Comme les fonctions polynomiales $X \mapsto 1 - x_k^2$, pour $1 \leq k \leq n$ sont à valeurs positives sur E, il en résulte par composition et produit de fonctions continues, que $\boxed{L \text{ est continu sur } E.}$

2. Par définition de E et E' toutes les fonctions polynomiales $X \mapsto 1 - x_k^2$ et $X \mapsto x_s - x_r$ pour $1 \leq k \leq n$ et $1 \leq r < s \leq n$ sont à valeurs positives sur E, et strictement positives sur E'. Puisque $x \mapsto x^{3/4}$ est positive sur $\mathbf{R}_+$ et strictement positive sur $\mathbf{R}_+^*$, on en déduit que L est positive sur E et strictement positive sur E'. Comme, par définition de E', L est nulle sur $E \setminus E'$, il vient $\boxed{m = 0 \text{ et } \forall X \in E\ L(X) = m \iff X \notin E'.}$

3. a. On pose $x_0 = y_0 = -1$ et $x_{n+1} = y_{n+1} = 1$. Avec ces notations il vient pour tout entier k dans $[\![1; n]\!]$, $x_{k-1} < x_k < x_{k+1}$ et $y_{k-1} < y_k < y_{k+1}$ et donc, par addition de ces inégalités et puisque $\frac{1}{2}$ est strictement positif, $z_{k-1} < z_k < z_{k+1}$, i.e. $\boxed{Z \text{ appartient à } E'.}$

   b. Pour u et v réels on a $\frac{1}{4}(u+v)^2 - uv = \frac{1}{4}(u-v)^2$. En l'appliquant à $u = x_j - x_i$ et $v = y_j - y_i$, il vient $\boxed{(z_j - z_i)^2 - (x_j - x_i)(y_j - y_i) = \frac{1}{4}((x_j - x_i) - (y_j - y_i))^2.}$ On en déduit $\boxed{(z_j - z_i)^2 \geq (x_j - x_i)(y_j - y_i) \text{ avec égalité si et seulement si } x_j - x_i = y_j - y_i.}$

   c. En posant $x_{n+1} = y_{n+1} = 1$ on se ramène au cas précédent avec $(i, j) = (k, n+1)$. On en déduit $\boxed{(1 - z_k)^2 \geq (1 - x_k)(1 - y_k) \text{ avec égalité si et seulement si } x_k = y_k.}$

   d. En posant $x_0 = y_0 = -1$ on se ramène au cas précédent avec $(i, j) = (0, k)$. On en déduit $\boxed{(1 + z_k)^2 \geq (1 + x_k)(1 + y_k) \text{ avec égalité si et seulement si } x_k = y_k.}$

   e. Toutes les quantités intervenant dans les inégalités des trois questions précédentes étant strictement positives puisque X et Y sont dans E', il vient par croissance stricte de $x \mapsto x^{3/4}$ sur $\mathbf{R}_+$, $L(X)L(Y) \leq (L(Z))^2$ avec égalité si et seulement si toutes les inégalités sont des égalités, i.e. $X = Y$. Comme on a supposé X et Y distincts, il vient $\boxed{L(X)L(Y) < (L(Z))^2.}$

II - Le nombre M et le point A

1. Le segment $[-1; 1]$ étant compact dans $\mathbf{R}$, il en va de même par produit de $[-1; 1]^n$. Comme $\mathbf{R}_+$ est fermé, il en va de même de son image réciproque par les fonctions $X \mapsto x_{k+1} - x_k$ pour $1 \leq k < n$, $X \mapsto x_1 + 1$ et $X \mapsto 1 - x_n$. En tant qu'intersection de fermés avec un compact, E est donc compact. La continuité de L, obtenue en question I.1, jointe au théorème de WEIERSTRASS permet d'affirmer que $\boxed{L \text{ admet et atteint une borne supérieure sur } E.}$

2. Comme L s'annule exactement en dehors de E' et que E' est non vide, L prend des valeurs strictement positives et donc $\boxed{M > 0.}$ On en déduit que les points où L atteint son maximum sont des points de E'. Si X et Y sont deux tels points, la question I.3.3e montre qu'on a $X = Y$ et ainsi $\boxed{L \text{ atteint son maximum en un unique point appartenant à } E'.}$

3. Les fonctions polynomiales sont de classe C^∞ sur $\mathbf{R}^n$ et la fonction $x \mapsto x^{3/4}$ est de classe C^∞ sur $\mathbf{R}_+^*$, il en résulte que L est de classe C^∞ sur E'. Comme de plus L ne s'annule pas

sur E', $\boxed{\dfrac{1}{L(X)}\dfrac{\partial L}{\partial x_p}(X) \text{ est bien défini.}}$ De plus cette fonction est la dérivée logarithmique de L par rapport à la variable x_p. On en déduit $\boxed{\dfrac{1}{L(X)}\dfrac{\partial L}{\partial x_p}(X) = \displaystyle\sum_{\substack{1\leq r\leq n\\ r\neq p}} \dfrac{1}{x_p - x_r} - \dfrac{3}{2}\dfrac{x_p}{1-x_p^2}.}$

4. a. Puisque L atteint son maximum uniquement en A, on a
$\boxed{\lambda(x_p) - M = 0 \text{ si } x_p = a_p \text{ et } \lambda(x_ip) - M < 0 \text{ sinon.}}$

   b. La fonction λ est définie sur l'intervalle ouvert $]x_{p-1}; x_{p+1}[$ en convenant $x_{p-1} = -1$ et $x_{p+1} = 1$. Elle atteint donc un maximum en un point d'annulation de sa dérivée, i.e. $\boxed{\lambda'(a_p) = 0,}$ soit, en utilisant la question précédente $\boxed{\displaystyle\sum_{\substack{1\leq r\leq n\\ r\neq p}} \dfrac{1}{a_p - a_r} = \dfrac{3}{2}\dfrac{a_p}{1-a_p^2}.}$

III - Le polynôme Ω et l'équation différentielle $\mathcal{E}$

1. Les fonctions Ω et Δ_p sont polynomiales et pour t dans $\mathcal{I}$ on a $\Omega(t) = (t - a_p)\Delta_p(t)$. En égalisant les développements limités à l'ordre 2 obtenus par la formule de Taylor-Young à l'ordre 2 pour Ω et à l'ordre 1 pour Δ_p, on conclut $\Omega'(a_p) = \Delta_p(a_p)$ et $\Omega''(a_p) = 2\Delta_p'(a_p)$. Comme A est dans E', les a_j sont tous distincts et donc $\Delta_p(a_p)$ est non nul. Il en va donc de même pour $\Omega'(a_p)$ et il vient $\boxed{\dfrac{\Omega''(a_p)}{\Omega'(a_p)} = 2\dfrac{\Delta_p'(a_p)}{\Delta_p(a_p)}.}$

   D'après la question II.4 le membre de droite est égal à $3\dfrac{a_p}{1-a_p^2}$ et on en conclut $(1-a_p^2)\Omega''(a_p) - 3a_p\Omega'(a_p) = 0$. Autrement dit en posant $\alpha = T^2 - 1$ et $\beta = 3T$, et en remarquant que $\frac{1}{3}T\beta - \alpha = 1$ est une relation de Bézout entre α et β, on conclut que
   $\boxed{\alpha \text{ et } \beta \text{ sont premiers entre eux, avec } \alpha \text{ unitaire, et tels que } \alpha(a_p)\Omega''(a_p) + \beta(a_p)\Omega'(a_p) = 0.}$

2. Soit γ un réel. Le coefficient de degré n de $\alpha\Omega'' + \beta\Omega' + \gamma\Omega$ est $n(n-1) + 3n + \gamma$ fois celui de Ω. Comme par ailleurs les degrés de Ω, $\beta\Omega'$ et $\alpha\Omega''$ sont tous inférieurs à n, on en déduit que pour $\gamma = -n(n+2)$ et $\Psi = \alpha\Omega'' + \beta\Omega' + \gamma\Omega$, $\boxed{\deg(\Psi) < n.}$ Puisque $\Omega(a_p)$ est nul, $\boxed{\Psi(a_p).}$
   Les polynômes α et β ainsi que la constante γ ne dépendent pas de p. Il en résulte que Ψ est un polynôme de degré au plus $n-1$ et qu'il s'annule en chacun des a_j, donc au moins n fois. Il vient $\boxed{\Psi = 0}$ et Ω est solution de l'équation différentielle $\boxed{(\mathcal{E})\ \ (t^2-1)y''(t) + 3ty' - n(n+2)y = 0.}$
   Enfin, si Q est un polynôme unitaire solution de cette équation, en notant d son degré, le coefficient de degré d de
   $$(T^2-1)Q'' + 3TQ' - n(n+2)Q$$
   est $d(d+2) - n(n+2)$, i.e. $(d-n)(d+n+2)$. On en déduit que Q est de degré d. S'il est distinct de Ψ alors le polynôme unitaire proportionnel à $Q - \Psi$ est solution de $(\mathcal{E})$, par linéarité de cette équation différentielle, et donc de degré n. Comme $Q - \Psi$ est une différence de deux polynômes unitaires de degré n, il est de degré strictement inférieur et cette constradiction assure $P = \Psi$. La réciproque étant vraie par définition de $(\mathcal{E})$, on a $\boxed{Q = \Psi.}$

IV - Factorisation de Ω, calcul de a_p

1. On étudie sur $]0;\pi[$ la fonction donnée par $v = y\circ\cos$. Puisque la dérivée de cos ne s'annule pas sur cette intervalle, y est de classe C^2 sur $]-1;1[$ si et seulement si v l'est sur $]0;\pi[$. Dans ce cas on a $v' = -\sin y'\circ\cos$ et $v'' = -\cos y'\circ\cos + \sin^2 y''\circ\cos$ et donc
$$-\sin^2 y''\circ\cos + 3\cos y'\circ\cos - n(n+2)y\circ\cos = -v'' - 2\cot v' - n(n+2)v\ .$$
Il en résulte que y est solution de $(t^2-1)y'' + 3ty' - n(n+2)y = 0$ sur $]-1;1[$ si et seulement si $y\circ\cos$ est solution de $(\mathcal{E}')$, donnée par $v'' + 2\cot v' + n(n+2)v = 0$, sur $]0;\pi[$. Il résulte de la partie précédente qu'on a $\boxed{u'' + 2\cot u' + n(n+2)u = 0 \text{ sur }]0;\pi[.}$
On a $z' = u'\sin + u\cos$ et $z'' = u''\sin + 2u'\cos - u\sin$. Puisque sin ne s'annule pas sur $]0;\pi[$, u y est solution de $(\mathcal{E}')$ si et seulement si z y est solution de $y'' + (n+1)^2y = 0$. En posant $(\mathcal{E}'')$ l'équation $y'' + (n+1)^2y = 0$, on remarque qu'on a affaire à une équation différentielle linéaire à coefficients constants. Ainsi toute solution de cette équation différentielle est de classe C^∞ et ses dérivées sont également solutions de celle-ci. Ainsi $\boxed{z,\ z' \text{ et } z'' \text{ sont solutions de } y'' + (n+1)^2y = 0 \text{ sur }]0;\pi[.}$ Les solutions de cette équation sont de la forme $\boxed{a\sin((n+1)\theta) + b\cos((n+1)\theta)) \text{ avec } a \text{ et } b \text{ réels.}}$

2. Lorsque t tend vers 1 par valeurs strictement inférieures, $\theta(t)$ tend vers 0 par valeurs strictement supérieures et donc $\sin(\theta(t))$ tend vers 0. Comme Ω est polynomial, il en résulte que $\sin(\theta(t))\Omega(t)$ tend alors vers 0. Avec les notations de la question précédente, par continuité du sinus, cette limite est également b : $\boxed{\lim_{1^-}\sin(\theta(t))\Omega(t) = b = 0.}$ On en déduit
$$\boxed{\Omega(t) = a\frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin(\theta)}, \text{ avec } a \text{ réel.}}$$

3. Les n racines de Ω sont par construction les coordonnées de A. Comme l'expression précédente s'annule pour $\theta = k\dfrac{\pi}{n+1}$ avec $1\le k\le n+1$, on en déduit que Ω s'annulle en les $\cos\left(k\dfrac{\pi}{n+1}\right)$ avec $1\le k\le n+1$. Par cardinalité et puisque les coordonnées de A sont rangées par ordre croissant, il vient $a_p = \cos\left((n+1-p)\dfrac{\pi}{n+1}\right)$ ou encore
$$\boxed{a_p = -\cos\left(\frac{p\pi}{n+1}\right) \text{ pour } p \text{ dans } [\![1;n]\!].}$$

V - Calcul de $\Omega'(a_p)$

1. Pour x et a réels on a $\sin((a\pm1)x)\sin(ax)\cos(x) \pm \sin(x)\cos(ax)$ et donc $\sin((a+1)x) + \sin((a-1)x) = 2\sin(ax)\cos(x)$. Il en résulte $\boxed{\Phi_{m+2}(t) - 2t\Phi_{m+1}(t) + \Phi_m(t) = 0.}$

2. Par définition on a $\Phi_1 = 1$ et $\Phi_2(t) = 2\cos(\theta) = 2t$, de sorte que Φ_1 et Φ_2 sont polynomiaux associés respectivement à 1 et $2T$. La question précédente permet d'en déduire par une récurrence immédiate que $\boxed{\Phi_m \text{ est une fonction polynomiale}}$ et le polynôme associé à Φ_m est $\boxed{\text{de degré } m-1 \text{ et de coefficient dominant } 2^{m-1}.}$

3. Par définition et d'après la partie précédente, on a $\Omega(t) = a\Phi_{n+1}(t)$ pour t dans $]-1;1[$, avec a réel. Comme Ω est unitaire, on en déduit $a = 2^{-n}$ et donc $\boxed{\Omega(t) = \dfrac{\sin((n+1)\theta)}{2^n \sin(\theta)}.}$

4. On a, sur $]0;\pi[$, $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\dfrac{\sin((n+1)x)}{\sin(x)} = \dfrac{(n+1)\sin(x)\cos((n+1)x) - \sin((n+1)x)\cos(x)}{\sin^2(x)}$ et donc, puisque $\theta'(t) = -\dfrac{1}{\sin(\theta)}$, $\boxed{\Omega'(t) = \dfrac{\sin((n+1)\theta)\cos(\theta) - (n+1)\sin(\theta)\cos((n+1)\theta)}{2^n\sin^3(\theta)}.}$

Pour $t = a_p$, on a $\theta = \dfrac{(n+1-p)\pi}{n+1}$, $\sin((n+1)\theta) = 0$, $\cos((n+1)\theta) = (-1)^{n+1-p}$ et il vient $\boxed{\Omega'(a_p) = (-1)^{n-p}\dfrac{n+1}{2^n}\sin^{-2}\left(\dfrac{p\pi}{n+1}\right).}$

VI - Calcul de T

1. Pour x dans $\mathbf{C}$ distinct de 1, on a $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}$ et donc les racines $n+1^{\text{e}}$ de l'unité non triviales sont racines de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} z^k$. Comme on a affaire à un polynôme de degré n unitaire et qu'on a trouvé n racines distinctes, il vient $\boxed{\displaystyle\sum_{k=0}^{n} z^k = \prod_{p=1}^{n}(z - e^{2ip\pi/(n+1)}).}$

2. On a $1 - e^{2ip\pi/(n+1)} = -2ie^{ip\pi/(n+1)}\sin\left(\dfrac{p\pi}{n+1}\right)$, en utilisant l'arc moitié et la formule d'Euler et donc, en spécialisant en 1, il vient $n+1 = (-2i)^n e^{in\pi/2}\displaystyle\prod_{1\leq p\leq n}\sin\left(\frac{p\pi}{n+1}\right)$, soit, en élevant au carré $(n+1)^2 = 2^{2n}T$, i.e. $\boxed{T = 2^{-2n}(n+1)^2.}$

VII - Calcul de M

1. Puisqu'il y a $\binom{n}{2}$ couples dans le produit V, on a $\boxed{\displaystyle\prod_{1\leq p<q\leq n}(a_p - a_q) = (-1)^{n(n-1)/2}V}$ et $\boxed{\displaystyle\prod_{\substack{1\leq p,q\leq n\\ p\neq q}}(a_p - a_q) = (-1)^{n(n-1)/2}V^2.}$

2. Avec les notations de la partie III, pour p dans $[\![1;n]\!]$, on a $\displaystyle\prod_{\substack{1\leq q\leq n\\ q\neq p}}(a_p - a_q) = \Delta_p(a_p) = \Omega'(a_p)$ et il résulte de la question précédente $\boxed{\displaystyle V^2 = (-1)^{n(n-1)/2}\prod_{p=1}^{n}\Omega'(a_p).}$ Il résulte des deux parties précédentes que le produit précédent est égal à $(-1)^{n(n-1)/2}(n+1)^n 2^{-n^2}T^{-1}$ soit $(-1)^{n(n-1)/2}(n+1)^n 2^{-n(n-2)}(n+1)^{-2}$. Il en résulte $\boxed{V^2 = 2^{-n(n-2)}(n+1)^{n-2}.}$

3. En utilisant la question IV.3, il vient $W = T$ et donc $\boxed{W = 2^{-2n}(n+1)^2.}$

4. Par définition on a $M = L(A) = VW^{\frac{3}{4}}$. Comme V est positif, les deux questions précédentes fournissent $\boxed{M = \sqrt{\dfrac{n+1}{2^n}}^{\,n+1}.}$

VIII - Application

1. Puisque la fonction sin est continue, le déterminant dans la définition de D est continu sur $\mathbf{R}^n$. La fonction $x \mapsto \sqrt{|x|}$ étant continue sur $\mathbf{R}$, l'autre terme est également continu et donc D est continu sur $\mathbf{R}^n$. Par périodicité de sin on a $D(\mathbf{R}^n) = D([\,-\pi;\pi\,]^n)$. Or l'intervalle $[\,-\pi;\pi\,]$ est compact dans $\mathbf{R}$, donc $[\,-\pi;\pi\,]^n$ est également compact. Il résulte alors du théorème de WEIERSTRASS que $\boxed{D \text{ est bornée sur } \mathbf{R}^n \text{ et atteint un maximum dans } [\,-\pi;\pi\,]^n.}$

2. Soit θ_k réel tel que $\sin(\theta_k) \neq 0$ et n supérieur ou égal à 1. On pose $x_k = \cos(\theta_k)$ de sorte qu'en utilisant les notations de la partie V, le déterminant apparaissant dans D est égal à

$$\boxed{\sin(\theta_k)\begin{vmatrix} \sin(\theta_1) & \sin(2\theta_1) & \cdots & \sin(n\theta_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Phi_1(x_k) & \Phi_2(x_k) & \cdots & \Phi_n(x_k) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sin(\theta_n) & \sin(2\theta_n) & \cdots & \sin(n\theta_n) \end{vmatrix}.}$$

3. a. En utilisant ce qui précède on a $|D(\theta_1,\ldots,\theta_n)| = \left|\prod_{k=1}^{n}\sin(\theta_k)\right|^{\frac{3}{2}} |\det((\Phi_j(x_i))_{1\le i,j\le n})|$ et donc $\boxed{|D(\theta_1,\ldots,\theta_n)| = \prod_{k=1}^{n}(1-x_k^2)^{\frac{3}{4}} |\det((\Phi_j(x_i))_{1\le i,j\le n})|.}$

Comme la famille $(\Phi_1,\ldots,\Phi_n)$ est échelonnée en degré, avec des degrés de 0 à $n-1$, elle forme une base de $\mathbf{R}_{n-1}[T]$, et pour $1 \le k \le n$, Φ_k est une combinaison linéaire de X^k et des Φ_j pour $j < k$. Le coefficient de X^k est le coefficient dominant de Φ_k et donc d'après la question V.2, il vient par multilinéarité du déterminant

$$\det((\Phi_j(x_i))_{1\le i,j\le n}) = 2^{n(n-1)/2}\det((x_i^j)_{1\le i,j\le n})\ ,$$

soit, en reconnaissant un déterminant de VANDERMONDE,

$\boxed{|D(\theta_1,\ldots,\theta_n)| = 2^{n(n-1)/2}L(x_1,\ldots,x_n).}$

b. La fonction D étant impaire en fonction de θ_1, son maximum est aussi le maximum de sa valeur absolue. Puisque le déterminant est alterné, le maximum de cette valeur absolue est atteint en point où la suite $(\cos(\theta_k))_{1\le k\le n}$ est croissante. Il résulte de l'étude précédente qu'on a $\Delta = 2^{n(n-1)/2}M$, i.e. $\boxed{\Delta = \dfrac{\sqrt{n+1}^{\,n+1}}{2^n}.}$