ÉCOLE POLYTECHNIQUE FILIÈRE MP

CONCOURS D'ADMISSION 2004

DEUXIÈME COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée : 4 heures)

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve.

⋆⋆⋆

Courbures des surfaces dans l'espace $\mathbb{R}^3$

Ce problème propose une étude des surfaces de l'espace $\mathbb{R}^3$ et de leurs courbures totale et moyenne. Pour tout entier $n > 0$, l'espace $\mathbb{R}^n$ sera muni de son produit scalaire et de sa norme usuels notés respectivement $(\cdot \mid \cdot)$ et $\|\cdot\|$. La première partie est consacrée à des préliminaires algébriques.

Première partie

1. Soient $x^{(1)}$, …, $x^{(n)}$ des éléments de $\mathbb{R}^{n+1}$, $\left(x_j^{(i)}\right)_{j=1,\dots,n+1}$ les composantes de $x^{(i)}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^{n+1}$. Pour tout $k = 1, \cdots, n+1$ on note V_k le produit par $(-1)^{k+1}$ du déterminant de la matrice $\left(x_j^{(i)}\right)$ où $i = 1, \cdots, n$ et $j = 1, \cdots, k-1, k+1, \cdots, n+1$. On note V le vecteur de $\mathbb{R}^{n+1}$ de composantes V_k.

a) Montrer que V est orthogonal à tous les $x^{(i)}$.

b) Comparer les conditions suivantes :

i) $V = 0$

ii) la famille $\left(x^{(i)}\right)_{i=1,\cdots,n}$ est liée.

c) Exprimer en fonction de $\|V\|$ le déterminant des $n+1$ vecteurs V, $x^{(1)}$, …, $x^{(n)}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^{n+1}$.

2. **a)** Montrer que, pour tout n-uple de vecteurs $\left(x^{(1)}, \cdots, x^{(n)}\right)$ linéairement indépendants, il existe un unique vecteur $W\left(x^{(1)}, \cdots, x^{(n)}\right)$ ayant les propriétés suivantes

i) $W\left(x^{(1)}, \cdots, x^{(n)}\right)$ est de norme 1 et orthogonal à tous les $x^{(i)}$

ii) le déterminant des $n+1$ vecteurs $W\left(x^{(1)}, \cdots, x^{(n)}\right)$, $x^{(1)}$, …, $x^{(n)}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^{n+1}$ est strictement positif.

b) Vérifier que, pour toute rotation R de $\mathbb{R}^{n+1}$, on a
$$W\left(R(x^{(1)}), \dots, R(x^{(n)})\right) = R\left(W\left(x^{(1)}, \cdots, x^{(n)}\right)\right).$$

3. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de $\mathbb{R}^n$, Q la matrice de coefficients $q_{i,j} = (e_i \mid e_j)$.

a) Montrer que Q est inversible et diagonalisable. Que peut-on dire de ses valeurs propres ?

b) Soit v un vecteur de $\mathbb{R}^n$, de coordonnées v_i dans la base $(e_1, \dots, e_n)$. Exprimer le vecteur ligne $(v_1, \dots, v_n)$ en fonction de Q et du vecteur ligne $((v \mid e_1), \dots, (v \mid e_n))$.

Dans la suite du problème, on désigne par U une partie ouverte de $\mathbb{R}^n$, par $u = (u_1, \dots, u_n)$ un élément quelconque de U, par F une application de classe $\mathcal{C}^2$ de U dans $\mathbb{R}^{n+1}$, par $\partial_i F$ (resp. $\partial_i\partial_j F$) ses dérivées partielles d'ordre 1 (resp. 2). On suppose que les n vecteurs $(\partial_i F)(u)$ sont linéairement indépendants pour tout u, et on pose $W(u) = W\left((\partial_1 F)(u), \dots, (\partial_n F)(u)\right)$.

4. **a)** Vérifier que l'application $u \mapsto W(u)$ est de classe $\mathcal{C}^1$.

b) Comparer $((\partial_k W)(u) \mid (\partial_i F)(u))$ et $(W(u) \mid (\partial_i\partial_k F)(u))$.

c) Démontrer l'existence et l'unicité de nombres réels $a_{i,j}(u)$ tels que l'on ait
$$(\partial_i W)(u) = \sum_j a_{i,j}(u)(\partial_j F)(u).$$

d) On note respectivement $A(u)$, $S(u)$, $Q(u)$ les matrices de coefficients respectifs $a_{i,j}(u)$, $(W(u) \mid \partial_i\partial_j F)(u))$, $((\partial_i F)(u) \mid (\partial_j(F)(u)))$. Vérifier que $A(u) = -S(u)Q(u)^{-1}$.

Deuxième partie

Dans toute la suite du problème, on suppose $n = 2$; on a donc un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ et une application F de classe $\mathcal{C}^2$ de U dans $\mathbb{R}^3$ telle que les vecteurs $(\partial_1 F)(u)$ et $(\partial_2 F)(u)$ soient linéairement indépendants pour tout u de U. On a en outre

$$W(u) = \frac{(\partial_1 F)(u) \wedge (\partial_2 F)(u)}{\|(\partial_1 F)(u) \wedge (\partial_2 F)(u)\|}$$

où $\cdot \wedge \cdot$ désigne le produit vectoriel dans $\mathbb{R}^3$. On pose

$$K(u) = \det A(u),\ H(u) = \frac{1}{2} \operatorname{tr}(A(u))$$

où $A(u)$ est la matrice définie à la question **4.d)**. On note $F_i(u)$, $i = 1, 2, 3$, les composantes de $F(u)$; on suppose que U contient le point 0 et on fait l'étude de la surface $F(U)$ au voisinage du point $F(0)$.

5. Soit R une rotation de $\mathbb{R}^3$. Montrer que les objets $\hat{K}(0)$ et $\hat{H}(0)$ associés à l'application $\hat{F} = R \circ F$ sont égaux respectivement à $K(0)$ et $H(0)$.

6. On suppose que, pour u suffisamment voisin de 0, $F(u)$ est de la forme

$$F(u) = (u_1, u_2, f(u_1, u_2))$$

avec $f(0) = (\partial_1 f)(0) = (\partial_2 f)(0) = 0$.

a) Calculer $K(0)$ et $H(0)$ en fonction des nombres

$$r = (\partial_1\partial_1 f)(0),\ s = (\partial_1\partial_2 f)(0),\ t = (\partial_2\partial_2 f)(0).$$

b) (Cas d'un cylindre) On suppose que $f(u_1, u_2)$ est fonction de u_1 seul, soit $f(u_1, u_2) = g(u_1)$. Exprimer $H(0)$ en fonction de la courbure de la courbe Γ, intersection du cylindre avec le plan $x_2 = 0$.

7. Dans cette question, on considère le cas d'une surface de révolution :

$$F(u) = (f(u_1)\cos u_2, f(u_1)\sin u_2, u_1)$$

où f est une fonction strictement positive de classe $\mathcal{C}^2$ définie sur un intervalle I.

a) Dire pour quelles valeurs de u les vecteurs $(\partial_1 F)(u)$ et $(\partial_2 F)(u)$ sont linéairement indépendants.

b) Vérifier que

$$A(u) = f(u_1)^{-1}\left(1 + f'(u_1)^2\right)^{-3/2} \begin{pmatrix} f(u_1)f''(u_1) & 0 \\ 0 & -\left(1 + f'(u_1)\right)^2 \end{pmatrix}.$$

c) Donner une fonction f élémentaire pour laquelle $H(u)$ est nul pour tout u.

d) Montrer que, pour tous nombres réels α et β, $\alpha > 0$, il existe f satisfaisant

$$H(u) = 0 \text{ pour tout } u,\ f(0) = \alpha,\ f'(0) = \beta.$$

Interpréter géométriquement le résultat obtenu.

e) Calculer $K(u)$ pour une telle fonction f.

8. Indiquer, sans aucun calcul, des surfaces pour lesquelles $K(u)$ et $H(u)$ sont des constantes.

Troisième partie

Dans cette partie, on se propose d'étudier l'effet d'un changement de paramétrage sur les fonctions H et K. Dans la situation du début de la deuxième partie on note $\dfrac{\partial F}{\partial u}$ la matrice (jacobienne) de coefficients $\left(\dfrac{\partial F}{\partial u}\right)_{i,j} = \partial_j F_i$. Notation analogue pour $\dfrac{\partial W}{\partial u}$.

9. Vérifier que $\dfrac{\partial W}{\partial u} = \dfrac{\partial F}{\partial u}\,{}^t\!A(u)$.

On se donne maintenant un difféomorphisme Φ de U sur un autre ouvert $\tilde{U}$ de $\mathbb{R}^2$ et on pose $\Psi = \Phi^{-1}$. Pour tout $u \in U$ on écrira aussi $\tilde{u} = \Phi(u)$; on pose $\tilde{F}(\tilde{u}) = F(u)$, c'est-à-dire $\tilde{F} = F \circ \Psi$, et on note $\tilde{W}(\tilde{u})$, $\tilde{A}(\tilde{u})$, $\tilde{K}(\tilde{u})$, $\tilde{H}(\tilde{u})$ les objets définis à partir de $\tilde{F}$ et $\tilde{u}$ comme $W(u)$, $A(u)$, $K(u)$, $H(u)$ l'ont été à partir de F et u. On suppose U connexe par arcs.

10. **a)** Exprimer $\dfrac{\partial \tilde{F}}{\partial \tilde{u}}$ en fonction de $\dfrac{\partial F}{\partial u}$ et $\dfrac{\partial \Psi}{\partial \tilde{u}}$, puis $(\partial_1 \tilde{F})(\tilde{u}) \wedge (\partial_2 \tilde{F})(\tilde{u})$ en fonction de $(\partial_1 F)(u) \wedge (\partial_2 F)(u)$ et $\det \dfrac{\partial \Psi}{\partial \tilde{u}}$.

b) Montrer qu'il existe $\varepsilon \in \{1, -1\}$ tel que l'on ait $\tilde{W}(\tilde{u}) = \varepsilon W(u)$ pour tout $u \in U$.

c) Exprimer $\tilde{A}(\tilde{u})$ en fonction de ε, $A(u)$ et $\dfrac{\partial \Psi}{\partial \tilde{u}}$.

d) Comparer $\tilde{H}(\tilde{u})$ et $H(u)$, $\tilde{K}(\tilde{u})$ et $K(u)$.

PARTIE I

1)

1.a) Soit $x^{(0)}$ un vecteur de $\mathbf{R}^{n+1}$ et $(x_j^{(0)})_{1\leq j\leq n+1}$ ses composantes dans la base canonique et A la matrice $(x_j^{(i-1)})_{1\leq i,j\leq n+1}$. D'après la formule de développement par rapport à la première ligne de A, on a $\det(A) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{k+1}x_k^{(0)}V_k = \left\langle x^{(0)} \,\middle|\, V\right\rangle$.
Si $x^{(0)}$ est l'un des $x^{(i)}$ alors A a deux lignes identiques et donc son déterminant est nul. Il en résulte que $\boxed{V \text{ est orthogonal à tous les } x^{(i)}.}$

1.b) Puisqu'un produit scalaire est défini V est nul si et seulement s'il appartient à l'orthogonal de $\mathbf{R}^{n+1}$, i.e. d'après ce qui précède, si et seulement si le déterminant de A est nul pour tout choix de vecteur $x^{(0)}$, i.e. d'après le théorème de la base incomplète, si et seulement si la famille $(x^{(i)})_{1\leq i\leq n}$ est liée. Donc $\boxed{(i) \text{ et } (ii) \text{ sont équivalents.}}$

1.c) D'après le résultat de a), le déterminant cherché est égal à $\langle V\,|\,V\rangle$, i.e.
$\boxed{\det(V, x^{(1)}, \ldots, x^{(n)}) = \|V\|^2.}$

2)

2.a) Si la famille $(x^{(1)}, \ldots, x^{(n)})$ est libre alors elle engendre un hyperplan de $\mathbf{R}^{n+1}$ et donc son orthogonal est de dimension 1. Il est donc nécessaire que $W(x^{(1)}, \ldots, x^{(n)})$ soit un multiple de V, disons λV pour λ réel. Alors les autres conditions s'écrivent $\lambda^2\|V\|^2 = 1$ et $\langle \lambda V\,|\,V\rangle > 0$, i.e. puisque $V \neq 0$, $\lambda > 0$ et $\lambda^2 = 1/\|V\|^2$, soit $\lambda = 1/\|V\|$. Il en résulte que

$$\boxed{\frac{1}{\|V\|}V \text{ est l'unique vecteur ayant les propriétés } (i) \text{ et } (ii).}$$

2.b) Puisque R est une isométrie $R(W(x^{(1)}, \ldots, x^{(n)})$ est de norme 1 et est orthogonal à tous les $R(x^{(i)})$. Puisque c'est une isométrie positive, on a

$$\det(R(W(x^{(1)}, \ldots, x^{(n)})), R(x^{(1)}), \ldots, R(x^{(n)})) = \det(W(x^{(1)}, \ldots, x^{(n)}), x^{(1)}, \ldots, x^{(n)}) > 0$$

et donc, par unicité, il vient

$$\boxed{W(R(x^{(1)}), \ldots, R(x^{(n)})) = R(W(x^{(1)}, \ldots, x^{(n)})).}$$

3)

3.a) Par symétrie du produit scalaire, Q est symétrique réelle et donc diagonalisable. Pour X un vecteur colonne donné par $X = (x_i)_{1\leq i\leq n}$, on a ${}^{\mathrm{t}}XQX = \|x\|^2$ où $x = x_1e_1 + \cdots + x_ne_n$. Puisque $(e_1, \cdots, e_n)$ est une base et que le produit scalaire est défini positif, ${}^{\mathrm{t}}XQX$ est donc strictement positif sauf si $X = 0$ auquel cas cette quantité est nulle, i.e. Q est définie positive. Elle est donc inversible et son spectre est formé de réels strictement positifs :

$\boxed{Q \text{ est diagonalisable, inversible et son spectre est inclus dans } \mathbf{R}_+^*.}$

3.b) Pour x et y dans $\mathbf{R}^n$, avec $x = x_1e_1 + \cdots + x_ne_n$ et $y = y_1e_1 + \cdots + y_ne_n$, on a $\langle x\,|\,y\rangle = (x_1, \ldots, x_n)Q\,{}^{\mathrm{t}}(y_1, \ldots, y_n)$ et donc, en particulier, $\langle v\,|\,e_i\rangle$ est égal au produit de $(v_1, \ldots, v_n)Q$ avec la matrice colonne ayant comme seul terme non nul le i-ème terme, qui vaut 1. Le vecteur ligne $(\langle v\,|\,e_1\rangle, \ldots, \langle v\,|\,e_n\rangle)$ est donc égal, d'après la définition du produit matriciel, au produit de $(v_1, \ldots, v_n)Q$ avec la matrice identité. Il en résulte $\boxed{(\langle v\,|\,e_1\rangle, \ldots, \langle v\,|\,e_n\rangle) = (v_1, \ldots, v_n)Q.}$

4)

4.a) L'application V est polynomiale en les coordonnées des $x^{(i)}$ et est donc de classe C^∞ sur $(\mathbf{R}^{n+1})^n$. Comme F est de classe C^2 sur U, ses dérivées partielles sont de classe C^1. Enfin la norme est de classe C^∞ sur $\mathbf{R}^{n+1}\setminus\{0\}$ donc, par composition et puisque $\mathrm{d}F$ est à valeurs dans les applications linéaires de rang n, $\boxed{u \mapsto W(u) \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } U.}$

4.b) Par définition, sur U, on a $\langle W \mid \partial_i F\rangle = 0$. En considérant la dérivée partielle par rapport à la k-ème coordonnée il vient $\langle \partial_k W \mid \partial_i F\rangle = -\langle W \mid \partial_k\partial_i F\rangle$ et donc, d'après le théorème de Schwarz, pour u dans U, $\boxed{\langle \partial_k W(u) \mid \partial_i F(u)\rangle = -\langle W(u) \mid \partial_i\partial_k F(u)\rangle.}$

4.c) Puisque W est à valeurs dans les vecteurs de norme 1, sa différentielle vérifie, pour tout u dans U, $\mathrm{d}W(u)$ est à valeurs dans l'orthogonal de $W(u)$, i.e. dans l'espace des combinaisons linéaires de $(\partial_i F(u))_{1\leq i\leq n}$. Comme cette famille est libre il existe donc des réels uniques $(a_{i,j}(u))_{1\leq i,j\leq n}$ tels que $\boxed{\partial_i W(u) = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}(u)\partial_j F(u).}$

4.d) Pour u dans U, on pose $e_i = \partial_i F(u)$ et donc, par hypothèse, $(e_1 \dots, e_n)$ est une base d'un hyperplan de $\mathbf{R}^{n+1}$, que l'on peut identifier à $\mathbf{R}^n$. On le munit de la structure euclidienne donnée par le produit scalaire canonique de $\mathbf{R}^{n+1}$ par restriction.

On applique alors le résultat de 3b) au vecteur $\partial_i W(u)$ qui, d'après 4c), appartient à cet hyperplan. Le vecteur ligne $(\langle \partial_i W(u) \mid \partial_1 F(u)\rangle, \dots, \langle \partial_i W(u) \mid \partial_n F(u)\rangle$ est donc égal à $(a_{i,1}(u), \dots, a_{i,n}(u))Q(u)$ et donc en considérant les n vecteurs lignes obtenus pour $1 \leq i \leq n$, il vient en utilisant 4b) et le théorème de Schwarz, $-S(u) = A(u)Q(u)$. Comme $Q(u)$ est inversible d'après 3a),

$\boxed{A(u) = -S(u)Q(u)^{-1}.}$

PARTIE II

5) Puisque R est linéaire, on a $\partial_i \hat{F} = R \circ (\partial_i F)$ et $\partial_i\partial_j \hat{F} = R \circ (\partial_i\partial_j F)$. Il en résulte $\hat{W} = R \circ W$ d'après 2b). Comme R conserve le produit scalaire, il vient également $\hat{S} = S$ et $\hat{Q} = Q$. D'après 4d), on a donc $\hat{A} = A$. Aussi $\boxed{\hat{K}(0) = K(0) \text{ et } \hat{H}(0) = H(0).}$

6)

6.a) On a $\partial_1 F(u) = (1, 0, \partial_1 f(u))$ et $\partial_2 F(u) = (0, 1, \partial_2 f(u))$ pour u suffisamment proche de 0 et donc $Q(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $W(u) = \dfrac{1}{\sqrt{(\partial_1 f(u))^2 + (\partial_2 f(u))^2 + 1}}(-\partial_1 f(u), -\partial_2 f(u), 1)$. Il vient $W(0) = (0, 0, 1)$. Comme

$$\partial_i\partial_j F(u) = (0, 0, \partial_i\partial_j f(u)),$$

il vient $S(0) = \begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix}$, $A(0) = -S(0)$ et $\boxed{K(0) = rt - s^2 \text{ et } H(0) = -\frac{r+t}{2}.}$

6.b) Ici $s = t = 0$ donc $H(0) = -\frac{1}{2}r = -\frac{1}{2}g''(0)$.

La courbe Γ est le graphe de la fonction g. Sa courbure en 0 est donc (en orientant le plan par la base (e_1, e_3)) $\dfrac{g''(0)}{(1 + g'(0)^2)^{3/2}}$. Comme $g'(0) = 0$ par hypothèse, il vient

$\boxed{H(0) = -\frac{1}{2}c, \text{ où } c \text{ est la courbure de } \Gamma \text{ en } 0.}$

7)

7.a) On se place en coordonnées cylindriques. Pour u dans U, il vient $F(u) = (f(u_1), u_2, u_1)$, puis $\partial_1 F(u) = (f'(u_1), u_2, 1)$ et $\partial_2 F(u) = (f(u_1), u_2 + \pi/2, 0)$. Au vu de la troisième composante de ces deux vecteurs, ils sont liés si et seulement si $\partial_2 F(u)$ est nul, i.e. $f(u_1) = 0$, ce qui est exclu par hypothèse. Donc $\partial_1 F(u)$ et $\partial_2 F(u)$ sont linéairement indépendants $\boxed{\text{pour toutes valeurs de } u.}$

7.b) Il faut noter une typo dans le sujet, le dernier carré étant apposé à f' et non à la parenthèse. D'après les calculs précédents, on a $W(u) = \dfrac{1}{(1+f'(u_1)^2)^{1/2}}(1,\pi,f'(u_1))$ et $Q(u)$ est la matrice diagonale de diagonale $(1+f'(u_1)^2, f(u_1)^2)$.

Il vient ensuite $\partial_1\partial_2 F(u) = (f''(u_1),0,0)$, $\partial_1\partial_2 F(u) = (f'(u_1),\pi/2,0)$ et $\partial_2\partial_2 F(u) = (f(u_1),\pi,0)$, et donc $S(u)$ est la matrice diagonale de diagonale $(-f''(u_1), f(u_1))$ divisée par $(1+f'(u_1)^2)^{1/2}$. On en déduit, d'après 4d),

$$A(u) = \frac{1}{(1+f'(u_1)^2)^{1/2}} \begin{pmatrix} -f''(u_1) & 0 \\ 0 & f(u_1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+f'(u_1)^2 & 0 \\ 0 & f(u_1)^2 \end{pmatrix}^{-1}$$

d'où la formule $\boxed{A(u) = f(u_1)^{-1}(1+f'(u_1)^2)^{-3/2} \begin{pmatrix} f(u_1)f''(u_1) & 0 \\ 0 & -(1+f'(u_1)^2) \end{pmatrix}}$.

7.c) On a $2H(u) = f(u_1)f''(u_1) - (1+f'(u_1)^2)$. Or, pour $f = \mathrm{ch}$, on a $ff'' = \mathrm{ch}^2 = 1+\mathrm{sh}^2 = 1+(f')^2$ et donc $H(u)$ est nul pour tout u si $\boxed{f = \mathrm{ch}.}$

7.d) Pour a, b et c réels, on pose $f(t) = a\,\mathrm{ch}(bt+c)$. On a alors $f(0) = a\,\mathrm{ch}(c)$, $f'(0) = ab\,\mathrm{sh}(c)$ et $ff'' = 1+f'^2 \Leftrightarrow a^2b^2 = 1$. Comme on veut f strictement positive et que ch est paire, on peut supposer $a > 0$ et $b \geq 0$. On obtient alors une solution au problème avec $c = \mathrm{argsh}(\beta)$, $a = \dfrac{\alpha}{\sqrt{1+\beta^2}}$ et $b = \dfrac{\sqrt{1+\beta^2}}{\alpha}$. Autrement dit la fonction définie par

$\boxed{f(t) = \alpha\,\mathrm{ch}\left(\dfrac{\sqrt{1+\beta^2}}{\alpha}t\right) + \dfrac{\alpha\beta}{\sqrt{1+\beta^2}}\,\mathrm{sh}\left(\dfrac{\sqrt{1+\beta^2}}{\alpha}t\right)}$ vérifie $f(0)=\alpha$, $f'(0)=\beta$ et on a $H(u)=0$ pour tout u dans U.

La quantité $f(0)$ représente la distance du point $F(0)$ à l'axe de révolution et $f'(0)$ est la pente de la méridienne passant par $F(0)$. Comme le problème peut être transformé par une rotation et par une translation, on en déduit la propriété suivante :

Soit $\mathcal{P}$ un plan de l'espace affine euclidien de dimension 3 et Δ une droite normale à ce plan. Soit A leur point d'intersection, alors par tout point M de $\mathcal{P}$ distinct de A et pour tout point N de Δ, il existe une surface de révolution autour de l'axe Δ passant par M, tangente à (MN) et telle que H est identiquement nulle.

7.e) D'après 7b), on a $K(u) = \dfrac{-f''(u_1)}{f(u_1)(1+f'^2(u_1))^2}$ et donc, puisque $1+f'^2 = ff''$,

$$K(u) = -1/(f^3(u_1)f''(u_1)) = -1/(bf(u_1)^2)^2\,,$$

d'où $$\boxed{K(u) = -\frac{1+\beta^2}{\alpha^2\left(\sqrt{1+\beta^2}\,\mathrm{ch}\left(\dfrac{\sqrt{1+\beta^2}}{\alpha}t\right) + \beta\,\mathrm{sh}\left(\dfrac{\sqrt{1+\beta^2}}{\alpha}t\right)\right)^4}}.$$

8) En prenant f constante non nulle, la matrice A est constante et donc K et H le sont. Comme le problème est invariant par rotation affine :

pour les cylindres de révolution, K et H sont constantes.

PARTIE III

9) D'après 4c), la transposée de $\dfrac{\partial W}{\partial u}$, qui est la matrice dont les lignes sont les vecteurs lignes $\partial_i W(u)$, est la matrice obtenue par produit de $A(u)$ avec la matrice dont les lignes sont les vecteurs lignes $\partial_i F(u)$, i.e. la transposée de $\dfrac{\partial F}{\partial u}$. On a donc ${}^t\dfrac{\partial W}{\partial u} = A(u)\ {}^t\dfrac{\partial F}{\partial u}$. Par transposition il vient $\boxed{\dfrac{\partial W}{\partial u} = \dfrac{\partial f}{\partial u}\ {}^tA(u).}$

10)

10.a) On suppose que Φ est de classe C^2. Puisque $\tilde{F} = F \circ \Psi$ et $u = \Psi(\tilde{u})$, par composition on a $\boxed{\dfrac{\partial \tilde{F}}{\partial \tilde{u}}(\tilde{u}) = \dfrac{\partial F}{\partial u}(u)\dfrac{\partial \Psi}{\partial \tilde{u}}(\tilde{u}).}$

En notant $\dfrac{\partial \Psi}{\partial \tilde{u}} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ on a donc $\partial_1 \tilde{F} = (a\partial_1 F + c\partial_2 F) \circ \Psi$ et $\partial_2 \tilde{F} = (b\partial_1 F + d\partial_2 F) \circ \Psi$, d'où, par bilinéarité et antisymétrie, $\boxed{\partial_1 \tilde{F} \wedge \partial_2 \tilde{F} = \det\left(\dfrac{\partial \Psi}{\partial \tilde{u}}\right) \cdot (\partial_1 F \wedge \partial_2 F) \circ \Psi.}$

10.b) D'après ce qui précède $\tilde{W}(\tilde{u}) = \pm W(u)$, le signe étant celui du déterminant de $\dfrac{\partial \Psi}{\partial \tilde{u}}$. Comme Ψ est un difféomorphisme, ce déterminant est une fonction continue ne s'annulant pas sur U. Puisque U est connexe par arcs, il est constant, i.e. il existe ε dans $\{-1, 1\}$ tel que, pour tout u dans U, $\boxed{\tilde{W}(\tilde{u}) = \varepsilon W(u).}$

10.c) D'après 9) et 10b), on a $\dfrac{\partial \tilde{W}}{\partial \tilde{u}} = \varepsilon \dfrac{\partial W}{\partial u}\dfrac{\partial \Psi}{\partial \tilde{u}} = \varepsilon \dfrac{\partial F}{\partial u}\ {}^tA(u)\dfrac{\partial \Psi}{\partial \tilde{u}}$. D'après 9) et 10a), on a $\dfrac{\partial \tilde{W}}{\partial \tilde{u}} = \dfrac{\partial \tilde{F}}{\partial \tilde{u}}\ {}^t\tilde{A}(\tilde{u}) = \dfrac{\partial F}{\partial u}\dfrac{\partial \Psi}{\partial \tilde{u}}\ {}^t\tilde{A}(\tilde{u})$. Il en résulte, puisque $\dfrac{\partial F}{\partial u}$ est inversible car de rang n par hypothèse, $\boxed{\tilde{A}(\tilde{u}) = \varepsilon\ {}^t\dfrac{\partial \Psi}{\partial \tilde{u}} A(u)\ {}^t\dfrac{\partial \Psi}{\partial \tilde{u}}^{-1}.}$

10.d) La trace et le déterminant étant invariants par conjugaison, il vient $\boxed{\tilde{H}(\tilde{u}) = \varepsilon H(u) \text{ et } \tilde{K}(\tilde{u}) = K(u).}$