ÉCOLE POLYTECHNIQUE **FILIÈRE MP**

CONCOURS D'ADMISSION 2005

PREMIÈRE COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée : 4 heures)

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve.

⋆⋆⋆

Endomorphismes d'espaces fonctionnels

Ce problème a pour but l'étude de certains endomorphismes des espaces de fonctions différentiables et des espaces duaux.

Pour tout entier $n \geqslant 0$ on désigne par E_n l'espace vectoriel des fonctions à valeurs complexes, de classe C^n, définies sur l'intervalle $[-1,1]$; pour toute f de E_0 on pose

$$\|f\| = \sup \{|f(x)| \ , \ x \in [-1,1]\} \ .$$

Enfin, on munit E_n de la norme π_n définie par

$$\pi_n(f) = \max \{\|f^{(k)}\| \ , \ k = 0, 1, \ldots, n\} \ .$$

(On ne demande pas de vérifier que π_n est effectivement une norme).

Première partie

1. Calculer $\pi_n(X^p)$ où $p \in \mathbf{N}$ et où X désigne la fonction $x \mapsto x$.

Pour tout f de E_n, $n \geqslant 0$ et tout g de E_n, $n \geqslant 1$, on pose

$$(A_n f)(x) = x\, f(x) \quad , \quad (B_n g)(x) = \int_0^1 g'(xt)dt \quad \text{pour tout } x \in [-1,1] \ .$$

2.a) Vérifier que $A_n f$ appartient à E_n, et que $B_n g$ appartient à E_{n-1}.

b) Montrer que A_n est une application linéaire continue de E_n dans lui-même, de norme égale à $n+1$, et que B_n est une application linéaire continue de E_n dans E_{n-1}, de norme égale à 1.

3. Calculer les produits $B_n A_n$ et $A_{n-1} B_n$, applications de E_n dans E_{n-1}.

4. On se propose maintenant de démontrer que le sous-espace image de A_n est le sous-ensemble F_n de E_n formé des fonctions g telles que $g(0) = 0$ et que, en outre, $\frac{1}{x}\Big(g^{(n)}(x) - g^{(n)}(0)\Big)$ admette une limite finie lorsque x tend vers 0.

a) Traiter le cas où $n = 0$.

b) Supposant maintenant $n > 0$, vérifier que $\operatorname{Im} A_n$ est inclus dans F_n.

c) Prenant g dans F_n et posant $f = B_n g$, montrer que f est de classe C^n sur $[-1, 1]$ privé de 0, puis étudier le comportement de $\frac{1}{x}\Big(f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(0)\Big)$ lorsque x tend vers 0.

d) Conclure.

Deuxième partie

On désigne par E l'espace vectoriel des fonctions à valeurs complexes, de classe C^∞, définies sur $[-1, 1]$. Pour toute $f \in E$ on pose

$$\delta(f) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \frac{\pi_n(f)}{1 + \pi_n(f)} \ .$$

5. Démontrer les assertions suivantes :

a) Pour $f_1, f_2, f_3 \in E$, on a

$$\delta(f_1 - f_2) \leqslant \delta(f_1 - f_3) + \delta(f_2 - f_3) \ .$$

b) Étant donnés des éléments f et $f_i (i \in \mathbf{N})$ de E, les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $\delta(f_i - f)$ tend vers 0 lorsque i tend vers $+\infty$
(ii) pour tout $n \geqslant 0$, $f_i^{(n)}$ converge uniformément vers $f^{(n)}$.

c) La fonction δ définie ci-dessus est-elle la seule pour laquelle les assertions **5.a)** et **5.b)** sont vraies ?

On désigne respectivement par A et B les endomorphismes de E définis par

$$(Af)(x) = x\, f(x) \quad , \quad (Bg)(x) = \int_0^1 g'(xt)dt \quad \text{pour tout} \quad x \in [-1, 1] \ .$$

6.a) Déterminer les produits $A\,B$ et $B\,A$.

b) Déterminer les noyaux et les images de A et B.

7.a) Déterminer des fonctions φ_n, $n = 1, 2, \dots$ sur $[0,1]$ telles que l'on ait, pour toute $g \in E$,

$$(B^n g)(x) = \int_0^1 \varphi_n(t)\, g^{(n)}(xt)dt \ .$$

[On pourra procéder par récurrence sur n.]

b) Calculer $(B^n g)(0)$.

c) On fixe g dans E. Déterminer des polynômes P_n, $n = 0, 1, \dots$ tels que l'on ait

$$\forall x \in [0,1] \quad \forall n \geqslant 1 \quad , \quad (A^n\, B^n g)(x) = g(x) - P_{n-1}(x) \ .$$

[On pourra procéder par récurrence sur n et écrire $A^{n+1}\, B^{n+1} = A^n\, A\, B\, B^n$.]

d) Déduire de ce qui précède une démonstration de la formule de Taylor avec reste intégral.

8. Déterminer l'image de A^n et le noyau de B^n.

Troisième partie

On désigne par E' l'espace vectoriel des formes linéaires φ sur E possédant la propriété suivante : si des éléments f et $f_i (i \in \mathbf{N})$ de E sont tels que $\delta(f_i - f)$ tend vers 0 lorsque i tend vers $+\infty$, alors $\varphi(f_i)$ tend vers $\varphi(f)$.

9. Vérifier que, si φ appartient à E', il en est de même des formes linéaires $\varphi \circ A$ et $\varphi \circ B$.

On note A' et B' respectivement les endomorphismes de E' ainsi définis. Pour tout $i \in \mathbf{N}$ et tout $\alpha \in [-1,1]$, on note $\varphi_{\alpha;i}$ la forme linéaire sur E : $f \mapsto f^{(i)}(\alpha)$.

10. Pour n entier positif, déterminer Im $(A')^n$ et Ker $(B')^n$; montrer que les $\varphi_{0;i}$, $i = 0, \dots, n-1$, forment une base de Ker $(A')^n$.

11. Déterminer les éléments ψ de E' solutions de l'équation $(A')^n \psi = \varphi_{0;0}$.

Étant donné un nombre complexe α, on désigne par T_α l'endomorphisme de E défini par

$$(T_\alpha f)(x) = (x - \alpha)\, f(x) \quad \text{pour tout} \quad x \in [-1,1] \ .$$

On pourra admettre les résultats suivants :

(i) si φ appartient à E', il en est de même de $\varphi \circ T_\alpha$. On notera T'_α l'endomorphisme de E' ainsi défini.

(ii) si $\alpha \in [-1,1]$, $(T'_\alpha)^n$ est surjectif et Ker $(T'_\alpha)^n$ admet pour base les $\varphi_{\alpha;i}$, $i = 0, \dots, n-1$.

12. Dans cette question on désigne par G un espace vectoriel et par $U_1, \ldots, U_r$ des endomorphismes de G, commutant deux à deux et tels que, pour $i \neq j$, on ait

$$\text{Ker } U_i = U_j(\text{Ker } U_i) .$$

Montrer que l'on a

$$\text{Ker } (U_1 \ldots U_r) = \text{Ker } U_1 + \ldots + \text{Ker } U_r .$$

13. Soit Q un polynôme à une indéterminée, à coefficients complexes ; notons T_Q l'endomorphisme de E défini par $(T_Q f)(x) = Q(x)\, f(x)$.

a) Vérifier que, si φ appartient à E', il en est de même de $\varphi \circ T_Q$. On note T'_Q l'endomorphisme de E' ainsi défini.

b) Préciser l'image de T'_Q et donner une base de son noyau.

* *
*

PARTIE I

1. Pour p et k dans $\mathbf{N}$, X^p est polynomiale donc de classe C^∞ sur $[-1,1]$ et, si $k \leq p$, $(X^p)^{(k)} = \prod_{0\leq i<k}(p-i)X^{p-k}$ et sinon $(X^p)^{(k)} = 0$. On a donc $\left\|(X^p)^{(k)}\right\| = k!\binom{p}{k}$ et $\boxed{\pi_n(X^p) = p! \text{ si } p \leq n \text{ et } \pi_n(X^p) = n!\binom{p}{n} \text{ sinon.}}$

2. a) Soit n dans $\mathbf{N}$. Comme X est de classe C^∞, en particulier $X \in E_n$ et comme E_n est une algèbre $\boxed{A_n f \in E_n.}$

   On suppose de plus $n \geq 1$. Pour g dans E_n, $B_n g$ est la fontion pente de g par rapport à 0, prolongée par continuité en 0. Soit φ la fonction donnée par $\varphi(x,t) = g'(xt)$. Puisque la fonction produit est de classe C^∞, que, pour t dans $[0,1]$ et x dans $[-1,1]$, on a $xt \in [-1,1]$ et que g' est de classe C^{n-1}, φ est de classe C^{n-1} par rapport à x et, pour p entier avec $0 \leq p \leq n-1$, on a $\dfrac{\partial^p f}{x^p}(x,t) = t^p g^{p+1}(xt)$ et donc $\dfrac{\partial^p f}{x^p}$ est continue par rapport à t et, de plus, pour x dans $[-1,1]$ et t dans $[0,1]$, on a $\left|\dfrac{\partial^p f}{x^p}(x,t)\right| \leq \pi_{n-1}(g')$. Comme les fonctions constantes (positives) sont continues et intégrables sur $[0,1]$ il résulte de la règle de Leibniz, ou théorème de dérivation sous le signe somme, que $B_n g$ est de classe C^{n-1}, i.e. $B_n g \in E_{n-1}$.

   b) D'après ce qui précède A_n est Puisque E_n est une algèbre, A_n est une application linéaire de E_n dans