Première composition
X 2008 – MP

Équations différentielles de Sturm-Liouville

Ce problème est consacré à l'étude d'une équation différentielle avec paramètre. On désigne par $C^\infty([0;1])$ l'espace des fonctions réelles de classe C^∞ sur $[0;1]$.

PARTIE I

Dans cette première partie, étant donné deux fonctions p et q de $C^\infty([0;1])$, on désigne par $A_{p,q}$ l'endomorphisme de $C^\infty([0;1])$ défini par

$$A_{p,q}(y) = y'' + py' + qy$$

et par $(D_{p,q})$ l'équation différentielle sur $[0;1]$: $A_{p,q}(y) = 0$.

1. Soit y une solution non identiquement nulle de $(D_{p,q})$.

1.a) Montrer que les fonctions y et y' ne s'annulent pas simultanément.

1.b) Montrer que les zéros de y sont en nombre fini.

2. Soit y_1 et y_2 deux solutions linéairement indépendantes de $(D_{p,q})$; on suppose que y_1 admet au moins deux zéros et on note a et b deux zéros consécutifs.

2.a) Montrer que y_2 admet au moins un zéro dans l'intervalle ouvert $]a;b[$. [On pourra procéder par l'absurde et considérer le wronskien W de y_1 et y_2.]

2.b) La fonction y_2 peut-elle avoir plusieurs zéros dans $]a;b[$?

Étant donné deux fonctions u et v de $C^\infty([0;1])$, u ne s'annulant en aucun point, on désigne par $B_{u,v}$ l'endomorphisme de $C^\infty([0;1])$ défini par

$$B_{u,v}(y) = (uy')' + vy$$

et par $(E_{u,v})$ l'équation différentielle sur $[0;1]$: $B_{u,v}(y) = 0$.

3.a) Soit y_1 et y_2 deux solutions linéairement indépendantes de $(D_{p,q})$ et soit W leur wronskien. Vérifier la relation

$$y_1 B_{u,v}(y_2) - y_2 B_{u,v}(y_1) = (u' - up)W\ .$$

3.b) Montrer que, pour tout couple (p,q), il existe des couples (u,v) tels que $\operatorname{Ker} A_{p,q} = \operatorname{Ker} B_{u,v}$ et déterminer tous ces couples (u,v).

4. On se donne trois fonctions u, v_1 , v_2 de $C^\infty([0;1])$ et on suppose pour tout $x \in [0;1]$

$$u(x) > 0\,, \quad v_2(x) < v_1(x)\ .$$

Pour $1 \leq i \leq 2$, on note y_i une solution non identiquement nulle de l'équation (E_{u,v_i}) ; on suppose que y_2 admet au moins deux zéros et on note a et b deux zéros consécutifs.

4.a) Vérifier la relation

$$[uy_1y_2']_a^b = \int_a^b (v_1(x) - v_2(x))\, y_1(x)y_2(x)\,\mathrm{d}x\ .$$

[On pourra considérer $\displaystyle\int_a^b (y_1B_{u,v_2}(y_2) - y_2B_{u,v_1}(y_1))\,(x)\,\mathrm{d}x$.]

4.b) Montrer que y_1 admet au moins un zéro dans l'intervalle $]a;b[$. [On pourra procéder par l'absurde.]

Dans toute la suite du problème on note r une fonction de $C^\infty([0;1])$; pour tout nombre réel λ on considère l'équation différentielle sur $[0;1]$:

$$(D_\lambda) \qquad\qquad y'' + (\lambda - r)y = 0 \,.$$

On note y_λ l'unique solution de (D_λ) satisfaisant $y_\lambda(0) = 0$, $y'_\lambda(0) = 1$, et E_λ l'espace vectoriel (éventuellement réduit à zéro) des solutions de (D_λ) satisfaisant $y(0) = y(1) = 0$; si cet espace n'est pas réduit à zéro, on dit que λ est valeur propre.

PARTIE II

5.a) Quelles sont les valeurs possibles de $\dim E_\lambda$?

5.b) Démontrer l'équivalence des conditions $E_\lambda \neq \{0\}$ et $y_\lambda(1) = 0$.

6. Démontrer les assertions suivantes :

6.a) Toute valeur propre est supérieure ou égale à $\inf_{x\in[0;1]} r(x)$.

6.b) Si $y_1 \in E_{\lambda_1}$, $y_2 \in E_{\lambda_2}$ avec $\lambda_1 \neq \lambda_2$, alors $\displaystyle\int_0^1 y_1(x)y_2(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

PARTIE III

Dans les troisième et quatrième parties, on désigne par $N(\lambda)$ le nombre des zéros de la fonction y_λ dans $[0;1]$ et on se propose d'étudier $N(\lambda)$ en lien avec les valeurs de $y_\lambda(1)$, ainsi que la répartition des valeurs propres.

7. Dans cette question on examine le cas où $r = 0$ et $\lambda > 0$. On désigne par $[a]$ la partie entière d'un nombre réel a.

7.a) Calculer $y_\lambda(x)$ pour $x \in [0;1]$.

7.b) Calculer $N(\lambda)$.

7.c) Préciser le comportement de $N(\lambda)$ au voisinage d'un point λ_0.

On ne suppose plus $r = 0$ ni $\lambda > 0$. On admettra que la fonction de deux variables $(\lambda, x) \mapsto y_\lambda(x)$ est de classe C^∞.

8. Dans cette question, on se propose de démontrer que, si $y_{\lambda_0}(1)$ est non nul, $N(\lambda)$ est constant dans un voisinage de λ_0. Soit donc un tel λ_0.
On désigne par $c_1, \ldots, c_n$, $n \geq 1$, les zéros de y_{λ_0} dans $[0;1]$ avec

$$0 = c_1 < c_2 < \cdots < c_n < 1 \,.$$

8.a) Montrer qu'il existe une suite strictement croissante $(\xi_j)_{0\leq j\leq 2n}$ de nombres réels, possédant les propriétés suivantes :

(i) $\xi_0 = 0$, $\xi_{2n} = 1$, $0 < \xi_1 < \xi_2$ et, pour $j \in [\![2;n]\!]$, $\xi_{2j-2} < c_j < \xi_{2j-1}$;

(ii) $(-1)^{j+1}y_{\lambda_0} > 0$ sur $[\xi_{2j-1};\xi_{2j}]$, $j \in [\![1;n]\!]$;

(iii) $(-1)^j y'_{\lambda_0} > 0$ sur $[\xi_{2j};\xi_{2j+1}]$, $j \in [\![0;n-1]\!]$.

8.b) Dans cette question, on considère une fonction F de classe C^∞ dont le domaine de définition contient un rectangle compact $I \times J$ de $\mathbf{R}^2$. Démontrer l'assertion suivante : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que les conditions s_1, s_2 dans I et $|s_1 - s_2| < \delta$ impliquent, pour tout t dans J, $|F(s_1,t) - F(s_2,t)| < \varepsilon$.

8.c) Montrer que, pour tout λ suffisamment voisin de λ_0 , y_λ a exactement un zéro dans chacun des intervalles $[\xi_{2j};\xi_{2j+1}]$, mais n'en a aucun dans les intervalles $[\xi_{2j-1};\xi_{2j}]$. Conclure.

9. Montrer que, pour tout $\lambda \geq \rho = \sup_{x\in[0;1]} r(x)$, on a

$$N(\lambda) \geq \left[(\lambda-\rho)^{1/2}\pi^{-1}\right] \,.$$

[On pourra utiliser la question 4 et la question 7 en y remplaçant λ par un réel quelconque $\mu < \lambda - \rho$.]

10.a) Montrer que, si $y_\lambda(1)$ est non nul pour tout λ appartenant à un intervalle I, $N(\lambda)$ est constant dans I.

10.b) L'ensemble des valeurs propres est-il vide ou non vide ? fini ou infini ?

PARTIE IV

Dans cette quatrième partie, on étudie le comportement de $N(\lambda)$ au voisinage d'un point λ_0 tel que $y_{\lambda_0}(1) = 0$. On écrira $y(\lambda, x)$ au lieu de $y_\lambda(x)$, et on rappelle que cette fonction de deux variables est de classe C^∞ ; l'équation (D_λ) s'écrit donc :

$$(i) \qquad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + (\lambda - r)y = 0 \, .$$

11. Démontrer que la relation (i) entraîne les relations suivantes :

$$(ii) \qquad \frac{\partial^3 y}{\partial x^2 \partial \lambda} + (\lambda - r)\frac{\partial y}{\partial \lambda} + y = 0$$

$$(iii) \qquad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\frac{\partial y}{\partial \lambda} - \frac{\partial^3 y}{\partial x^2 \partial \lambda} y - y^2 = 0$$

$$(iv) \qquad \frac{\partial y}{\partial \lambda}(\lambda_0, 1)\frac{\partial y}{\partial x}(\lambda_0, 1) = \int_0^1 y(\lambda_0, x)^2 \, \mathrm{d}x > 0 \, .$$

12. Montrer qu'il existe un réel $\varepsilon > 0$ ayant les propriétés suivantes :
    (i) si $\lambda \in [\lambda_0 - \varepsilon; \lambda_0[$, on a $N(\lambda) = N(\lambda_0) - 1$;
    (ii) si $\lambda \in [\lambda_0; \lambda_0 + \varepsilon]$, on a $N(\lambda) = N(\lambda_0)$.
13. Montrer qu'on peut écrire les valeurs propres comme une suite croissante infinie $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots$, et exprimer $N(\lambda_n)$ en fonction de n.

Première composition – X 2008 – MP

PARTIE I

1.a) Soit x dans $[0;1]$. Le problème de Cauchy donné par $(D_{p,q})$ et les conditions $y(x) = y'(x) = 0$ admet une unique solution puisqu'on a affaire à une équation différentielle linéaire scalaire sous forme résolue. Cette unique solution est donc la solution nulle puisque l'équation est homogène. Puisque y n'est pas identiquement nulle, il en résulte que

$\boxed{y \text{ et } y' \text{ ne s'annulent pas simultanément.}}$

1.b) On raisonne par l'absurde. Si l'ensemble des zéros de y est infini, on dispose d'une application injective de $\mathbf{N}$ dans celui-ci, i.e. d'une suite injective de tels zéros. Comme $[0;1]$ est compact, le théorème de Bolzano-Weierstrass permet d'en extraire une suite convergente dans $[0;1]$ et celle-ci sera encore injective car la restriction d'une application injective l'est aussi. On note x la limite de cette suite. Quitte à extraire encore, on peut supposer la suite constituée d'éléments tous distincts de x car la suite ne prend la valeur x qu'au plus une fois, par injectivité. En résumé on dispose d'une suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de zéros de y dans $[0;1]$, tous distincts de x et convergeant vers x.

Par continuité et dérivabilité de y en x, on a $y(x) = y(\lim x_n) = \lim y(x_n) = 0$ et $y'(x) = \lim \frac{y(x_n)-y(x)}{x_n - x} = 0$, donc x est un zéro simultané de y et y'. Ceci contredit la question précédente et donc $\boxed{\text{les zéros de } y \text{ sont en nombre fini.}}$

2.a) On remarque d'abord que y_1 n'est pas identiquement nulle puisque (y_1, y_2) forme une famille libre. On en déduit qu'elle n'a qu'un nombre fini de zéros sur $[0;1]$, d'après la question précédente, et il est donc licite de considérer deux zéros consécutifs. Comme y_1 ne s'annule pas sur $]a;b[$, d'après le théorème de Bolzano elle y est de signe constant. Soit x et x' dans $]a;b[$. On a donc $y_1(x)y_1(x') > 0$ et donc aussi $(y_1(x) - y_1(a))\,(y_1(x') - y(b)) > 0$ et $\dfrac{y_1(x) - y_1(a)}{x-a}\,\dfrac{y_1(x') - y_1(b)}{x'-b} < 0$. Par passage à la limite il vient alors $y_1'(a)y_1'(b) \leq 0$. Comme y_1 n'est pas identiquement nulle, d'après ce qui précède y_1 et y_1' ne s'annulent pas simultanément et il vient $y_1'(a)y_1'(b) < 0$.

On pose $W = y_1y_2' - y_2y_1'$. Comme W est le wronskien de la famille libre (y_1, y_2) de solutions d'une équation différentielle linéaire scalaire, W ne s'annule nulle part et en particulier pas sur $[a;b]$. Par construction W est de classe C^∞ et donc, d'après le théorème de Bolzano, W est de signe constant (strictement). On en déduit $W(a)W(b) > 0$ et donc $y_1'(a)y_1'(b)y_2(a)y_2(b) > 0$. Il en résulte, d'après ce qui précède, $y_2(a)y_2(b) < 0$ et donc, par continuité de y_2 et d'après le théorème de Bolzano,

$\boxed{y_2 \text{ admet au moins un zéro dans }]a;b[.}$

2.b) Si y_2 s'annule deux fois sur $]a;b[$, on peut appliquer ce qui précède au couple (y_2, y_1), qui est également libre, et donc, entre deux zéros consécutifs de y_2 sur $]a;b[$, y_1 admet au moins un zéro et ceci contredit le fait que a et b sont des zéros consécutifs de y_1. Par conséquent $\boxed{y_2 \text{ n'a qu'un seul zéro dans }]a;b[.}$

3.a) On a, puisque le déterminant est alterné, et puisque, pour y solution de $(D_{p,q})$, $(uy')' = u'y' + uy'' = u'y' - upy' - uqy = (u' - up)y' - qy$,

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ B_{u,v}(y_1) & B_{u,v}(y_2) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ (uy_1')' & (uy_2')' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ (u'-p)y_1' & (u'-p)y_2' \end{vmatrix}$$

et donc $\boxed{y_1B_{u,v}(y_2) - y_2B_{u,v}(y_1) = (u' - up)W.}$

3.b) On raisonne par analyse-synthèse. Si u et v sont deux fonctions de classe C^∞ sur $[0;1]$, u ne s'annulant nulle part et telles que $\operatorname{Ker} A_{p,q} = \operatorname{Ker} B_{u,v}$, alors d'après ce qui précède, si W est le wronskien d'une famille libre de solutions de $(D_{p,q})$, alors $(u' - up)W = 0$ et donc, puisque W ne s'annule nulle part, $u' = up$. Il en résulte que u est de la forme $x \mapsto \lambda \exp\left(\int_0^x p(t)\,\mathrm{d}t\right)$ avec λ dans $\mathbf{R}^*$. Par ailleurs, pour y dans $C^\infty([0;1])$ on a

$$u(y'' + py' + qy) = (uy')' + vy - (u' - up)y' + (uq - v)y$$

et donc si (y_1, y_2) est une famille libre de solutions de $(D_{p,q})$ et donc aussi de $(E_{u,v})$, on a $(uq-v)y_1 = (uq-v)y_2 = 0$. Comme y_1 et y_2 ne s'annulent pas simultanément, on en déduit $uq - v = 0$ et donc v est la fonction $x \mapsto \lambda q(x) \exp\left(\int_0^x p(t)\,\mathrm{d}t\right)$.

Réciproquement si (u, v) est de la forme précédente, d'une part u ne s'annule nulle part et u et v sont de classe C^∞ sur $[0;1]$ puisqu'il en est de même pour p et q et que l'exponentielle est de classe C^∞ sur $\mathbf{R}$. D'autre part on a $u' = up$ et $uq = v$. Le calcul précédent montre alors qu'on a, pour y dans $C^\infty([0;1])$, $u(y'' + py' + qy) = (uy')' + vy$ et donc, puisque u ne s'annule nulle part, $\operatorname{Ker} A_{p,q} = \operatorname{Ker} B_{u,v}$.

$$\boxed{\text{Pour tout couple } (p,q), \text{ il existe des couples } (u,v) \text{ tels que } \operatorname{Ker} A_{p,q} = \operatorname{Ker} B_{u,v} \text{ à savoir les multiples non nuls du couple } (u,v) \text{ donné par } u(x) = \exp\left(\int_0^x p(t)\,\mathrm{d}t\right) \text{ et } v = uq.}$$

4.a) On a, puisque le déterminant est multilinéaire alterné, et puisque, pour y_i solution de (E_{u,v_i}), pour $1 \le i \le 2$,

$$0 = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ B_{u,v_1}(y_1) & B_{u,v_2}(y_2) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ (uy_1')' & (uy_2')' \end{vmatrix} + y_1 y_2 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}$$

et

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ (uy_1')' & (uy_2')' \end{vmatrix} = u \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1'' & y_2'' \end{vmatrix} + u' \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = u \left(\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \right)' + u' \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$$

d'où $\left(u \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \right)' + (v_2 - v_1) y_1 y_2 = 0.$

Comme on a affaire à des fonctions continues, donc intégrables sur $[a;b]$, il vient en tenant compte de $y_2(a) = y_2(b) = 0$ et donc de

$$\left[u \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \right]_a^b = \left[u \begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \right]_a^b = [u y_1 y_2']_a^b ,$$

$$\boxed{[u y_1 y_2']_a^b = \int_a^b (v_1(x) - v_2(x))\, y_1(x) y_2(x)\,\mathrm{d}x.}$$

4.b) Si y_1 ne s'annule pas sur $]a;b[$, elle y est de signe constant (strictement) d'après le théorème de Bolzano, de même que y_2 puisque a et b en sont des zéros consécutifs et de même que $v_1 - v_2$ par hypothèse. Donc $(v_1 - v_2)y_1 y_2$ est une fonction continue sur $]a;b[$, de signe constant et non identiquement nulle. Il en résulte, par positivité de l'intégrale et par caractérisation des fonctions continues nulles, que son intégrale est du même signe (strictement), à savoir celui de $y_2 y_1$ et aussi du signe commun à $y_2'(a)y_1$ et $-y_2'(b)y_1$ d'après le raisonnement déjà effectué en question 2a. Par continuité de y_1 en a et b, $-y_1(a)y_2'(a)$ et $y_1(b)y_2'(b)$ sont, au sens large, du signe opposé, ce qui entre en contradiction avec le résultat précédent. On en déduit que $\boxed{y_1 \text{ admet au moins un zéro dans }]a;b[.}$

PARTIE II

5.a) Puisqu'on a affaire à une équation différentielle linéaire homogène scalaire d'ordre 2, d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, l'espace E des solutions de (D_λ) est de dimension 2 et isomorphe à $\mathbf{R}^2$ et, pour tout t dans $[0;1]$, un isomorphisme est donné par $y \mapsto (y(t), y'(t))$. Il en résulte que les formes $y \mapsto y(0)$ et $y \mapsto y(1)$ sont des formes linéaires non nulles sur le plan E, leurs noyaux sont donc des droites et E_λ en est l'intersection. Par conséquent $\boxed{\dim E_\lambda \text{ est égal à 0 ou 1.}}$

5.b) D'après ce qui précède, y_λ est dans le noyau de la forme $y \mapsto y(0)$, défini sur le plan des solutions de (D_λ), qui est donc une droite. Il en résulte que y_λ est une base de ce noyau. Comme le noyau de $y \mapsto y(1)$ est également une droite, l'intersection de ces deux droites n'est pas réduite à $\{0\}$ si et seulement si y_λ appartient également à cette seconde droite. Autrement dit $\boxed{E_\lambda \neq \{0\} \iff y_\lambda(1) = 0.}$

6.a) Soit λ une valeur propre. On applique les résultats de la question 4b avec $u = 1$, $v_1 = -\mu$ pour un réel μ tel que $\mu < \inf_{[0;1]} r - \lambda$ et $v_2 = \lambda - r$. Alors on a affaire à trois fonctions de classe C^∞ sur $[0;1]$ et telles que, pour $0 \leq x \leq 1$, on ait $u(x) > 0$ et $v_2(x) < v_1(x)$. Comme y_λ appartient à E_{u,v_2}, elle admet deux zéros dans $[0;1]$ et donc toute solution de E_{u,v_1} admet au moins un zéro dans $]0;1[$. Si μ est positif, alors $x \mapsto \exp(\sqrt{\mu}x)$ est solution de E_{u,v_1} mais ne s'annule pas sur $[0;1]$. On en déduit que μ est nécessairement strictement négatif et donc $\inf_{[0;1]} r - \lambda$ ne saurait être strictement positif, i.e.

$\boxed{\text{toute valeur propre est supérieure ou égale à } \inf_{x\in[0;1]} r(x).}$

6.b) Soit λ_1 et λ_2 deux valeurs propres distinctes et y_1 et y_2 de E_{λ_1} et E_{λ_2}. On applique cette fois les résultats de la question 4a avec $u = 1$, $v_1 = \max(\lambda_1, \lambda_2) - r$ et $v_2 = \min(\lambda_1, \lambda_2) - r$. Ce sont bien des fonctions de classe C^∞ sur $[0;1]$ et telles que, pour $0 \leq x \leq 1$, on ait $u(x) > 0$ et $v_2(x) < v_1(x)$. On remarque les calculs faits n'utilisent nullement le fait que a et b soient des zéros consécutifs de y_2. On peut donc appliquer le résultats en prenant $a = 0$ et $b = 1$ puisque y_2 s'y annule. Comme y_1 aussi il vient $\displaystyle\int_0^1 (v_1(x) - v_2(x))y_1(x)y_2(x)\,\mathrm{d}x = 0$. Comme $v_1 - v_2$ est une fonction constante non nulle, on en déduit $\boxed{\displaystyle\int_0^1 y_1(x)y_2(x)\,\mathrm{d}x = 0.}$

PARTIE III

7.a) L'équation (D_λ) s'écrit $y'' + \lambda y = 0$ et donc, puisque $\lambda > 0$, un système fondamental de solutions en est donné par $x \mapsto \sin\left(\sqrt{\lambda}x\right)$ et $x \mapsto \cos\left(\sqrt{\lambda}x\right)$ et ainsi, pour $x \in [0;1]$. $\boxed{y_\lambda(x) = \dfrac{\sin\left(\sqrt{\lambda}x\right)}{\sqrt{\lambda}}.}$

7.b) Les zéros de y_λ sont donc les éléments de $[0;1] \cap \dfrac{\pi}{\sqrt{\lambda}}\mathbf{Z}$. Or pour n dans $\mathbf{Z}$, on a, puisque $\dfrac{\pi}{\sqrt{\lambda}} > 0$,

$0 \leq n\dfrac{\pi}{\sqrt{\lambda}} \leq 1 \iff 0 \leq n \leq \dfrac{\sqrt{\lambda}}{\pi}$, donc $\boxed{N(\lambda) = 1 + \left[\dfrac{\sqrt{\lambda}}{\pi}\right].}$

7.c) Puisque $x \mapsto [x]$ est localement constante (et donc continue) sur $\mathbf{R}\setminus\mathbf{Z}$ et localement constante (donc continue) à droite et discontinue à gauche sur $\mathbf{Z}$,

$\boxed{\text{$N(\lambda)$ est localement constante (et continue) à droite de λ_0 et est localement constante à gauche en λ_0 si et seulement si elle y est continue à gauche et ceci se produit si et seulement si λ est de la forme $k^2\pi^2$ avec $k \in \mathbf{N}$.}}$

8.a) On démontre par récurrence finie sur j dans $[\![1;n]\!]$ le prédicat $(\mathbf{H}_j)$ suivant : $(-1)^{j+1}y_{\lambda_0}$ est strictement positive sur $]c_j;c_{j+1}[$ et $(-1)^j y'_{\lambda_0}(c_{j+1}) > 0$, pour $j \leq n-1$, et strictement positive sur $]c_n;1]$, si $j = n$.

Puisque y_{λ_0} ne s'annule pas sur $]c_1;c_2[$ et y est continue, d'après le théorème de Bolzano, elle y est de signe constant (strictement) et ce signe est égal à celui de $y'_{\lambda_0}(c_1)$ et opposé à celui de $y'_{\lambda_0}(c_2)$, comme vu durant la réponse à la question 2a. Comme, par hypothèse, $y'_{\lambda_0}(c_1) = y'_{\lambda_0}(0) = 1$, on en déduit que $(\mathbf{H}_1)$ est vrai.

Soit maintenant j entier tel que $1 \leq j \leq n-2$ et $(\mathbf{H}_j)$ soit vrai. Comme y_{λ_0} ne s'annule pas sur $]c_{j+1};c_{j+2}[$ et y est continue, d'après le théorème de Bolzano, elle y est de signe constant (strictement) et ce signe est égal à celui de $y'_{\lambda_0}(c_{j+1})$ et opposé à celui de $y'_{\lambda_0}(c_{j+2})$. Comme, d'après $(\mathbf{H}_j)$, $(-1)^j y'_{\lambda_0}(c_{j+1}) > 0$, on a aussi $(-1)^{(j+1)+1} y'_{\lambda_0}(c_{j+1}) > 0$ et on en déduit que $(\mathbf{H}_{j+1})$ est vrai, en notant dans le cas $j = n$ que y_{λ_0} ne s'annule pas en 1. D'où l'assertion d'après le principe de récurrence.

Par continuité de y'_{λ_0} on dispose alors, pour j dans $[\![1;n]\!]$, de voisinages (à droite si $j = 1$, à gauche si $j = n$ et bilatéral sinon) de c_j tels que y'_{λ_0} soit de signe constant (strictement) sur ces voisinages. D'où l'existence d'une suite strictement croissante $(\xi_j)_{0\le j\le 2n}$ de réels tels que

$$c_1 = \xi_0 < \xi_1 < \xi_2 < c_2 < \xi_3 < \cdots \xi_{2j-2} < c_j < \xi_{2j-1} < \cdots < \xi_{2n-2} < c_n < \xi_{2n-1} < \xi_{2n} = 1$$

et, pour j dans $[\![1;n]\!]$, $(-1)^{j+1} y'_{\lambda_0}$ est strictement positive sur le voisinage de c_j donné par $[\xi_{2j-2};\xi_{2j-1}]$. Mais alors, d'après $(\mathbf{H}_j)$, on en déduit également qu'on a $(-1)^{j+1} y_{\lambda_0} > 0$ sur $[\xi_{2j-1};\xi_{2j}]$. Autrement dit

(i) $\xi_0 = 0$, $\xi_{2n} = 1$, $0 < \xi_1 < \xi_2$ et, pour $j \in [\![2;n]\!]$, $\xi_{2j-2} < c_j < \xi_{2j-1}$;
(ii) $(-1)^{j+1} y_{\lambda_0} > 0$ sur $[\xi_{2j-1};\xi_{2j}]$, $j \in [\![1;n]\!]$;
(iii) $(-1)^j y'_{\lambda_0} > 0$ sur $[\xi_{2j};\xi_{2j+1}]$, $j \in [\![0;n-1]\!]$.

8.b) Par équivalence des normes en dimension finie, on peut munir $\mathbf{R}^2$ de la norme $\|\cdot\|_\infty$ donnée par $\|(s,t)\|_\infty = \max(|s|,|t|)$. Puisque F est de classe C^∞ sur le compact $I \times J$, d'après le théorème de Heine, elle y est uniformément continue. Soit alors, pour ε dans $\mathbf{R}_+^*$, δ dans $\mathbf{R}_+^*$ tel que pour tous (s_1,t_1) et (s_2,t_2) dans $I \times J$ vérifiant $\|(s_1,t_1) - (s_2,t_2)\|_\infty < \varepsilon$ on ait $|F(s_1,t_1) - F(s_2,t_2)| < \delta$, alors en particulier pour tous s_1 et s_2 dans I et tout t dans J, on a

$$\boxed{|s_1 - s_2| < \delta \Longrightarrow |F(s_1,t) - F(s_2,t)| < \varepsilon.}$$

8.c) Soit j dans $[\![0;n-1]\!]$.

— On pose $I_0 = \mathbf{R}$. Pour tout λ dans I_0, on a $y_\lambda(\xi_0) = 0$ et donc y_λ admet un zéro dans $[\xi_0;\xi_1]$. Si $j \ge 1$, puisque on a $(-1)^{j+1} y_{\lambda_0}(\xi_{2j})(-1)^{j+2} y_{\lambda_0}(\xi_{2j+1}) > 0$, i.e. $y_{\lambda_0}(\xi_{2j}) y_{\lambda_0}(\xi_{2j+1}) < 0$, par continuité de $\lambda \mapsto y_\lambda(x)$ au voisinage de λ_0, pour $x = \xi_{2j}$ et $x = \xi_{2j+1}$, on dispose de I_j un voisinage de λ_0 tel que, pour λ dans I_j, $y_\lambda(\xi_{2j}) y_\lambda(\xi_{2j+1}) < 0$ et donc, en particulier, par continuité de y_λ et d'après le théorème de Bolzano, y_λ admet un zéro dans $[\xi_{2j};\xi_{2j+1}]$.

— Puisque $(-1)^j y'_{\lambda_0} > 0$ sur $[\xi_{2j};\xi_{2j+1}]$ et que y'_{λ_0} est continue sur cet intervalle, d'après le théorème de Weierstrass, on dispose de ε dans $\mathbf{R}_+$ tel que $(-1)^j y'_{\lambda_0} \ge \varepsilon$ sur $[\xi_{2j};\xi_{2j+1}]$. D'après la question précédente, on dispose alors d'un voisinage J_j de λ_0 tel que, pour λ dans J_j et pour tout t dans $[\xi_{2j};\xi_{2j+1}]$, on ait $\left|y'_{\lambda_0}(t) - y'_\lambda(t)\right| < \varepsilon$ et donc, en particulier, $(-1)^j y'_\lambda > 0$ sur $[\xi_{2j};\xi_{2j+1}]$, i.e. pour λ dans J_j, y_λ est strictement monotone sur $[\xi_{2j};\xi_{2j+1}]$ et y admet donc au plus un zéro.

— Puisque $(-1)^j y_{\lambda_0} > 0$ sur $[\xi_{2j+1};\xi_{2j+2}]$ et que y_{λ_0} est continue sur cet intervalle, d'après le théorème de Weierstrass, on dispose de ε dans $\mathbf{R}_+$ tel que $(-1)^j y_{\lambda_0} \ge \varepsilon$ sur $[\xi_{2j+1};\xi_{2j+2}]$. D'après la question précédente, on dispose alors d'un voisinage K_j de λ_0 tel que, pour λ dans K_j et pour tout t dans sur $[\xi_{2j+1};\xi_{2j+2}]$, on ait $|y_{\lambda_0}(t) - y_\lambda(t)| < \varepsilon$ et donc, en particulier, $(-1)^j y_\lambda > 0$ sur $[\xi_{2j+1};\xi_{2j+2}]$, i.e. pour λ dans K_j, y_λ n'admet aucun zéro dans $[\xi_{2j+1};\xi_{2j+2}]$.

Il résulte de cette étude, et puisqu'une intersection finie de voisinages de λ_0 en est un, que pour λ dans $\displaystyle\bigcap_{j=0}^{n-1} (I_j \cap J_j \cap K_j)$,

y_λ a exactement un zéro dans chacun des intervalles $[\xi_{2j};\xi_{2j+1}]$, mais n'en a aucun dans les intervalles $[\xi_{2j-1};\xi_{2j}]$.

On en déduit que, pour λ dans le voisinage précédent, y_λ admet exactement n zéros dans $[0;1]$, i.e. $N(\lambda)=N(\lambda_0)$, i.e. $\boxed{N(\lambda) \text{ est constant dans un voisinage de } \lambda_0.}$

9. Soit λ et μ deux réels vérifiant $0<\mu<\lambda-\rho$. D'après la question 7b on dispose d'une solution y de $E_{1,\mu}$ ayant $1+\left[\dfrac{\sqrt{\mu}}{\pi}\right]$ zéros dans $[0;1]$. On applique alors le résultat de la question 4b avec $u=1$, $v_1=\lambda-\rho$ et $v_2=\mu$, qui vérfient les hypothèses de cette question. On en déduit qu'entre deux zéros de y (au sens strict) on peut trouver un zéro de y_λ et donc que celle-ci admet au moins $\left[\dfrac{\sqrt{\mu}}{\pi}\right]$ zéros dans $]0;1[$. Comme elle s'annule aussi en 0, on en déduit $N(\lambda)\geq 1+\left[\dfrac{\sqrt{\mu}}{\pi}\right]\geq\dfrac{\sqrt{\mu}}{\pi}$. Si $\lambda>\rho$, on peut alors trouver une suite de réels μ vérifiant $0<\mu<\lambda-\rho$ et tendant vers $\lambda-\rho$. Par passage à la limite il vient $N(\lambda)\geq\dfrac{\sqrt{\lambda-\rho}}{\pi}\geq\left[\dfrac{\sqrt{\lambda-\rho}}{\pi}\right]$. Comme cette inégalité s'écrit $N(\lambda)\geq 0$ dans le cas $\lambda=\rho$, elle est encore vrai et on en déduit, pour $\lambda\geq\rho$, $\boxed{N(\lambda)\geq\left[(\lambda-\rho)^{1/2}\pi^{-1}\right].}$

10.a) Soit I un intervalle tel que $y_\lambda(1)$ est non nul pour tout λ dans I. D'après la question 8c, $\lambda\mapsto N(\lambda)$ est alors localement constante, donc continue sur I. Comme $\mathbf{N}$ est discret et I connexe par arcs, on en déduit $\boxed{N(\lambda) \text{ est constant dans } I.}$

10.b) Si l'ensemble des valeurs propres était borné, on disposerait d'un voisinage de l'infini $]a;+\infty[$ sur lequel $y_\lambda(1)$ est non nul pour $\lambda>a$, et donc, d'après la question précédente $N(\lambda)$ serait alors constant pour $\lambda>a$, mais ceci contredit $N(\lambda)\geq\left[(\lambda-\rho)^{1/2}\pi^{-1}\right]$. Par conséquent l'ensemble des valeurs propres n'est pas borné, en particulier

$\boxed{\text{il est non vide et infini.}}$

PARTIE IV

11. D'après le théorème de SCHWARZ, puisque y est une fonction de classe C^∞ en deux variables, l'ordre de dérivation n'importe pas. En dérivant la relation (i), il vient

$$\frac{\partial^3 y}{\partial x^2\partial\lambda}+(\lambda-r)\frac{\partial y}{\partial\lambda}+y=0\,,$$

i.e. (ii). On en déduit, en ajoutant $\lambda-r$ fois la seconde colonne à la première,

$$\begin{vmatrix}\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2} & y\\ \dfrac{\partial^3 y}{\partial x^2\partial\lambda} & \dfrac{\partial y}{\partial\lambda}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & y\\ -y & \dfrac{\partial y}{\partial\lambda}\end{vmatrix}=y^2\,,$$

i.e. (ii). Enfin on a, puisqu'en dérivant la première ligne on obtient la seconde, et en utilisant la multilinéarité du déterminant,

$$\frac{\partial}{\partial x}\begin{vmatrix}\dfrac{\partial y}{\partial\lambda} & y\\ \dfrac{\partial^2 y}{\partial x\partial\lambda} & \dfrac{\partial y}{\partial x}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial y}{\partial\lambda} & y\\ \dfrac{\partial^3 y}{\partial x^2\partial\lambda} & \dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}\end{vmatrix}=y^2$$

et donc, en intégrant par rapport à x, il vient, puisque $y_{\lambda_0}(\lambda_0,1)=y_{\lambda_0}(\lambda_0,0)=0$ et puisque la fonction $\lambda\mapsto y_\lambda(0)$ est identiquement nulle et donc $\dfrac{\partial y}{\partial\lambda}(\lambda_0,0)=0$,

$$\int_0^1 y(\lambda_0,x)^2\,\mathrm{d}x=\left[\begin{vmatrix}\dfrac{\partial y}{\partial\lambda}(\lambda_0,x) & y(\lambda_0,x)\\ \dfrac{\partial^2 y}{\partial x\partial\lambda}(\lambda_0,x) & \dfrac{\partial y}{\partial x}(\lambda_0,x)\end{vmatrix}\right]_0^1=\frac{\partial y}{\partial\lambda}(\lambda_0,1)\frac{\partial y}{\partial x}(\lambda_0,1)\,.$$

Enfin par positivité de l'intégrale et caractérisation des fonctions continues nulles, puisque y_{λ_0} est continue et non identiquement nulle, il en va de même pour $y_{\lambda_0}^2$, et celle-ci est, de surcroît, positive, $\displaystyle\int_0^1 y(\lambda_0, x)^2\, dx > 0$. D'où $\boxed{(ii),\ (iii) \text{ et } (iv).}$

12. On note $n = N(\lambda_0)$. En reprenant la démonstration donnée en 8a on dispose d'une suite strictement croissante $(\xi_j)_{0\leq j\leq 2n-2}$ de réels tels que

$$c_1 = \xi_0 < \xi_1 < \xi_2 < c_2 < \xi_3 < \cdots \xi_{2j-2} < c_j < \xi_{2j-1} < \cdots < \xi_{2n-2} < c_n = \xi_{2n-1} = 1$$

et, pour j dans $[\![1;n]\!]$, $(-1)^{j+1}y'_{\lambda_0}$ est strictement positive sur le voisinage de c_j donné par $[\xi_{2j-2};\xi_{2j-1}]$ et, pour $j < n$, $(-1)^{j+1}y_{\lambda_0} > 0$ sur $[\xi_{2j-1};\xi_{2j}]$. En particulier on a $(-1)^{n+1}y'_{\lambda_0}(1) > 0$ et donc, d'après ce qui précède $(-1)^{n+1}\dfrac{\partial y}{\partial \lambda}(\lambda_0, 1) > 0$.

On introduit alors comme en question 8c des voisinages I_j, J_j et K_j de sorte que :

— pour λ dans I_j, avec $0 \leq j \leq n-2$, $y_\lambda(\xi_{2j})y_\lambda(\xi_{2j+1}) < 0$;

— pour λ dans I_{n-1}, $(-1)^{n+1}\dfrac{\partial y}{\partial \lambda}(\lambda, 1)$ est strictement positif sur $]\xi_{2n-2}; 1[$ et, en particulier, si $\lambda < \lambda_0$ alors $y_\lambda(\xi_{2n-1})y_\lambda(1) > 0$ et si $\lambda > \lambda_0$ alors $y_\lambda(\xi_{2n-1})y_\lambda(1) < 0$;

— pour λ dans J_j et pour tout t dans $[\xi_{2j};\xi_{2j+1}]$, $\left|y'_{\lambda_0}(t) - y'_\lambda(t)\right| < \varepsilon$ et donc, en particulier, $(-1)^j y'_\lambda > 0$ sur $[\xi_{2j};\xi_{2j+1}]$;

— pour λ dans K_j et pour tout t dans sur $[\xi_{2j+1};\xi_{2j+2}]$, $|y_{\lambda_0}(t) - y_\lambda(t)| < \varepsilon$ et donc, en particulier, $(-1)^j y_\lambda > 0$ sur $[\xi_{2j+1};\xi_{2j+2}]$.

Le premier point permet d'assurer au moins $n-1$ zéros, le second en rajoute un si $\lambda > \lambda_0$, le troisième montre qu'on a ainsi trouvé tous les zéros dans les intervalles $[\xi_{2j};\xi_{2j+1}]$ et le dernier montre qu'il n'y en a pas ailleurs dans $[0;1]$. Puisqu'une intersection finie de voisinages de λ_0 en est un, on en conclut qu'on dispose de ε dans $\mathbf{R}_+^*$ tel que

$$\boxed{N(\lambda) = N(\lambda_0) - \mathbb{1}_{\lambda<\lambda_0} \text{ sur }]\lambda_0 - \varepsilon; \lambda_0 + \varepsilon[.}$$

13. D'après la question 6a l'ensemble des valeurs propres est minoré ; on note a un minorant de cet ensemble. D'après la question 10b il est infini non borné ; on note α une valeur propre et, pour x réel, on note $\alpha(x)$ une valeur propre supérieure à x. D'après le raisonnement de la question précédente les valeurs propres sont isolées puisque pour toute valeur propre λ_0 on dispose de ε dans $\mathbf{R}_+$ tel que, sur $]\lambda_0 - \varepsilon; \lambda_0 + \varepsilon[$, $\lambda \mapsto y(\lambda, 1)$ est strictement monotone et donc en particulier injective, ce qui impose $y_\lambda(1) \neq 0$ pour $\lambda \neq \lambda_0$.

On en déduit que dans tout segment il n'y a qu'un nombre fini de valeurs propres. En effet, si ce n'était pas le cas on disposerait d'une suite bornée de valeurs propres toutes distinctes et donc, d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, d'une telle suite qui soit de plus convergente. Par continuité de $\lambda \mapsto y_\lambda(1)$, elle convergerait vers une valeur propre et ceci entre en contradiction avec le fait que cette valeur propre limite est isolée, d'une part, et que la suite est injective, d'autre part. Si $[b;c]$ est un segment contenant au moins une valeur propre, on note $\alpha_{b,c}$ la plus petite des valeurs propres parmi le nombre fini d'entre elles qui appartiennent à $[b;c]$.

On construit alors (λ_n) par récurrence sur n dans $\mathbf{N}^*$. Puisque $[a;\alpha]$ contient une valeur propre, on peut poser $\lambda_1 = \alpha_{a,\alpha}$. De plus si λ est une valeur propre inférieure à α, elle est supérieure à a et donc à λ_1, ce qui entraîne que λ_1 est la plus petite des valeurs propres.

Supposons $(\lambda_k)_{1\leq k\leq n}$ construits de sorte que ce soient des valeurs propres, qu'on ait $\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n$ et que toute autre valeur propre soit strictement supérieure à λ_n. Alors on pose $\lambda_{n+1} = \alpha_{\lambda_n+\varepsilon,\alpha(\lambda_n+\varepsilon)}$ où ε est choisi dans $\mathbf{R}_+^*$ tel qu'il n'y ait aucune valeur propre dans $]\lambda_n; \lambda_n + \varepsilon[$. Alors λ_{n+1} est valeur propre, $\lambda_n < \lambda_{n+1}$ et toute autre valeur propre que $(\lambda_k)_{1\leq k\leq n+1}$ est strictement supérieure à λ_{n+1}.

On en déduit qu'on peut écrire les valeurs propres comme une $\boxed{\text{suite croissante infinie } \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots.}$

D'après les questions 12 et 10a on a, pour tout n dans $\mathbf{N}^*$, $N(\lambda_n) - N(\lambda_1) = n - 1$, i.e. $N(\lambda_n) - n$ est une fonction constante. De plus le raisonnement de la question 6a montre plus précisément que si y_λ admet deux zéros dans $[0;1]$ alors $\lambda \geq \inf_{x\in[0;1]} r(x)$, on en déduit, en utilisant les questions 12 et 10a $N(\lambda_1) - 1 \leq 1$, i.e. $N(\lambda_1) \leq 2$. Comme, par définition d'une valeur propre $N(\lambda_1) \geq 2$, il vient $N(\lambda_1) = 2$ et, finalement, $\boxed{N(\lambda_n) = n + 1.}$