Première composition de mathématiques

X 2009 – MP

Exponentielles d'endomorphisme, intégrales et séries

PARTIE I

On désigne par $C^\infty(\mathbf{R})$ l'espace vectoriel des fonctions réelles, de classe C^∞, d'une variable réelle. On identifie $\mathbf{R}[X]$ à un sous-espace de $C^\infty(\mathbf{R})$ et on confond polynôme et fonction polynomiale. On définit comme suit des endomorphismes de cet espace :

— pour tout f dans $C^\infty(\mathbf{R})$, $(Xf)(x) = xf(x)$, $(Df)(x) = f'(x)$, $(Af)(x) = xf'(x)$,

— pour tout nombre réel t et pour tout f dans $C^\infty(\mathbf{R})$, $(\Phi_t f)(x) = f(e^t x)$.

1) Vérifier que la valeur en $t = 0$ de la dérivée de la fonction $t \mapsto (\Phi_t f)(x)$ est égale à $(Af)(x)$.

   On va maintenant étudier les puissances de A et chercher le sens à donner à la formule $\exp(tA) = \Phi_t$.

2) Vérifier que, si f est un polynôme, la série $\sum_{n\geq 0} \frac{t^n}{n!}(A^n f)(x)$ est convergente et de somme $(\Phi_t f)(x)$.

3) Montrer que, pour tout entier $n > 0$, on a $D^n X = XD^n + nD^{n-1}$.

4) Montrer que, pour tout entier $n > 0$, il existe des nombres réels positifs $\mu_{n,k}$, $k = 1, \cdots, n$, tels que $A^n = \sum_{k=1}^{n} \mu_{n,k} X^k D^k$, et exprimer $\mu_{n,k}$ en fonction des $(\mu_{n-1,p})_{1\leq p\leq n-1}$.
   Préciser les valeurs de $\mu_{n,1}$ et $\mu_{n,n}$.

5) On désigne par f un polynôme d'une variable réelle. Démontrer la relation

$$\forall (t,x) \in \mathbf{R}^2 \quad f(e^t x) = f(x) + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\sum_{n=k}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} \mu_{n,k} \right) x^k f^{(k)}(x) \; .$$

6) Étant donné une suite de nombres réels $(a_k)_{k\in\mathbf{N}}$, comparer les rayons de convergence des séries entières $\sum_{k\geq 0} a_k x^k$ et $\sum_{k\geq 0} k a_k x^k$.

7) Soit f une fonction développable en série entière au voisinage de 0, de rayon de convergence R strictement positif. On note $f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$. On **admettra** la propriété ($\mathbf{P}$) suivante : pour $|x| < R$, la série entière en h, $\sum_{k\geq 0} \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(x)$ a un rayon de convergence au moins égal à $R - |x|$, et **si** $|h| < R - |x|$ **on a** $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(x) = f(x+h)$.

   a) Vérifier que, si $|x| < R$, il existe un réel $\gamma_x > 0$ tel que

$$|t| < \gamma_x \Longrightarrow \left|(e^t - 1)x\right| < R - |x| \; .$$

b) Démontrer l'existence de nombres réels $(\lambda_{n,k})_{1\leq n,k}$, indépendants de f et tels que l'on ait

$$\forall x \in \left]-R;R\right[\,, \quad \forall t \in \left]-\gamma_x;\gamma_x\right[\,, \quad f(e^t x) = f(x) + \sum_{k\geq 1}\left(\sum_{n\geq 1}\frac{t^n}{n!}\lambda_{n,k}\right)x^k f^{(k)}(x)\,.$$

c) Vérifier qu'on a $\lambda_{n,k} = \mu_{n,k}$ si $k \leq n$ et $\lambda_{n,k} = 0$ sinon.
[On pourra utiliser le résultat de la question 5.]

d) Montrer que, pour $1 \leq k \leq n$, on a $\lambda_{n,k} \leq 2^n \dfrac{n!}{(k-1)!}$.

e) On pose $Z_{n,k} = \dfrac{t^n}{n!}\lambda_{n,k} x^k f^{(k)}(x)$. Indiquer deux réels $\alpha > 0$ et $\eta > 0$ tels que

$$|x| < \alpha\,,\ |t| < \eta \Longrightarrow \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}|Z_{n,k}|\right) < +\infty\,.$$

f) Montrer que, si $|x| < \alpha$ et $|t| < \eta$, la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\frac{t^n}{n!}(A^n f)(x)$ est convergente et de somme $(\Phi_t f)(x)$.

PARTIE II

Dans cette partie, on désigne par $\mathcal{F}$ l'espace vectoriel des fonctions f réelles, d'une variable réelle, continues et telles que, pour tout entier $k \geq 0$, la fonction $x \mapsto x^k f(x)$ soit bornée.

8) Soit f une fonction de $\mathcal{F}$. Montrer que, pour tout entier $k \geq 0$, la fonction $x \mapsto x^k f(x)$ est intégrable sur $\mathbf{R}$.

On posera $m_k(f) = \displaystyle\int_{\mathbf{R}} x^k f(x)\,\mathrm{d}x$.

9) Soit f et g deux fonctions de $\mathcal{F}$.

a) Montrer que, pour tout réel x, la fonction $y \mapsto f(x-y)g(y)$ est intégrable sur $\mathbf{R}$.

On notera $f * g$ *la fonction* $x \mapsto \displaystyle\int_{\mathbf{R}} f(x-y)g(y)\,\mathrm{d}y$.

b) Montrer que $f * g$ appartient à $\mathcal{F}$ et écrire une formule de la forme

$$m_k(f * g) = \sum_{p=0}^{k}\gamma_{k,p}\, m_p(f) m_{k-p}(g)\,,$$

où les $\gamma_{k,p}$ sont des coefficients à déterminer.

On **admettra** *la commutativité et l'associativité de l'opération* $(f,g) \mapsto f * g$.

Dans la suite du problème, on désigne par $\mathcal{F}_0$ *l'ensemble des fonctions* f *de* $\mathcal{F}$ *qui sont positives et telles que* $m_0(f) = 1$ *et* $m_1(f) = 0$.

10) Étant donné des fonctions $f_1, \ldots, f_n$ de $\mathcal{F}_0$, calculer $m_0(f_1 * \cdots * f_n)$ et $m_1(f_1 * \cdots * f_n)$ puis exprimer $m_2(f_1 * \cdots * f_n)$ en fonction des $(m_2(f_i))_{1 \leq i \leq n}$.

Pour tout réel $a > 0$, on désigne par T_a l'endomorphisme de $\mathcal{F}$ défini par $(T_a f)(x) = a f(ax)$.

11) Calculer $m_k(T_a f)$.

Dans la suite du problème on désigne par $(f_i)_{i \in \mathbf{N}^*}$, des fonctions de $\mathcal{F}_0$, et, pour tout n, on pose $F_n = f_1 * \cdots * f_n$. On suppose que tous les $m_2(f_i)$ sont majorés par une même constante C.

12) a) Montrer que, pour tout réel $\alpha > 0$, les intégrales $\displaystyle\int_\alpha^{+\infty} (T_n F_n)(x)\,\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^{-\alpha} (T_n F_n)(x)\,\mathrm{d}x$ tendent vers 0 lorsque $n \to +\infty$.

b) Étant donné une fonction h continue bornée sur $\mathbf{R}$, étudier le comportement, lorsque n tend vers $+\infty$, de $\displaystyle\int_{\mathbf{R}} h(x)(T_n F_n)(x)\,\mathrm{d}x$.
[On pourra considérer d'abord le cas où $h(0) = 0$.]

13) a) Établir une inégalité entre $m_4(f)$ et $m_2(f)^2$ lorsque $f \in \mathcal{F}_0$.

b) Démontrer la formule, pour $n \geq 2$,

$$m_4(F_n) = \sum_{i=1}^{n} m_4(f_i) + 6 \sum_{1 \leq i < j \leq n} m_2(f_i) m_2(f_j) \ .$$

c) Trouver une condition portant sur les $m_4(f_i)$ sous laquelle on ait, pour tout $\alpha > 0$,

$$\sum_{n \geq 1} \int_\alpha^{+\infty} (T_n F_n)(x)\,\mathrm{d}x < +\infty \ .$$

PREMIÈRE COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES – X 2009 – MP

PARTIE I

1) Pour x et t réels on a $(\Phi_t f)(x) = f(e^t x)$. Par composition de fonctions de classe C^∞, $t \mapsto (\Phi_t f)(x)$ est une fonction de classe C^∞ en t, de dérivée donnée par $e^t x f'(e^t x)$ et donc la valeur en 0 de sa dérivée est $xf'(x)$, i.e. $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[(\Phi_t f)(x)\right](0) = (Af)(x).}$

2) Soit k dans $\mathbf{N}$ et f la fonction polynomiale associée à X^k. On a donc $Af = kf$ et donc la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{t^n}{n!}(A^n f)(x)$ est la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{(kt)^n}{n!} f(x)$, qui est convergente de somme $e^{kt} f(x)$, i.e. $(e^t x)^k$. La formule est donc valide lorsque f est un élément de la base canonique de $\mathbf{R}[X]$. Or les quantités étudiées sont linéaires en f, et donc pour f polynomiale, la série $\boxed{\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{t^n}{n!}(A^n f)(x) \text{ est convergente et sa somme est } (\Phi_t f)(x).}$

3) Soit n dans $\mathbf{N}^*$. Il résulte de la formule de LEIBNIZ de dérivation d'un produit qu'on a $D^n X = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D^k(X) D^{n-k}$ et donc $\boxed{D^n X = X D^n + n D^{n-1}.}$

4) On a $A = XD$ et, pour k dans $\mathbf{N}^*$, $X^k D^k X D = X^{k+1} D^{k+1} + k X^k D^k$ d'après la question précédente. On en déduit par une récurrence immédiate que, pour tout entier $n > 0$, il existe des nombres réels positifs $(\mu_{n,k})_{1\leq k\leq n}$ tels que $\boxed{A^n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mu_{n,k} X^k D^k}$ avec, pour $1 \leq k \leq n$ et en convenant $\mu_{n-1,0} = \mu_{n-1,n} = 0$, $\boxed{\mu_{n,k} = k\mu_{n-1,k} + \mu_{n-1,k-1}.}$
En particulier il vient $\mu_{n,1} = \mu_{n-1,1}$ et $\mu_{n,n} = \mu_{n-1,n-1}$ et, comme on a $\mu_{1,1} = 1$, on en déduit $\boxed{\mu_{n,1} = \mu_{n,n} = 1.}$

5) On déduit de ce qui précède que pour $1 \leq k \leq n$ on a $0 \leq \mu_{n,k} \leq (2k)^n$ puisque c'est vrai pour tout n si $k = 1$ et donc en particulier si $n = 1$, et qu'on a

$$\frac{2^{n-1}k^n + 2^{n-1}(k-1)^{n-1}}{2^n k^n} \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \leq 1$$

et donc, pour tout t réel et tout k dans $\mathbf{N}^*$, $\displaystyle\sum_{n\geq k} \mu_{n,k} \frac{t^n}{n!}$ converge par majoration de la valeur absolue du terme général par celui de $\exp(2k\,|t|)$. En utilisant la question 2 et la question précédente, il vient, pour x et t réels, et en notant d le degré de f :

$$\begin{aligned}
f(e^t x) &= f(x) + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n}{n!}(A^n f)(x) \\
&= f(x) + \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=1}^{n} \mu_{n,k} \frac{t^n}{n!} x^k f^{(k)}(x) \\
&= f(x) + \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=1}^{\min(n,d)} \mu_{n,k} \frac{t^n}{n!} x^k f^{(k)}(x)
\end{aligned}$$

et donc, puisque les séries $\sum_{n\geq k} \mu_{n,k}\frac{t^n}{n!}$ sont toutes convergentes, par linéarité de la somme on en déduit

$$f(e^t x) = f(x) + \sum_{k=1}^{d}\left(\sum_{n=k}^{+\infty}\mu_{n,k}\frac{t^n}{n!}\right)x^k f^{(k)}(x)$$

ou encore, puisque $f^{(k)}$ est nulle pour $k>d$, $\boxed{f(e^t x) = f(x) + \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\sum_{n=k}^{+\infty}\frac{t^n}{n!}\mu_{n,k}\right)x^k f^{(k)}(x).}$

6) Le lemme d'Abel permet d'affirmer que ces rayons de convergence sont $\boxed{\text{égaux.}}$

7) a. Par continuité de l'exponentielle en 0 et linéarité de la limite on a, pour x réel, $(e^t-1)x = o(1)$ et donc, si $|x|<R$, alors $R-|x|>0$ et on dispose de γ_x strictement positif tel que, si $|t|<\gamma_x$, alors $\boxed{|(e^t-1)x| < R-|x|.}$

b. Soit x dans $]-R;R[$ et t dans $]-\gamma_x;\gamma_x[$, d'après la propriété admise et la propriété définissant γ_x, on a donc

$$f(e^t x) = f(x) + \sum_{k=1}^{+\infty} f^{(k)}(x)\frac{\left((e^t-1)x\right)^k}{k!}\ .$$

Or l'exponentielle est développable en série entière en 0, avec rayon de convergence infini, et donc il en va de même pour $t\mapsto e^t-1$ qui, de plus, est nulle en 0. Il en va alors de même pour les puissances de cette fonction et leurs multiples, i.e. on dispose de nombres réels $(\lambda_{n,k})_{1\leq k,n}$, indépendants de f (et de x) et tels que l'on ait

$$\boxed{f(e^t x) = f(x) + \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{t^n}{n!}\lambda_{n,k}\right)x^k f^{(k)}(x).}$$

c. Pour n et k dans $\mathbf{N}^*$ on pose $\tilde{\mu}_{n,k} = \mu_{n,k}$ si $k\leq n$ et $\tilde{\mu}_{n,k}=0$ sinon. Pour f une fonction polynomiale réelle. Elle est développable en série entière sur $\mathbf{R}$ et donc d'après les questions 2 et 5, on a pour tout t réel

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(\lambda_{n,k}-\tilde{\mu}_{n,k})t^n}{n!}\right)X^k D^k(f) = 0\,,$$

puisque l'identité est vraie en tant que fonction de x pour tout x (car on peut choisir R arbitraire) et tout t (car on peut choisir γ_x arbitraire). Ces identités pour f variant dans la base canonique fournissent un système triangulaire d'équations, puisque X^p est vecteur propre de $X^k D^k$ pour la valeur propre $p(p-1)\cdots(p-k+1)$, et une récurrence immédiate fournit :

$$\forall k\in\mathbf{N}^*\ \forall t\in\mathbf{R}\quad \frac{(e^t-1)^k}{k!} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\lambda_{n,k}}{n!}t^n = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\mu_{n,k}}{n!}t^n\ .$$

Par unicité du développement en série entière, puisque le rayon de convergence est non nul, on a, pour tous k et n dans $\mathbf{N}^*$, $\lambda_{n,k}=\tilde{\mu}_{n,k}$, i.e. $\boxed{\lambda_{n,k}=\mu_{n,k} \text{ si } k\leq n \text{ et } \lambda_{n,k}=0 \text{ sinon.}}$

d. On déduit de la question 4 et de la question précédente qu'on a, pour k et n dans strictement supérieurs à 1, $\lambda_{n,k} = k\lambda_{n-1,k} + \lambda_{n-1,k-1}$, puisque pour $k > n$ l'identité s'écrit $0 = 0k + 0$ et pour $k = n$ elle s'écrit $1 = 0k + 1$. On en déduit

$$\begin{aligned}\frac{k!}{n!}\lambda_{n,k} &= \frac{k}{n}\left(\frac{k!}{(n-1)!}\lambda_{n-1,k} + \frac{(k-1)!}{(n-1)!}\lambda_{n-1,k-1}\right)\\ &\leq \frac{k!}{(n-1)!}\lambda_{n-1,k} + \frac{(k-1)!}{(n-1)!}\lambda_{n-1,k-1}\end{aligned}$$

puisque pour $k > n$ toutes les quantités sont nulles. Par récurrence immédiate, il vient $\dfrac{k!}{n!}\lambda_{n,k} \leq k2^n$ puisque, pour $n = 1$, le seul point à vérifier est $n = k = 1$, i.e. $\lambda_{1,1} = 1 \leq 2$, puisque pour $k > 1$ on a $\lambda_{1,k} = 0 \leq 2k$. Il en résulte $\boxed{\lambda_{n,k} \leq 2^n \dfrac{n!}{(k-1)!}.}$

Remarque : cette démonstration donne directement $\lambda_{n,k} \leq 2^{n-1}\dfrac{n!}{(k-1)!}$.

e. Comme vu durant la démonstration la majoration précédente est valide pour k et n dans $\mathbf{N}^*$. On en déduit pour k et n dans $\mathbf{N}^*$ et x et t réels

$$|Z_{n,k}| \leq (2\,|t|)^n \frac{|x|^k}{(k-1)!}\left|f^{(k)}(x)\right| \ .$$

En particulier si $|t| < \dfrac{1}{2}$, comme on majore par une série géométrique, la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} |Z_{n,k}|$ converge et par inégalité triangulaire sa somme est majorée par $\dfrac{2\,|t|}{1-2\,|t|}\dfrac{|x|^k}{(k-1)!}\left|f^{(k)}(x)\right|$.

Or, comme séries entières en u, $\sum \dfrac{u^k}{(k-1)!}f^{(k)}(x)$ et $\sum \dfrac{u^k}{k!}f^{(k)}(x)$ ont même rayon de convergence par le lemme d'Abel (question 6) et comme ce dernier est au moins égal à $R - |x|$ d'après la propriété admise sur les fonctions développables en série entière, pour $|x| < \dfrac{R}{2}$, la série précédente converge absolument en particulier pour $u = x$, i.e.

$$\boxed{\text{pour } \alpha = \frac{R}{2} \text{ et } \eta = \frac{1}{2}, \text{ on a } (|x| < \alpha \text{ et } |t| < \eta) \Longrightarrow \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} |Z_{n,k}|\right) < +\infty.}$$

f. Pour $|x| < \alpha$ et $|t| < \eta$ la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} Z_{n,k}$ est absolument convergente d'après ce qui précède, donc convergente et sa somme est majorée en valeur absolue, par inégalité triangulaire, par $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} |Z_{n,k}|$. Il en résulte, toujours grâce à la question précédente que la série $\displaystyle\sum_{k\geq 1}\sum_{n=1}^{+\infty} Z_{n,k}$ est absolument convergente. De plus d'après le théorème de Tonnelli appliqué aux familles de réels positifs, et d'après la question précédente, la série $\displaystyle\sum_{k\geq 1} |Z_{n,k}|$ converge pour tout n dans $\mathbf{N}^*$ et la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\sum_{k=1}^{+\infty} |Z_{n,k}|$ converge également (et sa somme est celle obtenue avant interversion des signes somme). On en déduit comme précédemment que les séries $\sum_{k\geq 1} Z_{n,k}$ et $\sum_{n\geq 1}\sum_{k=1}^{+\infty} Z_{n,k}$ sont absolument convergentes donc convergentes, et qu'on peut appliquer le théorème de Fubini discret. On en déduit donc qu'on a alors

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty} Z_{n,k} = \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=1}^{+\infty} Z_{n,k} \ .$$

D'après les questions 7c et 4, on a, pour $n \geq 1$, $\sum_{k=1}^{+\infty} Z_{n,k} = \dfrac{t^n}{n!}(A^n f)(x)$. D'après la question 7b, si de plus $|t| < \gamma_x$, on a $\sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty} Z_{n,k} = f(e^t x) - f(x)$, d'où le résultat dans ce cas là. Par ailleurs si $\left|e^t - 1\right| < 1$, alors $\left|(e^t-1)x\right| \leq |x| < R - |x|$. Or par croissance de l'exponentielle, pour $|t| < \dfrac{1}{2}$, on a $0 < e^t < \sqrt{e} < 2$ puisque $e < 4$, et donc $\left|e^t - 1\right| < 1$. On en déduit $\gamma_x \geq \dfrac{1}{2}$ et il en résulte, pour $|t| < \eta = \dfrac{1}{2}$ et $|x| < \alpha = \dfrac{R}{2}$, $\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{t^n}{n!}(A^n f)(x) = (\Phi_t f)(x).}$

PARTIE II

On étend l'opérateur X à $\mathcal{F}$.

8) Soit k dans $\mathbf{N}$. Puisque f est continue sur $\mathbf{R}$, $X^k f$ aussi et y est donc localement intégrable. Puisque $X^k f$ et $X^{k+2} f$ sont bornées par hypothèse, il en va de même pour $(1+X^2)X^k f$, i.e. $x^k f(x) = O\left(\dfrac{1}{1+x^2}\right)$ au voisinage de $\pm\infty$ et donc, par comparaison à une fonction continue positive et intégrable sur $\mathbf{R}$, $\boxed{x \mapsto x^k f(x) \text{ est intégrable sur } \mathbf{R}.}$

9) a. Soit x un réel. Par hypothèse f est bornée sur $\mathbf{R}$ et d'après la question précédente g est intégrable sur $\mathbf{R}$. Comme f et g sont continues sur $\mathbf{R}$, par composition par une application affine et par produit, il en va de même pour la fonction $y \mapsto f(x-y)g(y)$ et celle-ci étant dans $O(|g|)$, par comparaison, $\boxed{y \mapsto f(x-y)g(y) \text{ est intégrable sur } \mathbf{R}.}$

b. Comme f et g sont continues sur $\mathbf{R}$, par composition par une application linéaire et par produit, il en va de même pour la fonction $(x,y) \mapsto f(x-y)g(y)$ et donc aussi de ses applications partielles. Comme on a obtenu à la question précédente une majoration indépendante de x, par continuité sous le signe intégral, on en déduit que $f * g$ est continue sur $\mathbf{R}$.

Pour k entier naturel et x et y réels, on écrit

$$x^k f(x-y)g(y) = \sum_{p=0}^{k} \binom{k}{p} (x-y)^{k-p} f(x-y) y^p g(y)$$

et donc, puisque f appartient à $\mathcal{F}$ et par inégalité triangulaire

$$\left|x^k f(x-y)g(y)\right| \leq \sum_{p=0}^{k} \binom{k}{p} \sup_{t\in\mathbf{R}} \left|t^{k-p} f(t)\right| |y^p g(y)|$$

et donc, par intégration et inégalité triangulaire,

$$\left|x^k f * g(x)\right| \leq \sum_{p=0}^{k} \binom{k}{p} \sup_{t\in\mathbf{R}} \left|t^{k-p} f(t)\right| \int_{\mathbf{R}} |y^p g(y)| \,\mathrm{d}y\,,$$

ce qui est licite car g appartient à $\mathcal{F}$ et d'après la question 8 et par conséquent $\boxed{f * g \text{ appartient à } \mathcal{F}.}$

On va montrer que pour tous entiers p et q on a

$$\int_{\mathbf{R}} \left(\int_{\mathbf{R}} (x-y)^p f(x-y) y^q g(y)\,\mathrm{d}y\right) \mathrm{d}x = \int_{\mathbf{R}} \left(\int_{\mathbf{R}} (x-y)^p f(x-y) y^q g(y)\,\mathrm{d}x\right) \mathrm{d}y\ .$$

Comme, par changement de variable affine, pour tout y réel on a

$$\int_{\mathbf{R}} (x-y)^p f(x-y) y^q g(y)\,\mathrm{d}x = y^q g(y) \int_{\mathbf{R}} t^p f(t)\,\mathrm{d}t = m_p(f)$$

on en déduira

$$\begin{aligned} m_k(f*g) &= \sum_{p=0}^{k} \binom{k}{p} \int_{\mathbf{R}} \int_{\mathbf{R}} (x-y)^p f(x-y) y^{k-p} g(y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\ &= \sum_{p=0}^{k} \binom{k}{p} \int_{\mathbf{R}} m_p(f) y^{k-p} g(y)\,\mathrm{d}y = \sum_{p=0}^{k} \binom{k}{p} m_p(f) m_{k-p}(g)\,, \end{aligned}$$

i.e. $\boxed{\gamma_{k,p} = \binom{k}{p}.}$ On considère, comme fonction de x,

$$\varphi(x) = \int_{\mathbf{R}} (x-y)^p f(x-y) y^q g(y)\,\mathrm{d}y\ .$$

En développant $(x-y)^p$ par la formule du binôme, on se ramène à considérer, comme fonction de x des intégrales de la forme $\displaystyle\int_{\mathbf{R}} f(x-y) y^r g(y)\,\mathrm{d}y$. Comme l'intégrande est majoré indépendamment de x par $\sup_{\mathbf{R}} |f|\,|y^r g(y)|$, qui représente une fonction intégrable, le théorème de continuité sous le signe intégral permet de conclure que φ est continu sur $\mathbf{R}$. De plus on a déjà démontré que la fonction ainsi obtenue est intégrable sur $\mathbf{R}$. On peut donc considérer l'application Φ donnée par

$$\Phi(t) = \int_{-\infty}^{t} \varphi(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{t} \int_{\mathbf{R}} (x-y)^p f(x-y) y^q g(y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x\ .$$

Cette fonction est caractérisée par le fait que c'est une primitive de φ, de limite nulle en $-\infty$, d'après le théorème de Leibniz-Newton (théorème fondamental du calcul différentiel et intégral). On considère maintenant l'application ψ donnée à y fixé par

$$\psi(t) = \int_{-\infty}^{t} (x-y)^p f(x-y) y^q g(y) \, \mathrm{d}x \ .$$

Comme l'intégrande est une fonction intégrable sur $\mathbf{R}$, ψ est bien défini, et sa dérivée par rapport à t est donnée par $x \mapsto (x-y)^p f(x-y) y^q g(y)$. Comme ψ et sa dérivée sont dans $O\left(|y^q g(y)|\right)$, la majoration étant indépendant de t, le théorème de Leibniz de dérivation sous le signe intégral permet de conclure que l'application

$$t \mapsto \int_{\mathbf{R}} \int_{-\infty}^{t} (x-y)^p f(x-y) y^q g(y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$$

est bien définie, de classe C^1 et de dérivée égale à φ. Comme sa limite en $-\infty$ est nulle, par continuité sous le signe intégral, on en déduit que pour tout x réel

$$\int_{-\infty}^{t} \left(\int_{\mathbf{R}} (x-y)^p f(x-y) y^q g(y) \, \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_{\mathbf{R}} \left(\int_{-\infty}^{t} (x-y)^p f(x-y) y^q g(y) \, \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y \ .$$

et donc, par intégrabilité et continuité sous le signe intégral, en prenant la limite en $+\infty$, il vient

$$\int_{\mathbf{R}} \left(\int_{\mathbf{R}} (x-y)^p f(x-y) y^q g(y) \, \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_{\mathbf{R}} \left(\int_{\mathbf{R}} (x-y)^p f(x-y) y^q g(y) \, \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y \ .$$

10) D'après la formule précédente, on a, pour f et g dans $\mathcal{F}_0$, $m_0(f*g) = m_0(f)m_0(g) = 1$, $m_1(f*g) = m_0(f)m_1(g) + m_1(f)m_0(g) = 0$ et $m_2(f*g) = m_0(f)m_2(g) + 2m_1(f)m_1(g) + m_2(f)m_0(g) = m_2(f) + m_2(g)$ et donc $f*g \in \mathcal{F}_0$ et $m_2(f*g) = m_2(f)+m_2(g)$. Par récurrence immédiate on en déduit, puisque $\mathcal{F}_0$ est stable par $(f,g) \mapsto f*g$,

$$\boxed{m_0(f_1 * \cdots * f_n) = 1,\ m_1(f_1 * \cdots * f_n) = 0 \text{ et } m_2(f_1 * \cdots * f_n) = \sum_{i=1}^{n} m_2(f_i).}$$

11) Par changement de variable affine bijectif, il vient $\boxed{m_k(T_a f) = a^{-k} m_k(f).}$

12) a. Soit $\alpha > 0$. Puisqu'on a affaire à des fonctions dans $\mathcal{F}_0$, il vient (par analogie avec l'inégalité de Bienaymé-Tchebycheff) par positivité et puisque $\mathbb{1}_{[\alpha;+\infty]} \leq \dfrac{x^2}{\alpha^2} \mathbb{1}_{[\alpha;+\infty]}$,

$$0 \leq \int_{\alpha}^{+\infty} (T_n F_n)(x) \, \mathrm{d}x \leq \frac{1}{\alpha^2} m_2(T_n F_n) = \frac{1}{n^2 \alpha^2} m_2(F_n) = \frac{C}{n\alpha^2} = o\left(1\right) \ .$$

Par changement de variable $x \mapsto -x$, $\mathcal{F}_0$ est stable par l'application qui à f associe $x \mapsto f(-x)$ et en appliquant le résultat précédent aux transformées des f_i par cette application, puis en effectuant le changement de variable inverse, on obtient

$$\boxed{\lim \int_{\alpha}^{+\infty} (T_n F_n)(x) \, \mathrm{d}x = \lim \int_{-\infty}^{-\alpha} (T_n F_n)(x) \, \mathrm{d}x = 0.}$$

b. Pour n dans $\mathbf{N}^*$, puisque h est continue et bornée et $T_n F_n$ continue et intégrable sur $\mathbf{R}$, $hT_n F_n$ est continue et intégrable sur $\mathbf{R}$. On écrit, pour $\alpha > 0$,

$$h - h(0) = (h - h(0))\mathbb{1}_{[-\alpha;\alpha]} + (h - h(0))\mathbb{1}_{\mathbf{R}\setminus[-\alpha;\alpha]}$$

et il vient par inégalité triangulaire

$$|h - h(0)| \leq \sup_{-\alpha \leq x \leq \alpha} |h(x) - h(0)|\, \mathbb{1}_{[-\alpha;\alpha]} + 2\sup_{\mathbf{R}} |h|\, \mathbb{1}_{\mathbf{R}\setminus[-\alpha;\alpha]}\ .$$

Soit ε dans $\mathbf{R}_+^*$, par continuité de h en 0, on dispose de α tel qu'on ait $\sup\limits_{-\alpha \leq x \leq \alpha} |h(x) - h(0)| \leq \varepsilon$. Il en résulte que, pour tout n dans $\mathbf{N}^*$ et par positivité de $T_n F_n$,

$$|(h - h(0))T_n F_n| \leq \varepsilon T_n F_n + 2\sup_{\mathbf{R}} |h|\, \mathbb{1}_{\mathbf{R}\setminus[-\alpha;\alpha]} T_n F_n\ .$$

Comme on a $m_0(T_n F_n) = 1$, il vient

$$\int_{\mathbf{R}} h(x)(T_n F_n)(x)\,\mathrm{d}x - h(0) = \int_{\mathbf{R}} (h(x) - h(0))(T_n F_n)(x)\,\mathrm{d}x$$

et donc, d'après la question précédente on dispose de N dans $\mathbf{N}^*$ tel que pour $n \geq N$ on ait, par inégalité triangulaire ainsi qu'inégalité de la moyenne,

$$\left| \int_{\mathbf{R}} h(x)(T_n F_n)(x)\,\mathrm{d}x - h(0) \right| \leq \varepsilon + 2\sup_{\mathbf{R}} |h|\, \varepsilon$$

ce qui montre $\boxed{\lim \int_{\mathbf{R}} h(x)(T_n F_n)(x)\,\mathrm{d}x = h(0).}$

13) a. Soit f dans $\mathcal{F}_0$. Par positivité de f on peut considérer $X^2\sqrt{f}$ et $\sqrt{f}$ et ces deux fonctions sont de carré intégrable sur $\mathbf{R}$. Il résulte de l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ $m_2(f)^2 \leq m_4(f)m_0(f) = m_4(f)$ et donc $\boxed{m_4(f) \geq m_2(f)^2.}$

b. D'après la question 9b pour des fonctions f et g dans $\mathcal{F}_0$, on a $m_4(f * g) = m_4(f) + 6m_2(f)m_2(g) + m_4(g)$. Il en résulte par récurrence immédiate et en utilisant la stabilité de $\mathcal{F}_0$ par produit de convolution et l'additivité des moments d'ordre 2,

$$\boxed{m_4(F_n) = \sum_{i=1}^{n} m_4(f_i) + 6 \sum_{1 \leq i < j \leq n} m_2(f_i)m_2(f_j).}$$

c. Comme pour le cas particulier de la loi des grands nombres démontré par MARKOV, on suppose que les f_i ont un moment d'ordre 4 majoré par une constante K indépendante de i. Il vient alors, par analogue de l'inégalité de MARKOV et positivité,

$$\forall n \in \mathbf{N} \quad 0 \leq \int_{\alpha}^{+\infty} (T_n F_n)(x)\,\mathrm{d}x \leq \frac{1}{\alpha^4} m_4(T_n F_n) = \frac{m_4(F_n)}{n^4 \alpha^4}\ .$$

D'après les deux questions précédentes il vient

$$m_4(F_n) \leq nK + 6\frac{n(n-1)}{2}\sqrt{K}\sqrt{K} = O\left(n^2\right)$$

et donc $\displaystyle\int_{\alpha}^{+\infty}(T_nF_n)(x)\,\mathrm{d}x = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Par comparaison entre séries à termes positifs avec une série de Riemann, on en déduit que la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\int_{\alpha}^{+\infty}(T_nF_n)(x)\,\mathrm{d}x$ converge dès que $\boxed{\exists K \in \mathbf{R}_+,\ \forall i \in \mathbf{N}^*,\ m_4(f_i) \leq K.}$