Composition de mathématiques - B
École polytechnique– MP

Transformation d'Euler et accélération de la convergence

Dans ce problème, $\mathbf{R}$ désigne l'ensemble des réels, $\mathbf{R}_+$ est l'ensemble des réels positifs et $\mathbf{R}_+^*$ l'ensemble des réels strictement positifs. La notation $\mathbf{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels et $\mathbf{N}^*$ l'ensemble des entiers naturels non nuls.
On note E l'espace vectoriel des suites réelles. On note $u = (u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite réelle de terme général u_n. On considère l'endomorphisme Δ de E qui à toute suite $u = (u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ associe la suite de terme général $(\Delta u)_n = u_{n+1} - u_n$, $n \in \mathbf{N}$.
On pose, pour k et n dans $\mathbf{N}$, $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!\ (n-k)!}$ si $n \geq k$. On convient $0! = 1$ et $\binom{n}{k} = 0$ si $k > n$.
Les candidat(e)s vérifieront la convergence des séries rencontrées, même si cela n'est pas explicitement demandé.

PARTIE I - Suites complètement monotones

Pour tout $p \in \mathbf{N}^*$, on note Δ^p le p-ième itéré de Δ défini par $\Delta^p = \Delta \circ \Delta^{p-1}$, et par convention, Δ^0 est l'identité de E.
On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est complètement monotone si pour tous entiers naturels p et n on a

$$(-1)^p(\Delta^p u)_n > 0\ .$$

1) Soit f une fonction sur $\mathbf{R}_+$ à valeurs réelles et indéfiniment dérivable. On considère la suite de terme général $u_n = f(n)$.
   a) Montrer que pour tout entier $p \geq 1$ et tout entier n, il existe un réel x dans l'intervalle $]n; n+p[$ tel que $(\Delta^p u)_n = f^{(p)}(x)$.
   On pourra raisonner par récurrence en considérant la fonction $g(x) = f(x+1) - f(x)$ et la suite de terme général $v_n = g(n)$.
   b) On considère la suite de terme général $a_n = \dfrac{1}{n+1}$. Montrer que $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est complètement monotone.
2) a) Démontrer que pour tout entier p, on a

$$(\Delta^p u)_n = \sum_{k=0}^{p} (-1)^{p-k} \binom{p}{k} u_{n+k}\ .$$

   b) Soit $b \in]0; 1[$. On considère la suite de terme général $b_n = b^n$. Calculer $(\Delta^p b)_n$ pour tous les entiers naturels n et p et en déduire que $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est complètement monotone.
3) Soit ω une fonction continue et positive sur $[0; 1]$, non identiquement nulle. Jusqu'à la fin de la première partie, on considère la suite de terme général $u_n = \displaystyle\int_0^1 t^n \omega(t)\,\mathrm{d}t$.
   a) Montrer que la série de terme général $(-1)^k u_k$ converge et que

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k u_k = \int_0^1 \frac{\omega(t)}{1+t}\,\mathrm{d}t\ .$$

b) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est complètement monotone.

c) Démontrer
$$\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k u_k = \frac{1}{2}\sum_{p=0}^{+\infty}\int_0^1 \left(\frac{1-t}{2}\right)^p \omega(t)\,\mathrm{d}t\ .$$

4) On pose $\mathcal{E}_n = \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\int_0^1 \left(\frac{1-t}{2}\right)^k \omega(t)\,\mathrm{d}t$.

a) Montrer $\mathcal{E}_n = \displaystyle\sum_{p=0}^{n}\frac{(-1)^p}{2^{p+1}}(\Delta^p u)_0$ et en déduire que l'on a
$$\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k u_k = \sum_{p=0}^{+\infty}\frac{(-1)^p}{2^{p+1}}(\Delta^p u)_0\ .$$

b) On pose $S = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k u_k$. Montrer $|S-\mathcal{E}_n| \le \dfrac{S}{2^{n+1}}$.

5) Déduire des questions précédentes
$$\ln(2) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+1} = \sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(p+1)2^{p+1}}$$
et
$$\ln(2) - \sum_{p=0}^{n}\frac{1}{(p+1)2^{p+1}} = o\left(\ln(2) - \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k+1}\right)\ .$$

PARTIE II - Transformée d'Euler

Dans cette partie, on se donne une suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ telle que la série de terme général $(-1)^n u_n$ soit convergente, et l'on note S sa somme. **On ne suppose aucune autre propriété particulière de cette suite** $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$. Le but est de démontrer
$$S = \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k u_k = \sum_{p=0}^{+\infty}\frac{(-1)^p}{2^{p+1}}(\Delta^p u)_0\ .$$

On dit que la série $\sum \dfrac{(-1)^p}{2^{p+1}}(\Delta^p u)_0$ est la transformée d'Euler de la série $\sum(-1)^k u_k$.

6) a) Montrer que pour tout $p\in\mathbf{N}$, on a $\lim_{n\to\infty}(\Delta^p u)_n = 0$.

b) Montrer que pour toute suite $(r_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de limite nulle, on a $\displaystyle\lim_{p\to\infty}\frac{1}{2^p}\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}r_k = 0$.

7) a) Montrer que pour tout $n\in\mathbf{N}$, on a
$$u_n = \sum_{p=0}^{+\infty}\left(\frac{(-1)^p}{2^p}(\Delta^p u)_n - \frac{(-1)^{p+1}}{2^{p+1}}\left(\Delta^{p+1}u\right)_n\right)\ .$$

b) Montrer que pour tout $p \in \mathbf{N}$, on a

$$\frac{(-1)^p}{2^{p+1}} (\Delta^p u)_0 = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{(-1)^p}{2^p} (\Delta^p u)_n - \frac{(-1)^{p+1}}{2^{p+1}} \left(\Delta^{p+1} u\right)_n \right) .$$

8) a) On pose $E_n = \sum_{p=0}^{n} \frac{(-1)^p}{2^{p+1}} (\Delta^p u)_0$. Montrer

$$E_n - S = -\frac{1}{2^{n+1}} \sum_{p=0}^{n+1} \binom{n+1}{p} \left(\sum_{k=p}^{+\infty} (-1)^k u_k \right) .$$

b) Conclure.

PARTIE III - Une amélioration de la méthode

Dans cette partie, comme dans la question 3, on se donne une fonction ω continue et positive sur $[0;1]$, non identiquement nulle. On considère la suite de terme général $u_n = \int_0^1 t^n \omega(t)\, \mathrm{d}t$ et on pose $S = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k u_k$.

On se donne aussi une suite de polynômes à coefficients réels $(P_n)_{n \in \mathbf{N}}$ telle que pour tout n, $P_n(-1) \neq 0$. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on pose

$$T_n = \frac{1}{P_n(-1)} \int_0^1 \frac{P_n(-1) - P_n(t)}{1+t} \omega(t)\, \mathrm{d}t .$$

9) a) Montrer $S - T_n = \int_0^1 \frac{P_n(t)}{P_n(-1)(1+t)} \omega(t)\, \mathrm{d}t$.

b) En déduire $|S - T_n| \leq \frac{S M_n}{|P_n(-1)|}$ où $M_n = \sup_{t \in [0;1]} |P_n(t)|$.

10) Dans cette question, on choisit comme suite de polynômes $P_n = (1-X)^n$. Donner une majoration explicite de $|S - T_n|$, en fonction de S et n.

11) Dans cette question, on choisit comme suite de polynômes $P_n = (1-2X)^n$. Donner une majoration explicite de $|S - T_n|$, en fonction de S et n.

12) a) Démontrer l'existence et l'unicité d'une suite de polynômes $(P_n)_{n \in \mathbf{N}}$ vérifiant les conditions suivantes : pour tout $n \in \mathbf{N}$, pour tout $t \in \mathbf{R}$, $\deg P_n = n$ et $P_n(\sin^2(t)) = \cos(2nt)$.

b) Calculer $P_n(-1)$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.

c) Donner une majoration explicite de $|S - T_n|$.

PARTIE IV - Comparaison des méthodes sur un exemple

Dans cette partie, $u_n = \frac{1}{n+1}$, $S = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k u_k$, $S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k u_k$, $E_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)2^{k+1}}$ et $T_n = \frac{1}{P_n(-1)} \int_0^1 \frac{P_n(-1) - P_n(t)}{1+t} \mathrm{d}t$, où les P_n sont les polynômes de la question 12.

13) Donner un équivalent de $S - S_n$ et de $S - E_n$. Comparez la vitesse de convergence de T_n avec celle de S_n et E_n. Donner un équivalent de $S - T_n$.

Composition B – X 2011 - MP

PARTIE I - Suites complètement monotones

1) a) Soit, pour p dans $\mathbf{N}^*$, l'assertion $(\mathcal{H}_p)$: « pour toute fonction f indéfiniment dérivable de $\mathbf{R}_+$ dans $\mathbf{R}$ et tout entier naturel n, il existe x dans $]n; n+p[$ tel que $(\Delta^p u)_n = f^{(p)}(x)$, où la suite u est définie par $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_n = f(n)$. »

Soit alors f indéfiniment dérivable de $\mathbf{R}_+$ dans $\mathbf{R}$ et n dans $\mathbf{N}$; d'après le théorème de Lagrange (égalité des accroissements finis), il existe x dans $]n; n+1[$ tel que $(\Delta u)_n = f(n+1) - f(n) = f'(x)$. Il en résulte que $(\mathcal{H}_1)$ est vraie.

Soit p dans $\mathbf{N}^*$ et f indéfiniment dérivable de $\mathbf{R}_+$ dans $\mathbf{R}$. Définissons g de $\mathbf{R}_+$ dans $\mathbf{R}$ par $g(x) = f(x+1) - f(x)$. Alors g est indéfiniment dérivable et la suite v définie par $v_n = g(n)$ est égale à Δu. Il en résulte $\Delta^{p+1} u = \Delta^p v$ et, pour x dans $]n; n+p[$, $g^{(p)}(x) = f^{(p)}(x+1) - f^{(p)}(x)$, de sorte que, pour un tel x, le théorème de Lagrange assure l'existence d'un y dans $]n; n+p+1[$ tel que $g^{(p)}(x) = f^{(p+1)}(y)$. Il en résulte que $(\mathcal{H}_p)$ est héréditaire. Le principe de récurrence permet donc de conclure

> pour toute fonction f indéfiniment dérivable de $\mathbf{R}_+$ dans $\mathbf{R}$, pour tout entier $p \geq 1$ et tout entier n, il existe un réel x dans l'intervalle $]n; n+p[$ tel que $(\Delta^p u)_n = f^{(p)}(x)$.

b) On applique ce qui précède à la fonction f définie sur $\mathbf{R}_+$ par $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$. En tant que fraction rationnelle sans pôle sur son domaine de définition, il s'agit d'une fonction indéfiniment dérivable et sa dérivée d'ordre p, pour tout entier naturel p, est donnée par $f^{(p)}(x) = \dfrac{(-1)^p p!}{(x+1)^{p+1}}$. D'après la question précédente, pour tous entiers naturels p et n, on dispose de x dans $]n; n+p[$ tel que $(\Delta^p a)_n = \dfrac{(-1)^p p!}{(x+1)^{p+1}}$, i.e. $(-1)^p (\Delta^p a)_n = \dfrac{p!}{(x+1)^{p+1}}$, et cette dernière quantité est strictement positive puisque $p!$ et $x+1$ le sont.

$\boxed{(a_n)_{n\in\mathbf{N}} \text{ est complètement monotone.}}$

2) a) Puisque Id_E et $\Delta + \mathrm{Id}_E$ commutent dans l'anneau $\mathscr{L}(E)$, on a, pour tout entier naturel p, $\Delta^p = (\Delta + \mathrm{Id}_E - \mathrm{Id}_E)^p = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} (-1)^{p-k} (\Delta + \mathrm{Id}_E)^k$. Comme $\Delta + \mathrm{Id}_E$ est l'opérateur de décalage d'indice, il en résulte $\boxed{(\Delta^p u)_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} (-1)^{p-k} \binom{p}{k} u_{n+k}.}$

b) La formule précédente et celle du binôme de Newton donnent, pour p et n entiers naturels,

$$(\Delta^p b)_n = \sum_{k=0}^{p} (-1)^{p-k} \binom{p}{k} b^{n+k} = b^n (b-1)^p .$$

D'où $\boxed{(\Delta^p b)_n = b^n (b-1)^p.}$ Et donc $(-1)^p (\Delta^p b)_n = b^n (1-b)^p$. Comme $0 < b < 1$, cette dernière quantité est strictement positive et il s'ensuit que

$\boxed{(b_n)_{n\in\mathbf{N}} \text{ est complètement monotone.}}$

3) a) La fonction ω étant supposée continue, comme les fractions rationnelles sont de classe C^∞ là où elles sont définies, les fonctions $t \mapsto t^n \omega(t)$ et $t \mapsto \dfrac{t^n \omega(t)}{1+t}$ sont intégrables sur le

segment $[0;1]$ (d'après le théorème de Cauchy). De plus, par linéarité de l'intégrale, pour n dans $\mathbf{N}$, on a

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=0}^{n}(-1)^k u_k - \int_0^1 \frac{\omega(t)}{1+t}\,\mathrm{d}t\right| &= \left|\int_0^1 \omega(t)\left(\sum_{k=0}^{n}(-1)^k t^k - \frac{1}{1+t}\right)\mathrm{d}t\right| \\ &= \left|\int_0^1 \frac{(-1)^{n+1}t^{n+1}\omega(t)}{1+t}\,\mathrm{d}t\right| \\ &\leq \sup_{0\leq t\leq 1}\frac{|\omega(t)|}{1+t}\int_0^1 t^{n+1}\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

d'après l'inégalité de la moyenne. Le terme de droite est un $O\left(\dfrac{1}{n}\right)$ et donc, par le théorème d'encadrement des limites

$$\boxed{\text{la série } \sum(-1)^k u_k \text{ converge et sa somme est } \int_0^1 \frac{\omega(t)}{1+t}\,\mathrm{d}t.}$$

Remarque : le résultat découle également d'une application directe du théorème de convergence dominée.

b) D'après 2a) et 2b), il vient par linéarité de l'intégrale, pour n et p entiers naturels,

$$(-1)^p(\Delta^p u)_n = \int_0^1 \sum_{k=0}^{p}(-1)^k\binom{p}{k}t^{n+k}\omega(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 t^n(1-t)^p\omega(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Or $t \mapsto t^n(1-t)^p\omega(t)$ est continue et positive sur $[0;1]$ en tant que produit de telles fonctions. De plus cette fonction ne saurait être identiquement nulle sur $[0;1]$ sinon ω le serait sur $]0;1[$ et donc aussi sur $[0;1]$ par continuité. Il en découle $(-1)^p(\Delta^p u)_n > 0$, $\boxed{\text{i.e. } (u_n)_{n\in\mathbf{N}} \text{ est complètement monotone.}}$

c) On raisonne comme en 3a).

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\int_0^1\left(\frac{1-t}{2}\right)^k\omega(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^1\frac{\omega(t)}{1+t}\,\mathrm{d}t\right| &= \left|-\frac{1}{2}\int_0^1\frac{(1-t)^{n+1}\omega(t)}{2^{n+1}(1+t)}\,\mathrm{d}t\right| \\ &\leq \sup_{0\leq t\leq 1}|\omega(t)|\,\frac{1}{2^{n+2}}\end{aligned}$$

puisque, pour t dans $[0;1]$, $0\leq 1-t\leq 1\leq 1+t$. Par théorème d'encadrement des limites, la série $\dfrac{1}{2}\sum\displaystyle\int_0^1\left(\frac{1-t}{2}\right)^k\omega(t)\,\mathrm{d}t$ converge et sa somme est $\displaystyle\int_0^1\frac{\omega(t)}{1+t}\,\mathrm{d}t$. Par conséquent, d'après 3a), $\boxed{\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k u_k = \frac{1}{2}\sum_{p=0}^{+\infty}\int_0^1\left(\frac{1-t}{2}\right)^p\omega(t)\,\mathrm{d}t.}$

4) a) Pour tout p dans $\mathbf{N}$, on obtient, d'après la formule du binôme

$$\int_0^1\left(\frac{1-t}{2}\right)^p\omega(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2^p}\sum_{k=0}^{p}(-1)^k\binom{p}{k}\int_0^1 t^k\omega(t)\,\mathrm{d}t = \frac{(-1)^p}{2^p}\sum_{k=0}^{p}(-1)^{p-k}\binom{p}{k}u_k$$

et cette dernière quantité est égale, d'après 2a), à $\dfrac{(-1)^p}{2^p}(\Delta^p u)_0$. D'où

$$\boxed{\mathcal{E}_n = \sum_{p=0}^{n} \frac{(-1)^p}{2^{p+1}}(\Delta^p u)_0.}$$

L'identité précédente montre que la série $\sum \dfrac{(-1)^p}{2^{p+1}}(\Delta^p u)_0$ converge et que sa somme est la limite de $\mathcal{E}_n$, i.e. d'après 3c), $\boxed{\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k u_k = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{2^{p+1}}(\Delta^p u)_0.}$

b) D'après ce qui précède, on a :

$$|S - \mathcal{E}_n| = \left| \sum_{p=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{2^{p+1}}(\Delta^p u)_0 \right| = \left| \frac{1}{2} \sum_{p=n+1}^{+\infty} \int_0^1 \left(\frac{1-t}{2}\right)^p \omega(t)\,\mathrm{d}t \right| .$$

Or, par positivité de l'intégrande et puisque $0 \le (1-t)^n \le 1$ pour $0 \le t \le 1$, on a

$$\begin{aligned}
|S - \mathcal{E}_n| &= \frac{1}{2} \sum_{p=n+1}^{+\infty} \int_0^1 \left(\frac{1-t}{2}\right)^p \omega(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2^{n+2}} \sum_{p=0}^{+\infty} \int_0^1 (1-t)^n \left(\frac{1-t}{2}\right)^p \omega(t)\,\mathrm{d}t \\
&\le \frac{1}{2^{n+1}} \frac{1}{2} \sum_{p=0}^{+\infty} \int_0^1 \left(\frac{1-t}{2}\right)^p \omega(t)\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

i.e. $\boxed{|S - \mathcal{E}_n| \le \dfrac{S}{2^{n+1}}.}$

Remarque : le résultat découle aussi de la convergence uniforme des fonctions intégrées, ce qui permet d'échanger le signe somme et l'intégrale.

5) On prend pour ω la fonction constante égale à 1, qui est bien continue et positive sur $[0;1]$ et non identiquement nulle. Il vient, pour k entier naturel,

$$\int_0^1 \frac{\omega(t)}{1+t}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t = [\ln(1+t)]_0^1 = \ln(2)\,,$$

$$(-1)^k u_k = \frac{(-1)^k}{k+1}\,,$$

i.e. $u = a$, et

$$\frac{1}{2}\int_0^1 \left(\frac{1-t}{2}\right)^k \omega(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2^{p+1}} \int_0^1 x^p\,\mathrm{d}x = \frac{1}{(p+1)2^{p+1}}$$

et donc, d'après 3a) et 3c), $\boxed{\displaystyle\ln(2) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(p+1)2^{p+1}}.}$

D'après ce qui précède, on a $|S - \mathcal{E}_n| = O(2^{-n})$. Or, puisqu'on a affaire à une série alternée dont le terme général décroit en valeur absolue, on a, pour n dans $\mathbf{N}$,

$$\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} \leq \left| \ln(2) - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} \right| \leq \frac{1}{n+2}$$

et en particulier le terme central est minoré par une suite équivalente à n^{-2}. Comme $O(2^{-n}) = o(n^{-2})$, il vient $\boxed{\ln(2) - \sum_{p=0}^{n} \frac{1}{(p+1)2^{p+1}} = o\left(\ln(2) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1}\right).}$

Remarque : ces égalités résultent de l'identité $\ln(1+t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n t^{n+1}}{n+1}$ sur $]-1;1]$ prise en 1 et $-\frac{1}{2}$.

PARTIE II - Transformée d'EULER

6) a) L'expression trouvée en 2a), le fait qu'une suite extraite d'une suite convergente l'est aussi, avec même limite, et la linéarité de la limite permettent d'écrire :

$$\lim_{n\to+\infty} (\Delta^p u)_n = \sum_{k=0}^{p} (-1)^{p-k} \binom{p}{k} \lim_{n\to+\infty} u_{n+k} = 0$$

puisque le terme général d'une série convergente tend vers 0, i.e. $\boxed{\lim_{n\to+\infty} (\Delta^p u)_n = 0.}$

b) Soit ε un réel strictement positif. Comme r converge, elle est bornée et on dispose donc de M dans $\mathbf{R}_+$ tel que $\sup_{n\in\mathbf{N}} |r_n| \leq M$ et de N dans $\mathbf{N}$ tel que, pour tout n entier supérieur à N, r_n est dans la boule (convexe) de centre 0 et de rayon ε. Soit s la suite obtenue à partir de r en remplaçant ses N premiers termes par 0 ; c'est alors une suite à valeurs dans la boule précédente et donc tout barycentre à coefficients positifs des termes de cette suite est dans la boule, en particulier, pour tout p dans $\mathbf{N}$, $\left| \frac{1}{2^p} \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} s_k \right| \leq \varepsilon$, i.e. (en prenant la convention que cette somme est nulle si $p < N$), $\left| \frac{1}{2^p} \sum_{k=N}^{p} \binom{p}{k} r_k \right| \leq \varepsilon$. Il vient, pour tout entier naturel p,

$$\left| \frac{1}{2^p} \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} r_k \right| \leq \frac{M}{2^p} \sum_{k=0}^{N-1} \binom{p}{k} + \varepsilon \leq \frac{M}{2^p} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{p^k}{k!} + \varepsilon\ .$$

Par le critère de comparaison entre polynômes et exponentielle, le premier terme du dernier membre tend vers 0 quand p tend vers l'infini, de sorte que l'on dispose d'un entier P tel que, pour $p \geq P$, on a $\left| \frac{1}{2^p} \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} r_k \right| \leq 2\varepsilon$, i.e. $\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2^p} \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} r_k = 0.}$

7) a) La série définissant u_n est la série télescopique associée à la suite dont le terme général (en fonction de p) est $\dfrac{(-1)^p}{2^p}(\Delta^p u)_n$. Elle converge donc si et seulement si ce terme général tend vers 0 quand p tend vers l'infini et alors la somme de la série est le terme d'indice 0, i.e. u_n.

Or, d'après 2a), on a

$$\frac{(-1)^p}{2^p}(\Delta^p u)_n = \frac{1}{2^p}\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k} r_k$$

où r est défini par $r_k = (-1)^k u_{n+k}$. Puisque u converge vers 0, il en va de même pour r qui est, au signe près, extraite de u. Le résultat précédent entraîne donc que la série étudiée est convergente de somme u_n, i.e. $\boxed{u_n = \sum_{p=0}^{+\infty}\left[\frac{(-1)^p}{2^p}(\Delta^p u)_n - \frac{(-1)^{p+1}}{2^{p+1}}(\Delta^{p+1}u)_n\right].}$

b) Par linéarité de la limite, il faut démontrer que la série $\sum(-1)^n\left(2(\Delta^p u)_n + (\Delta^{p+1}u)_n\right)$ est convergente de somme $(\Delta^p u)_0$. Or $2\mathrm{Id}_E + \Delta$ est l'endomorphisme de E défini par $(r_n) \mapsto (r_n + r_{n+1})$. Il en résulte que les sommes partielles de la série étudiée sont des sommes télescopiques : pour N entier naturel

$$\sum_{n=0}^{N}(-1)^n\left(2(\Delta^p u)_n + (\Delta^{p+1}u)_n\right) = (\Delta^p u)_0 + (-1)^N(\Delta^p u)_{N+1}\ .$$

Il vient, en utilisant 6a), que la série étudiée est convergente et

$$\boxed{\frac{(-1)^p}{2^{p+1}}(\Delta^p u)_0 = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\left(\frac{(-1)^p}{2^p}(\Delta^p u)_n - \frac{(-1)^{p+1}}{2^{p+1}}\left(\Delta^{p+1}u\right)_n\right).}$$

8) a) D'après la question précédente, par linéarité de la somme des séries convergentes, on a

$$E_n = \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\sum_{p=0}^{n}\left(\frac{(-1)^p}{2^p}(\Delta^p u)_k - \frac{(-1)^{p+1}}{2^{p+1}}\left(\Delta^{p+1}u\right)_k\right)$$

i.e.

$$E_n = \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\left(u_k - \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}}\left(\Delta^{n+1}u\right)_k\right)\ .$$

Or $\sum(-1)^k u_k$ est convergente ; il en résulte que la série $\sum(-1)^k\dfrac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}}\left(\Delta^{n+1}u\right)_k$ l'est également, et

$$E_n - S = -\frac{1}{2^n+1}\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^{n+k+1}\left(\Delta^{n+1}u\right)_k\ .$$

D'après 2a) et par linéarité de la somme des séries convergentes, on a donc

$$E_n - S = -\frac{1}{2^{n+1}}\sum_{p=0}^{n+1}\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^{k+p}\binom{n+1}{p}u_{k+p}$$

ou encore $\boxed{E_n - S = -\frac{1}{2^{n+1}} \sum_{p=0}^{n+1} \binom{n+1}{p} \sum_{k=p}^{+\infty} (-1)^k u_k.}$

b) Le reste d'une série convergente tendant vers 0, la suite r définie par

$$r_p = \sum_{k=p}^{+\infty} (-1)^k u_k$$

converge vers 0. On déduit alors de 6b) que $E_n - S$ converge aussi vers 0, i.e. $\lim_n E_n = S$ ou encore $\boxed{S = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{2^{p+1}} (\Delta^p u)_0.}$

PARTIE III - Une amélioration de la méthode

9) a) D'après 3a) on a $S = \int_0^1 \frac{\omega(t)}{1+t}\,\mathrm{d}t$, d'où, puisque $P_n(-1) \neq 0$,

$$S - T_n = \frac{1}{P_n(-1)} \int_0^1 \left(\frac{P_n(-1)}{1+t} - \frac{P_n(-1) - P_n(t)}{1+t} \right) \omega(t)\,\mathrm{d}t$$

et donc $\boxed{S - T_n = \int_0^1 \frac{P_n(t)}{P_n(-1)(1+t)} \omega(t)\,\mathrm{d}t.}$

b) Par positivité de ω et d'après l'inégalité de la moyenne, on a

$$|S - T_n| \leq \frac{M_n}{|P_n(-1)|} \int_0^1 \frac{\omega(t)}{1+t}\,\mathrm{d}t\,,$$

i.e. $\boxed{|S - T_n| \leq \frac{S M_n}{|P_n(-1)|}.}$

10) On a donc $P_n(-1) = 2^n$ et $M_n = 1$, puisque sur $[0;1]$, $0 \leq 1 - t \leq 1$, d'où $\boxed{|S - T_n| \leq \frac{S}{2^n}.}$

11) On a donc $P_n(-1) = 3^n$ et $M_n = 1$, puisque sur $[0;1]$, $-1 \leq 1 - 2t \leq 1$, d'où $\boxed{|S - T_n| \leq \frac{S}{3^n}.}$

12) a) Montrons tout d'abord l'unicité. Si deux polynômes prennent les mêmes valeurs sur tous les réels de la forme $\sin^2(t)$, i.e. sur $[0;1]$, leur différence s'annule une infinité de fois et donc est le polynôme nul.

Par linéarisation, $\cos(nt)$ est une expression polynomiale de degré n en $\cos(t)$ et donc $\cos(2nt)$ est une expression polynomiale de degré n en $\cos(2t)$. Comme $\cos(2t) = 1 - 2\sin^2(t)$, $\cos(2nt)$ est également une expression polynomiale de degré n en $\sin^2(t)$.

Plus précisément, pour n entier naturel et t réel, on a

$$\cos(2nt) = \sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{2k} (-1)^k \sin^{2k}(t) \cos^{2n-2k}(t)$$

et donc

$$P_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{2k} (-1)^k X^k (1-X)^{n-k} = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{2k} X^k (X-1)^{n-k}$$

ce qui est bien un polynôme de degré n et de coefficient dominant $(-1)^n \sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{2k}$, i.e. 1 si $n=0$ et $(-1)^n 2^{2n-1}$ sinon.

En conclusion,

$\boxed{\text{il existe un unique suite de polynômes } (P_n)_{n\in\mathbf{N}} \text{ vérifiant les conditions suivantes : pour tout } n \in \mathbf{N}, \text{ pour tout } t \in \mathbf{R}, \deg P_n = n \text{ et } P_n(\sin^2(t)) = \cos(2nt).}$

Remarque : la formule donnée résulte de la formule de de Moivre en écrivant $\cos(2nt) = \mathrm{Re}\left((\cos(t) + i\sin(t))^n\right)$. On peut aussi procéder par récurrence en partant de la formule $\cos((2n+2)t) + \cos((2n-2)t) = 2\cos(2t)\cos(2nt)$ et obtenir $P_{n+1} = 2(1-2X)P_n - P_{n-1}$.

b) D'après ce qui précède

$$P_n(-1) = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{2k} (-1)^k (-2)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{2k} 2^{n-k}$$

et on reconnaît $\boxed{P_n(-1) = \dfrac{1}{2}\left((\sqrt{2}+1)^{2n} + (\sqrt{2}-1)^{2n}\right).}$

c) Puisque $\sin^2$ est d'image $[0;1]$, on a $\sup\limits_{[0;1]} |P_n| = \sup\limits_{t\in\mathbf{R}} |\cos(2nt)|$, i.e. $M_n = 1$, et il vient $\boxed{|S - T_n| \leq \dfrac{2S}{(\sqrt{2}+1)^{2n} + (\sqrt{2}-1)^{2n}}.}$

PARTIE IV - Comparaison des méthodes sur un exemple

13) On est donc dans la situation où ω est la fonction constante égale à 1, ce qui est bien une fonction positive et continue sur $[0;1]$, et non identiquement nulle. D'après 5), on a $S = \ln(2)$. D'après les calculs effectués en 3a), on a

$$S - S_n = (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t}\,\mathrm{d}t\ .$$

Démontrons le résultat classique suivant : soit f une fonction de classe C^1 sur $[0;1]$, alors $\displaystyle\int_0^1 t^n f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{f(1)}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$. En effet, par intégration par parties,

$$\int_0^1 t^n f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{f(1)}{n+1} - \frac{1}{n+1}\int_0^1 t^{n+1} f'(t)\,\mathrm{d}t$$

et on a, par inégalité de la moyenne,

$$\left|\int_0^1 t^{n+1} f'(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \sup_{[0;1]} |f'| \int_0^1 t^{n+1}\,\mathrm{d}t = o\,(1)\ ,$$

d'où le résultat.

Par conséquent $\boxed{S - S_n \sim \dfrac{(-1)^{n+1}}{2n}.}$

Les calculs de 5) montrent qu'on a $E_n = \mathcal{E}_n$ et donc, d'après les calculs de 4b),

$$S - E_n = \frac{1}{2} \lim_{N\to+\infty} \int_0^1 \left(\frac{1-t}{2}\right)^{n+1} \frac{1 - \left(\dfrac{1-t}{2}\right)^{N+1}}{1 - \left(\dfrac{1-t}{2}\right)} \,\mathrm{d}t$$

ou encore, par changement de variable affine,

$$S - E_n = \frac{1}{2^{n+2}} \lim_{N\to+\infty} \int_0^1 x^{n+1} \frac{1 - \left(\dfrac{x}{2}\right)^{N+1}}{1 - \left(\dfrac{x}{2}\right)} \,\mathrm{d}x$$

Or, d'après le résutat classique que l'on vient de démontrer, l'expression à l'intérieur de la limite s'écrit $\dfrac{2}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right) - \dfrac{1}{2^{N+1}}\left(\dfrac{2}{n+N} + o\left(\dfrac{1}{n+N}\right)\right)$ et donc, en passant à la limite en N, il vient $\boxed{S - E_n \sim \dfrac{1}{n2^{n+1}}.}$

Comme $0 < \sqrt{2} - 1 < 2 < \sqrt{2} + 1$, on a $(\sqrt{2}-1)^n = o\left((\sqrt{2}+1)^n\right)$ et $n2^n = o\left((\sqrt{2}+1)^n\right)$. Il résulte, en utilisant 12c), $S - T_n = O\left((\sqrt{2}+1)^{-n}\right) = o\left(n^{-1}2^{-n-1}\right)$ et donc

$\boxed{S - T_n = o\,(S - E_n) \text{ et } S - T_n = o\,(S - S_n)\text{, i.e. } (T_n) \text{ converge plus rapidement vers } S \text{ que ne le font } (S_n) \text{ ou } (E_n).}$

D'après 9a), on a

$$S - T_n = \frac{1}{P_n(-1)} \int_0^1 \frac{P_n(t)}{1+t} \,\mathrm{d}t\,, \quad \text{avec } P_n(-1) \sim \frac{1}{2}(\sqrt{2}+1)^n\,.$$

Comme $\sin^2$ est un C^1-difféomorphisme de $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ sur $]0;1[$, on a

$$\int_0^1 \frac{P_n(t)}{1+t} \,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos(2nt)}{1+\sin^2(t)} \sin(2t) \,\mathrm{d}t$$

et donc, par changement de variable affine,

$$\int_0^1 \frac{P_n(t)}{1+t} \,\mathrm{d}t = \int_0^\pi \frac{\cos(nx)}{\dfrac{3}{2} - \dfrac{\cos(2x)}{2}} \sin(x) \frac{\mathrm{d}x}{2} = \frac{1}{2} \int_0^\pi \frac{\sin((n+1)x) - \sin((n-1)x)}{3 - \cos(2x)} \,\mathrm{d}x\,.$$

On note $I_n(F) = \displaystyle\int_0^\pi \sin(nx) F(x) \,\mathrm{d}x$, où F est la fonction définie par $F(x) = \dfrac{1}{3 - \cos(x)}$. Comme F est de classe C^∞ sur $[0;\pi]$, en tant que fraction rationnelle, partout définie, en une telle fonction, on peut effectuer deux intégrations par parties successives. En tenant compte de l'annulation de sin en 0 et π, il vient

$$I_n(F) = \frac{1}{n}\left(F(0) + (-1)^n F(\pi)\right) - \frac{1}{n^2} I_n(F'') \,.$$

Remarquons qu'on a $\dfrac{1}{(n-1)^2} - \dfrac{1}{(n+1)^2} = \dfrac{4n}{(n^2-1)^2} \sim \dfrac{4}{n^3} = o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ et $\dfrac{1}{n-1} - \dfrac{1}{n+1} \sim \dfrac{2}{n^2}$. De plus, par l'inégalité de la moyenne, $I_n(F'') = O(1)$. D'où

$$\int_0^1 \frac{P_n(t)}{1+t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\frac{2}{n^2}\left(F(0) + (-1)^n F(\pi)\right) + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

et donc $S - T_n \sim \dfrac{1}{n^2}\left(\dfrac{1}{2} + (-1)^n \dfrac{1}{4}\right)\dfrac{2}{(\sqrt{2}+1)^n}$, i.e. $\boxed{S - T_n \sim \dfrac{2 + (-1)^n}{2n^2(\sqrt{2}+1)^n}.}$