X-ENS 2011 - PC

Matrices infiniment divisibles

Notations :

On désigne par $\mathbf{R}$ le corps des nombres réels et par $\mathbf{R}_+$ l'ensemble des réels positifs ou nuls. Soit n un entier supérieur ou égal à 1. On désigne par $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ l'espace vectoriel réel des matrices carrées à n lignes et n colonnes. Si $M \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$, on note $\det(M)$ son déterminant. On désigne par $\mathscr{S}_n(\mathbf{R})$ le sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ des matrices symétriques. On note $I_n \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ la matrice identité. On identifie $\mathbf{R}^n$ et l'espace des matrices à n lignes et 1 colonne.

PARTIE I - La fonction Γ

1a. Montrer que pour réel $s > 0$, la fonction $x \mapsto e^{-x}x^{s-1}$ est intégrable sur $]0;+\infty[$. On pose alors $\Gamma(s) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}x^{s-1}\,\mathrm{d}x$.

1b. Calculer $\Gamma(m)$ pour m entier strictement positif.

1c. Montrer que Γ est continue sur $]0;+\infty[$.

2a. Montrer, pour tout entier strictement positif m et $x \in [0;m]$, $\left(1-\dfrac{x}{m}\right)^m \leq e^{-x}$. Montrer, pour $x \in \mathbf{R}_+$, $\displaystyle\lim_{m\to+\infty}\left(1-\frac{x}{m}\right)^m = e^{-x}$.

2b. Montrer $\displaystyle\int_0^m \left(1-\frac{x}{m}\right)^m x^{s-1}\,\mathrm{d}x = \frac{m!\,m^s}{s(s+1)\cdots(s+m)}$, pour tout réel $s > 0$ et pour tout entier m.

2c. Montrer, pour tout réel $s > 0$, $\Gamma(s) = \displaystyle\lim_{m\to+\infty}\frac{m!\,m^s}{s(s+1)\cdots(s+m)}$.

PARTIE II - Matrices positives et produit de Hadamard

Soit $A = (a_{ij}) \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$. On dit que A est positive si A est symétrique et

$$\forall X = {}^{\mathrm{t}}(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbf{R}^n\,, \quad \langle X \,|\, AX\rangle = {}^{\mathrm{t}}XAX = \sum_{1\leq i,j\leq n} a_{ij}x_ix_j \geq 0$$

où $\langle \cdot \,|\, \cdot \rangle$ désigne le produit scalaire euclidien standard sur $\mathbf{R}^n$.

3. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathscr{S}_2(\mathbf{R})$. Montrer que A est positive si et seulement si $a \geq 0$, $d \geq 0$ et $\det(A) \geq 0$.

4. Soit $A = (a_{ij}) \in \mathscr{S}_n(\mathbf{R})$. Montrer que A est positive si et seulement si ses valeurs propres sont des réels positifs ou nuls.

5. Soit $A = (a_{ij}) \in \mathscr{S}_n(\mathbf{R})$ une matrice positive, et $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ des réels. Montrer que, en posant $b_{ij} = \lambda_i\lambda_j a_{ij}$, la matrice $B = (b_{ij})$ est positive.

6. Soit $\mathcal{H}$ un espace vectoriel préhilbertien réel, pour lequel le produit scalaire de deux éléments x et y est noté $\langle x \,|\, y\rangle_{\mathcal{H}}$. Soit $u_1, \ldots, u_n$ dans $\mathcal{H}$. On pose $a_{ij} = \langle u_i \,|\, u_j\rangle_{\mathcal{H}}$. Montrer que la matrice $A = (a_{ij})$ est positive.

   Soit $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$. Leur produit de Hadamard est la matrice $C = (c_{ij})$ de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ donnée par $c_{ij} = a_{ij}b_{ij}$. On désignera cette opération par le symbole $*$: $C = A*B$.

7. Montrer que si A dans $\mathscr{S}_n(\mathbf{R})$ est une matrice positive et si B est une matrice diagonale à coefficients diagonaux positifs ou nuls, alors $A * B$ est une matrice positive.

8a. Montrer que si A dans $\mathscr{S}_n(\mathbf{R})$ est une matrice positive, elle peut s'écrire comme somme de matrices de la forme $Y\,{}^{\mathrm{t}}Y$, où $Y = {}^{\mathrm{t}}(y_1, \ldots, y_n) \in \mathbf{R}^n$.

8b. Montrer que si A et B dans $\mathscr{S}_n(\mathbf{R})$ sont des matrices positives, alors $A * B$ est une matrice positive.

PARTIE III - Matrices infiniment divisibles

On considère maintenant des matrices $A = (a_{ij}) \in \mathscr{S}_n(\mathbf{R})$ dont les coefficients sont des réels positifs ou nuls. Il résulte de la question 8b. que si A est positive, alors pour tout entier $r > 0$, la matrice $A^{*r} = (a_{ij}^r)$ est positive. On dit qu'une matrice symétrique A à coefficients a_{ij} positifs ou nuls est infiniment divisible si pour tout réel $r > 0$, la matrice (a_{ij}^r) est positive. On désignera encore, lorsque r est un réel strictement positif, par A^{*r} la matrice (a_{ij}^r).

9a. Soit $A \in \mathscr{M}_2(\mathbf{R})$ une matrice symétrique positive à coefficients positifs ou nuls. Montrer qu'elle est infiniment divisible.

9b. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que A est positive. Déterminer les valeurs de $r > 0$ pour lesquelles A^{*r} est positive.

10. Montrer que si $A = (a_{ij})$ est infiniment divisible et si λ_1, …, λ_n sont des réels strictement positifs, alors en posant $b_{ij} = \lambda_i \lambda_j a_{ij}$, la matrice $B = (b_{ij})$ est infiniment divisible.

11. Soit A une matrice symétrique à coefficients positifs ou nuls. Montrer que si pour tout entier $m \geq 1$, $A^{*\frac{1}{m}}$ est positive, alors A est infiniment divisible.

12. Soit $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ des réels strictement positifs. On forme la matrice $C = (c_{ij})$ avec $c_{i,j} = \dfrac{1}{\lambda_i + \lambda_j}$ et on se propose de montrer qu'elle est infiniment divisible.
Soit $\mathcal{H}$ l'espace vectoriel des fonctions continues sur $\mathbf{R}_+$ à valeurs réelles, dont le carré est intégrable. On munit $\mathcal{H}$ du produit scalaire donné par $\langle f \mid g \rangle = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$. On pose, pour tout $t \geq 0$, $u_i(t) = e^{-\lambda_i t}$.

12a. Calculer $\langle u_i \mid u_j \rangle$ et en déduire que C est positive.

12b. Montrer, pour $r > 0$ et $\alpha > 0$, $\dfrac{1}{\alpha^r} = \dfrac{1}{\Gamma(r)} \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t\alpha} t^{r-1}\,\mathrm{d}t$.

12c. Soit, pour $r > 0$, $\mathcal{H}_r$ l'ensemble des fonctions continues u sur $\mathbf{R}_+$ à valeurs réelles et telles que la fonction $t \mapsto u(t)^2 t^{r-1}$ est intégrable sur $\mathbf{R}_+$. On admet que c'est un espace vectoriel. Montrer que, si on pose pour u et v dans $\mathcal{H}_r$, $\langle u \mid v \rangle = \displaystyle\int_0^{+\infty} u(t)v(t)t^{r-1}\,\mathrm{d}t$, on munit $\mathcal{H}_r$ d'un produit scalaire.

12d. Montrer que C est infiniment divisible.

13. Soit $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ des réels strictement positifs. Pour $1 \leq i, j \leq n$, on pose $k_{ij} = \dfrac{\Gamma(\lambda_i + \lambda_j + 1)}{\Gamma(\lambda_i + 1)\Gamma(\lambda_j + 1)}$.
On se propose de montrer que la matrice $K = (k_{ij})$ est infiniment divisible.

13a. Montrer $k_{ij} = \lim_{m \to +\infty} \frac{1}{m \cdot m!} \prod_{p=1}^{m+1} \frac{(\lambda_i + p)(\lambda_j + p)}{(\lambda_i + \lambda_j + p)}$.

13b. Montrer que, pour tout entier $p \geq 1$, la matrice $\left(\frac{(\lambda_i + p)(\lambda_j + p)}{\lambda_i + \lambda_j + p} \right)$ est infiniment divisible. Conclure.

PARTIE IV - Matrices conditionnellement positives

On dit qu'une matrice $A = (a_{ij})$ de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ est conditionnellement positive si elle est symétrique et si pour tout $X = {}^{\mathrm{t}}(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n$ tel que $\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$, on a

$$ {}^{\mathrm{t}}XAX = \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{ij} x_i x_j \geq 0 \; . $$

14. Soit λ_1, ..., λ_n des réels strictements positifs. On pose $a_{ij} = -\ln(\lambda_i + \lambda_j)$. Montrer que $A = (a_{ij})$ est conditionnellement positive. (Pour $X = {}^{\mathrm{t}}(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n$ tel que $\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$, on pourra introduire la fonction définie sur $\mathbf{R}_+$ par :

$$ f(r) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} x_i x_j \left(\frac{1}{\lambda_i + \lambda_j} \right)^r $$

et utiliser les résultats de la question 12).

15. On note J la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1. Soit B dans $\mathscr{S}_n(\mathbf{R})$. On considère les deux conditions suivantes :
   (i) B est conditionnellement positive.
   (ii) $\forall \varepsilon > 0, \exists \lambda > 0 \; B + \varepsilon I_n + \lambda J$ est positive.

15a. Montrer $(ii) \Longrightarrow (i)$.

15b. Montrer $(i) \Longrightarrow (ii)$.

16a. On suppose que $A = (a_{ij})$ est infiniment divisible et que tous les coefficients de A sont strictement positifs. Montrer que la matrice $(\ln(a_{ij}))$ est conditionnellement positive.

16b. Réciproquement, on suppose que la matrice $B = (b_{ij})$ est conditionnellement positive. En considérant, pour tout $\varepsilon > 0$, une matrice $C = (c_{ij}) = B + \varepsilon I_n + \lambda J$ comme au 15, montrer que, pour tout $r > 0$, la matrice $(\exp(rc_{ij}))$ est positive. En déduire que la matrice $(exp(rb_{ij}))$ est positive.

17. Soit z_1, ..., z_n des nombres complexes.

17a. Montrer que la matrice $\left(e^{-|z_i - z_j|^2} \right)$ est infiniment divisible.

17b. Montrer que pour tout $t > 0$, la matrice de coefficients $\frac{1}{t + |z_i - z_j|^2}$ est positive, puis que la matrice de coefficients $-\int_0^{+\infty} t^{-\frac{1}{2}} \frac{|z_i - z_j|^2}{t + |z_i - z_j|^2} \, \mathrm{d}t$ est conditionnellement positive.

17c. Montrer que la matrice $\left(e^{-|z_i - z_j|} \right)$ est infiniment divisible.

X-ENS 2011 - PC

PARTIE I - La fonction Γ

1a. Les fonctions exponentielles et puissances étant de classe C^∞ sur $\mathbf{R}_+^*$, il en va de même de leur produit et donc, pour $s > 0$, la fonction f donnée par $f(x) = e^{-x}x^{s-1}$ est localement intégrable sur $\mathbf{R}_+^*$. Au voisinage de 0, à droite, on a $f(x) \sim x^{s-1}$ puisque l'exponentielle est continue en 0 et, par croissance comparée, $f(x) = o(x^{-2})$ au voisinage de $+\infty$. Donc, d'après le critère de RIEMANN, f est localement intégrable au voisinage de 0 à droite et au voisinage de $+\infty$. Par conséquent $\boxed{x \mapsto e^{-x}x^{s-1} \text{ est intégrable sur } \mathbf{R}_+^*.}$

1b. Soit m dans $\mathbf{N}^*$ et f, g et h définies sur $\mathbf{R}_+^*$ par $g(x) = e^{-x}$, $h(x) = x^{m-1}$ et $f = gh$. Alors en tant qu'exponentielle et polynôme, g et h sont de classe C^∞ sur $\mathbf{R}_+^*$ et donc leur produit f l'est aussi. De plus on a $f = (-1)^m g^{(m)}h$ et donc, par intégration par partie itérée,

$$\int f = (-1)^m \int g^{(m)}h = (-1)^m \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k g^{(m-1-k)}h^{(k)} + (-1)^m(-1)^m \int gh^{(m)} .$$

Pour $0 \le k \le m-1$, toutes les quantités $g^{(m-1-k)}h^{(k)}$ ont une limite en 0, qui est de plus nulle si $k < m-1$, et une limite nulle en $+\infty$, par croissance comparée, et $h^{(m)}$ étant la fonction nulle, il vient $\Gamma(m) = (-1)^m(-1)^{m-1}\left(-(m-1)!\right)$, i.e. $\boxed{\Gamma(m) = (m-1)!\,.}$

1c. Soit a et b dans $\mathbf{R}_+^*$ avec $a < b$ et f et g définies pour x et s dans $\mathbf{R}_+^*$ par $f(x,s) = e^{-x}x^{s-1}$ et $g(x) = f(x,a) + f(x,b)$. D'après ce qui précède, pour s dans $[a;b]$, f et g sont continues et intégrables sur $\mathbf{R}_+^*$, et à valeurs positives. De plus pour s dans $[a;b]$ on a $|f(x,s)| \le g(x)$ puisque si $x \in]0;1[$, $0 \le f(x,s) \le f(x,a) \le g(x)$ et si $x \ge 1$, $0 \le f(x,s) \le f(x,b) \le g(x)$. Enfin, pour $x > 0$, $s \mapsto f(x,s)$ est continue en tant que fonction exponentielle. Il résulte du théorème de continuité sous le signe somme que Γ est continue sur $[a;b]$ et donc $\boxed{\Gamma \text{ est continue sur } \mathbf{R}_+^*.}$

2a. Soit m dans $\mathbf{N}^*$ et x dans $[0;m]$. Si $x = m$, on a $\left(1 - \dfrac{x}{m}\right)^m = 0 < e^{-x}$. Sinon on a, par concavité du logarithme, $\ln\left(1 - \dfrac{x}{m}\right) \le -\dfrac{x}{m}$ et donc, par positivité de m et croissance de l'exponentielle $m\ln\left(1 - \dfrac{x}{m}\right) \le -x$ puis $\boxed{\left(1 - \dfrac{x}{m}\right)^m \le e^{-x}.}$

Soit x dans $\mathbf{R}_+$, pour m tendant vers l'infini on a $\ln\left(1 - \dfrac{x}{m}\right) \sim -\dfrac{x}{m}$ (y compris si $x = 0$) par développement limité du logarithme en 1 et donc $\lim m\ln\left(1 - \dfrac{x}{m}\right) = -x$. Par continuité de l'exponentielle en $-x$, on en déduit $\boxed{\lim_{m\to+\infty} \left(1 - \dfrac{x}{m}\right)^m = e^{-x}.}$

2b. Soit m dans $\mathbf{N}^*$, $s > 0$ et f, g et h définies sur $]0;m]$ par $g(x) = \dfrac{x^{s+m}}{s(s+1)\cdots(s+m)}$, $h(x) = \left(1 - \dfrac{x}{m}\right)^m$ et $f(x) = \left(1 - \dfrac{x}{m}\right)^m x^{s-1}$, i.e. $f = g^{(m+1)}h$. Alors en tant que puissance et polynôme, g et h sont de classe C^∞ sur $]0;m]$ et donc f l'est aussi. De plus au voisinage de 0 à droite on a $f(x) \sim x^{s-1}$ et donc, puisqu'on a $s > 0$, le critère de RIEMANN permet de conclure que f est intégrable sur $]0; m]$. Enfin on a, par intégration par partie itérée,

$$\int f = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k g^{(m-k)} h^{(k)} + (-1)^{m+1} \int g h^{(m+1)} .$$

Pour $0 \leq k \leq m$, toutes les quantités $g^{(m-k)} h^{(k)}$ ont une limite nulle en 0 et sont continues en m et $h^{(m+1)}$ est la fonction nulle. De plus $\left(1 - \dfrac{X}{m}\right)^m$ étant un polynôme de degré m, de coefficient dominant $(-1)^m \dfrac{1}{m^m}$ et ayant m comme racine multiple d'ordre m on a, pour $0 \leq k < m$, $h^{(k)}(m) = 0$ et $h^{(m)}(m) = (-1)^m \dfrac{m!}{m^m}$. Il en résulte $\displaystyle\int_0^m \left(1 - \frac{x}{m}\right)^m x^{s-1}\, \mathrm{d}x = (-1)^m (-1)^m \frac{m!}{m^m} \frac{m^{s+m}}{s(s+1)\cdots(s+m)}$, i.e. $\boxed{\displaystyle\int_0^m \left(1 - \frac{x}{m}\right)^m x^{s-1}\, \mathrm{d}x = \frac{m!\, m^s}{s(s+1)\cdots(s+m)}.}$

2c. Soit $s > 0$ et (f_m) la suite de fonctions définies sur $\mathbf{R}_+^*$ par $f_m(x) = \left(1 - \dfrac{x}{m}\right)^m x^{s-1}$ si $x \leq m$ et $f_m(x) = 0$ sinon. Alors d'après les deux questions précédentes : pour tout m dans $\mathbf{N}^*$, f_m est continue par morceaux sur $\mathbf{R}_+^*$ (et même continue car les limites à gauche et à droite en m sont nulles, mais ce n'est pas nécessaire pour appliquer le théorème que l'on a en vue), positive et majorée par la fonction $x \mapsto e^{-x} x^{s-1}$, par positivité de x^{s-1} ; la suite de fonctions (f_m) converge simplement vers le majorant précédent qui est une fonction continue sur $\mathbf{R}_+^*$, positive et intégrable sur $\mathbf{R}_+^*$. Il résulte alors du théorème de convergence dominée qu'on a

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} x^{s-1}\, \mathrm{d}x = \lim_{m \to +\infty} \int_0^{+\infty} f_m(x)\, \mathrm{d}x = \lim_{m \to +\infty} \int_0^m \left(1 - \frac{x}{m}\right)^m x^{s-1}\, \mathrm{d}x\, ,$$

i.e., d'après ce qui précède, $\boxed{\displaystyle\Gamma(s) = \lim_{m \to +\infty} \frac{m!\, m^s}{s(s+1)\cdots(s+m)}.}$

PARTIE II - Matrices positives et produit de Hadamard

3. Pour X dans $\mathbf{R}^2$, soit X est lié à ${}^t(0, 1)$ et il s'écrit alors $\lambda\, {}^t(0, 1)$ pour λ réel, soit il en est indépendant et on peut l'écrire sous la forme $\lambda\, {}^t(1, x)$ avec λ et x réel (et λ non nul). De plus, si $X = \lambda Y$ avec λ réel et Y dans $\mathbf{R}^2$, on a $\langle X \mid AX \rangle = \lambda^2 \langle Y \mid AY \rangle$ par linéarité de A et bilinéarité du produit scalaire. On en déduit

$$\begin{aligned} A \text{ est positive} &\iff \forall X \in \mathbf{R}^2\, , \langle X \mid AX \rangle \geq 0 \\ &\iff \forall \lambda \in \mathbf{R}\, , \forall x \in \mathbf{R}\, , \lambda^2 d \geq 0 \text{ et } \lambda^2 (a + 2bx + dx^2) \geq 0 \\ &\iff d \geq 0 \text{ et } \forall x \in \mathbf{R}\; a + 2bx + dx^2 \geq 0 \\ &\iff \left(d > 0 \text{ et } b^2 - ad \leq 0\right) \text{ ou } (d = b = 0 \text{ et } a \geq 0) \end{aligned}$$

par caractérisation des trinômes du second degré de signe constant et puisqu'une fonction affine n'est de signe constant que si elle est constante. De plus si $d > 0$ et $ad \geq b^2$, on a $ad \geq 0$ et donc $a \geq 0$, et si $d = 0$ et $a \geq 0$, on a $b = 0$ si et seulement si $b^2 \leq 0 = ad$. Par conséquent $\boxed{A \text{ est positive si et seulement si } a \geq 0,\ d \geq 0 \text{ et } \det(A) = ad - b^2 \geq 0.}$

4. Puisque A est symétrique réelle, d'après le théorème spectral on dispose d'une base orthonormée $(X_1, \ldots, X_n)$ de vecteurs propres de A. On note $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ les valeurs propres associées. On a en particulier, pour $1 \leq k \leq n$, $\langle X_k \mid AX_k \rangle = \lambda_k$ et donc si A est positive, son spectre est inclus dans $\mathbf{R}_+$. Réciproquement, pour X dans $\mathbf{R}^n$, on dispose de $(x_1, \ldots, x_n)$ dans $\mathbf{R}^n$ tel que $X = \sum_{k=1}^{n} x_k X_k$ et donc, en posant $\lambda = \min_{1 \leq k \leq n} \lambda_k$, on a par positivité des x_k^2
$$\langle X \mid AX \rangle = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k^2 \geq \lambda \sum_{k=1}^{n} x_k^2 \geq 0$$
et donc A est positive. Autrement dit
$\boxed{A \text{ est positive si et seulement si ses valeurs propres sont des réels positifs ou nuls.}}$

5. Soit D la matrice diagonale de diagonale $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. On a $B = DAD = {}^{\mathrm{t}}DAD$ puisque D est symétrique. En particulier B est symétrique réelle. De plus, pour X dans $\mathbf{R}^n$, on a $\langle X \mid BX \rangle = \langle X \mid {}^{\mathrm{t}}DADX \rangle = \langle DX \mid A(DX) \rangle \geq 0$ par hypothèse sur A et donc $\boxed{B \text{ est positive.}}$

6. Soit X dans $\mathbf{R}^n$. On note $X = {}^{\mathrm{t}}(x_1, \ldots, x_n)$. Il vient
$$\langle X \mid AX \rangle = \sum_{1 \leq i,j \leq n} x_i x_j \langle u_i \mid u_j \rangle_{\mathcal{H}} = \left\langle \sum_{i=1}^{n} x_i u_i \,\middle|\, \sum_{j=1}^{n} x_j u_j \right\rangle_{\mathcal{H}} \geq 0$$
par bilinéarité et positivité du produit scalaire sur $\mathcal{H}$. De plus, par symétrie de ce produit scalaire A est symétrique réelle et donc $\boxed{A \text{ est positive.}}$

7. En notant $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ la base canonique de $\mathbf{R}^n$, puisque A est positive on a $a_{ii} = \langle e_i \mid Ae_i \rangle \geq 0$ et donc $A * B$ est une matrice diagonale à coefficients diagonaux positifs ou nuls, car produits de ceux de A et de ceux de B. Il en résulte que $A * B$ est symétrique réelle à spectre positif et donc, d'après la question 4, $\boxed{A * B \text{ est positive.}}$

8a. Soit A dans $\mathscr{S}_n(\mathbf{R})$. D'après le théorème spectral on dispose d'une base orthonormée $(X_1, \ldots, X_n)$ de vecteurs propres de A. On note $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ les valeurs propres associées. Puisque A est positive, d'après la question 4, ces valeurs propres sont positives et on dispose donc de $(\mu_1, \ldots, \mu_n)$ dans $\mathbf{R}^n$ tel que, pour $1 \leq k \leq n$, $\lambda_k = \mu_k^2$. On pose alors, pour $1 \leq k \leq n$, $Y_k = \mu_k X_k$. Pour X dans $\mathbf{R}^n$ on a, puisque $(X_1, \ldots, X_n)$ est une base orthonormée, $X = \sum_{k=1}^{n} \langle X \mid X_k \rangle X_k$ et donc, par linéarité,
$$AX = \sum_{k=1}^{n} \langle X \mid X_k \rangle \lambda_k X_k = \sum_{k=1}^{n} \langle X \mid Y_k \rangle Y_k = \sum_{k=1}^{n} Y_k \, ({}^{\mathrm{t}}Y_k X) = \left(\sum_{k=1}^{n} Y_k \, {}^{\mathrm{t}}Y_k \right) X$$
et donc, par unicité de l'écriture matricielle, $\boxed{A = \sum_{k=1}^{n} Y_k \, {}^{\mathrm{t}}Y_k.}$

8b. Soit A et B dans $\mathscr{S}_n(\mathbf{R})$ des matrices positives. Par définition du produit de Hadamard $A * B$ est symétrique réelle. De plus l'application $(X, Y) \mapsto X * Y$ est une application bilinéaire symétrique sur $\mathscr{S}_n(\mathbf{R})$, par construction. D'après la question précédente on peut donc se ramener au cas où B est de la forme $Y\,{}^{\mathrm{t}}Y$ avec $Y = {}^{\mathrm{t}}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Dans ce cas $B = (\lambda_i\lambda_j)_{1\le i,j\le n}$ et donc, d'après la question 5, $\boxed{A * B \text{ est positive.}}$

PARTIE III - Matrices infiniment divisibles

9a. Soit r un réel strictement positif. On note $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$ et on a donc $A^{*r} = \begin{pmatrix} a^r & b^r \\ b^r & d^r \end{pmatrix}$. Par croissance et positivité de la fonction puissance r sur $\mathbf{R}_+$, on en déduit : $a^r \geq 0$, $d^r \geq 0$ et $(ad \geq b^2) \Longrightarrow (a^r d^r \geq (b^r)^2)$, de sorte que la caractérisation de la question 3 montre que A^{*r} est symétrique réelle positive et donc $\boxed{A \text{ est infiniment divisible.}}$

9b. Par définition A est symétrique réelle. Pour r réel strictement positif on a $A^{*r} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2^r & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et donc A^{*r} admet ${}^{\mathrm{t}}(1, 0, -1)$ comme vecteur propre associé à la valeur propre 1. On note $(1, a_r, b_r)$ les valeurs propres, comptées avec multiplicité, de A^{*r}. D'après le théorème spectral a_r et b_r sont réels. De plus, comme on a $\det(A^{*r}) = 2^r - 2 = a_r b_r$, par exemple en développant par rapport à la première colonne, a_r et b_r sont de même signe (au sens large) si et seulement si $r \geq 1$. Dans ce cas, comme on a $a_r + b_r = \mathrm{Tr}(A^{*r}) - 1 = 2^r + 1 \geq 0$, a_r et b_r sont positifs et donc $\boxed{A \text{ est positive et } A^{*r} \text{ est positive si et seulement si } r \geq 1.}$

10. Soit $A = (a_{ij})$ une matrice symétrique réelle infiniment divisible et $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ des réels strictement positifs. En posant $b_{ij} = \lambda_i\lambda_j a_{ij}$ et $B = (b_{ij})$, on a, pour $r \in \mathbf{R}_+^*$, $b_{ij}^r = \lambda_i^r \lambda_j^r a_{ij}^r$, de sorte qu'il résulte de la positivité de A^{*r} et de la question 5 que B^{*r} est positive, i.e. $\boxed{B \text{ est infiniment divisible.}}$

11. Soit r dans $\mathbf{R}_+^*$ et X dans $\mathbf{R}^n$. On note $X = {}^{\mathrm{t}}(x_1, \dots, x_n)$. Par densité de $\mathbf{Q}_+^*$ dans $\mathbf{R}_+^*$, on dispose de deux suites d'entiers strictement positifs $(m_k)_{k\in\mathbf{N}}$ et $(r_k)_{k\in\mathbf{N}}$ telles que $r = \lim \dfrac{r_k}{m_k}$. Par hypothèse, pour k dans $\mathbf{N}$, $A^{*\frac{1}{m_k}}$ est positive et donc, d'après la remarque effectuée en début de partie ou encore d'après la question 8b, $A^{*\frac{r_k}{m_k}}$ est positive ; d'où $\displaystyle\sum_{1\le i,j\le n} a_{ij}^{r_k/m_k} x_i x_j \geq 0$. Par linéarité de la limite, il vient en faisant tendre k vers l'infini, $\displaystyle\sum_{1\le i,j\le n} a_{ij}^r x_i x_j \geq 0$ et donc A^{*r} est positive. Par conséquent $\boxed{A \text{ est infiniment divisible.}}$

12a. Pour a dans $\mathbf{R}_-^*$, la fonction $t \mapsto e^{-at}$ est de classe C^∞ sur $\mathbf{R}_+$, en tant qu'exponentielle, et est dans $o(t^{-2})$ en $+\infty$ par croissance comparée. Il résulte du critère de Riemann qu'elle est intégrable sur $\mathbf{R}_+$. De plus une primitive de cette fonction étant $-\dfrac{1}{a}$ fois elle-même, on a $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-at}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{a}$. Il en résulte que, pour $1 \leq i,j \leq n$, u_i est de carré intégrable sur $\mathbf{R}_+$, i.e. appartient à $\mathcal{H}$, que $u_i u_j$ est intégrable sur $\mathbf{R}_+$ et d'intégrale $\dfrac{1}{\lambda_i + \lambda_j}$, i.e. $\boxed{\langle u_i \,|\, u_j\rangle = \dfrac{1}{\lambda_i + \lambda_j}.}$ Il résulte alors de la question 6 que $\boxed{C \text{ est positive.}}$

12b. Soit r et α des réels strictement positifs, par changement de variable linéaire bijectif $x = \alpha t$ dans l'intégrale définissant Γ, on a

$$\Gamma(r) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{r-1}\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} e^{-t\alpha}\alpha^{r-1}t^{r-1}\alpha\,\mathrm{d}t = \alpha^r \int_0^{+\infty} e^{-t\alpha}t^{r-1}\,\mathrm{d}t\,.$$

Par contiuité et stricte positivité de l'intégrande sur $\mathbf{R}_+^*$, on déduit de la première égalité qu'on a $\Gamma(r) > 0$ et donc que $\Gamma(r)$ et α^r sont non nuls. D'où $\boxed{\dfrac{1}{\alpha^r} = \dfrac{1}{\Gamma(r)} \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t\alpha}t^{r-1}\,\mathrm{d}t.}$

12c. Soit $r > 0$ et u et v dans $\mathcal{H}_r$. Pour t dans $\mathbf{R}_+$ on a, par inégalité entre moyennes arithmétique et géométrique (ou inégalité de MINKOWSKI)

$$\left|u(t)v(t)t^{r-1}\right| = \sqrt{u(t)^2t^{r-1}}\sqrt{v(t)^2t^{r-1}} \leq \frac{1}{2}\left(u(t)^2t^{r-1} + v(t)^2t^{r-1}\right)$$

et donc $t \mapsto u(t)v(t)t^{r-1}$ est une fonction continue sur $\mathbf{R}_+$ à valeurs réelles, en tant que produit de telles fonctions, dominée par une fonction intégrable et positive sur $\mathbf{R}_+$, en tant que somme de deux telles fonctions, et est donc elle aussi intégrable sur $\mathbf{R}_+$. La formule définissant $\langle u \,|\, v\rangle$ est donc licite et, par bilinéarité et symétrie du produit sur $\mathbf{R}$ et linéarité de l'intégrale, définit une forme bilinéaire symétrique. Par continuité et positivité de l'intégrande sur $\mathbf{R}_+^*$, la nullité de $\langle u \,|\, u\rangle$ entraîne celle de u et, par positivité de l'intégrale, $\langle u \,|\, u\rangle \geq 0$. Par conséquent $\boxed{\mathcal{H}_r \text{ est muni d'un produit scalaire.}}$

12d. Soit r et α dans $\mathbf{R}_+^*$. La fonction $t \mapsto e^{-t\alpha}$ est continue sur $\mathbf{R}_+$ et à valeurs réelles, tout comme $t \mapsto e^{-t\alpha}t^{r-1}$, par continuité des exponentielles et des puissances. De plus, par croissance comparée, on a $e^{-t\alpha}t^{r-1} = o(t^{-2})$ au voisinage de $+\infty$. Il résulte du critère de RIEMANN que $t \mapsto e^{-t\alpha}$ appartient à $\mathcal{H}_r$ et donc, en particulier, pour $1 \leq i, j \leq n$, u_i et u_j appartiennent à $\mathcal{H}_r$ et on a

$$\langle u_i \,|\, u_j\rangle = \int_0^{+\infty} e^{-t(\lambda_i+\lambda_j)}t^{r-1}\,\mathrm{d}t = \frac{\Gamma(r)}{(\lambda_i+\lambda_j)^r}$$

d'après ce qui précède. Il résulte donc de la question 6 que la matrice $\Gamma(r)C^{*r}$ est positive. Comme $\Gamma(r)$ est strictement positif, d'après les arguments précédents, C^{*r} est également positive, par exemple en invoquant la question 4 puisque la multiplication par un scalaire multiplie le spectre d'une matrice par ce même scalaire. On en conclut que $\boxed{C \text{ est infiniment divisible.}}$

13a. D'après la question 2c on a, pour $s > 0$, $\Gamma(s) = \lim\limits_{m\to+\infty} \dfrac{m!\,m^s}{s(s+1)\cdots(s+m)}$. Soit i et j dans $[\![1;n]\!]$. Par multiplicativité de la limite, puisqu'aucun des termes étudiés n'est nul et que λ_i et λ_j sont positifs, on a

$$k_{ij} = \lim_{m\to+\infty} \frac{m!\,m^{\lambda_i+\lambda_j+1}}{m!\,m^{\lambda_i+1}m!\,m^{\lambda_j+1}} \frac{(\lambda_i+1)\cdots(\lambda_i+m+1)(\lambda_j+1)\cdots(\lambda_j+m+1)}{(\lambda_i+\lambda_j+1)\cdots(\lambda_i+\lambda_j+m+1)}$$

et donc $\boxed{k_{ij} = \lim\limits_{m\to+\infty} \dfrac{1}{m\cdot m!} \displaystyle\prod_{p=1}^{m+1} \dfrac{(\lambda_i+p)(\lambda_j+p)}{(\lambda_i+\lambda_j+p)}.}$

13b. Soit p dans $\mathbf{N}^*$. En considérant la famille de réels strictement positifs $\lambda_1 + \dfrac{p}{2}, \ldots, \lambda_n + \dfrac{p}{2}$, il résulte que la question 12 que la matrice $\left(\dfrac{1}{\lambda_i + \lambda_j + p}\right)$ est infiniment divisible. En considérant ensuite la famille de réels strictement positifs $\lambda_1 + p, \ldots, \lambda_n + p$, il résulte alors de la question 10 que la matrice $\boxed{\left(\dfrac{(\lambda_i + p)(\lambda_j + p)}{\lambda_i + \lambda_j + p}\right) \text{ est infiniment divisible.}}$

D'après la question 8b, l'ensemble des matrices positives est stable par produit de Hadamard et aussi par produit par un scalaire positif, ainsi que remarqué précédemment. On en déduit que, pour tout m dans $\mathbf{N}^*$, la matrice $\left(\dfrac{1}{m \cdot m!} \displaystyle\prod_{p=1}^{m+1} \dfrac{(\lambda_i + p)(\lambda_j + p)}{(\lambda_i + \lambda_j + p)}\right)$ est infiniment divisible. Autrement dit, pour r dans $\mathbf{R}_+^*$ et X dans $\mathbf{R}^n$, et en notant $X = {}^{\mathrm{t}}(x_1, \ldots, x_n)$, pour tout m dans $\mathbf{N}^*$ on a

$$\sum_{1 \leq i,j \leq n} \left(\frac{1}{m \cdot m!} \prod_{p=1}^{m+1} \frac{(\lambda_i + p)(\lambda_j + p)}{(\lambda_i + \lambda_j + p)}\right)^r x_i x_j \geq 0$$

et donc, par passage à la limite en m, linéarité et croissance de la limite et continuité de la fonction puissance r, il vient $\displaystyle\sum_{1 \leq i,j \leq n} k_{ij}^r x_i x_j \geq 0$ et donc $\boxed{K \text{ est infiniment divisible.}}$

PARTIE IV - Matrices conditionnellement positives

14. Soit X dans $\mathbf{R}^n$. On note $X = {}^{\mathrm{t}}(x_1, \ldots, x_n)$. On suppose $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$ et on définit sur $\mathbf{R}_+$ une fonction f par

$$f(r) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} x_i x_j \left(\frac{1}{\lambda_i + \lambda_j}\right)^r = \sum_{1 \leq i,j \leq n} x_i x_j e^{r a_{ij}} .$$

D'après la question 12 c'est une fonction à valeurs positives. De plus, au voisinage de 0 à droite, on a

$$f(r) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} x_i x_j (1 + r a_{ij} + o(r)) = r \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{ij} x_i x_j + o(r)$$

puisque $\displaystyle\sum_{1 \leq i,j \leq n} x_i x_j = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 = 0$. Par passage à la limite quand r tend vers 0 par valeurs strictement positives sur la quantité $f(r)/r$, on en déduit $\displaystyle\sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{ij} x_i x_j \geq 0$ et donc

$\boxed{A \text{ est conditionnellement positive.}}$

15a. Soit B dans $\mathscr{S}_n(\mathbf{R})$ et X dans le noyau de J, i.e. en notant $X = {}^{\mathrm{t}}(x_1, \ldots, x_n)$ tel que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$. Pour ε et λ strictement positifs on a $\langle X \mid (B + \varepsilon I_n + \lambda J) X \rangle = \langle X \mid BX \rangle + \varepsilon \|X\|^2$ et donc, si (ii) est vrai, alors pour tout ε strictement positif $\langle X \mid BX \rangle \geq -\varepsilon \|X\|^2$. Par passage à la limite dans cette inégalité lorsque ε tend vers 0 par valeurs strictement positives, on en déduit $\langle X \mid BX \rangle \geq 0$, i.e. $\boxed{B \text{ est conditionnellement positive.}}$

15b. Soit B dans $\mathscr{S}_n(\mathbf{R})$ conditionnellement positive, ε dans $\mathbf{R}_+^*$ et X dans $\mathbf{R}^n$. Puisque $U \mapsto BU$ est continue sur $\mathbf{R}^n$, on dispose de M dans $\mathbf{R}_+$ tel que, pour tout U dans $\mathbf{R}^n$, $\|BU\| \leq M\|U\|$. On note $Y = \dfrac{1}{n}JX$ et $Z = X - Y$. Puisque $J^2 = nJ$, $\dfrac{1}{n}J$ est un projecteur et puisque J est symétrique, le théorème spectral montre que $\dfrac{1}{n}J$ est le projecteur orthogonal sur la droite $\mathrm{Im}(J)$, puisque J est de rang 1. Il en résulte $JY = JX = nY$, $JZ = 0$ et $\langle Y \mid Z \rangle = 0$. Soit λ dans $\mathbf{R}_+^*$. On pose $C = B + \varepsilon I_n + \lambda J$. Alors $C \in \mathscr{S}_n(\mathbf{R})$ et il vient

$$CX = n\lambda Y + (B + \varepsilon I_n)Y + (B + \varepsilon I_n)Z$$

et donc, par symétrie de $B + \varepsilon I_n$, puisque $\langle BZ \mid Z \rangle \geq 0$ et par inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned}
\langle CX \mid X \rangle &= n\lambda \|Y\|^2 + 2\langle (B+\varepsilon I_n)Y \mid Z \rangle + \langle BZ \mid Z \rangle + \varepsilon \|Z\|^2 \\
&= n\lambda \|Y\|^2 + 2\langle BY \mid Z \rangle + \langle BZ \mid Z \rangle + \varepsilon \|Z\|^2 \\
&\geq n\lambda \|Y\|^2 - 2\|BY\|\,\|Z\| + \varepsilon \|Z\|^2 \\
&\geq n\lambda \|Y\|^2 - 2M\|Y\|\,\|Z\| + \varepsilon \|Z\|^2 \\
&\geq n\lambda \left(\|Y\| - \frac{M}{n\lambda}\|Z\|\right)^2 + \left(\varepsilon - \frac{M^2}{n\lambda}\right)\|Z\|^2 \\
&\geq \left(\varepsilon - \frac{M^2}{n\lambda}\right)\|Z\|^2
\end{aligned}$$

et donc, si $\lambda \geq \dfrac{M^2}{n\varepsilon}$, $\boxed{C \text{ est positive.}}$

16a. Soit X dans le noyau de J. On note $X = {}^{t}(x_1, \ldots, x_n)$ et on définit sur $\mathbf{R}_+$ une fonction f par

$$f(r) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} x_i x_j a_{ij}^r = \sum_{1 \leq i,j \leq n} x_i x_j e^{r\ln(a_{ij})} .$$

Puisque A est infiniment divisible, f est une fonction à valeurs positives. De plus, au voisinage de 0 à droite, on a

$$f(r) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} x_i x_j (1 + r\ln(a_{ij}) + o(r)) = r \sum_{1 \leq i,j \leq n} \ln(a_{ij}) x_i x_j + o(r) .$$

Par passage à la limite quand r tend vers 0 par valeurs strictement positives sur la quantité $f(r)/r$, on en déduit $\displaystyle\sum_{1 \leq i,j \leq n} \ln(a_{ij}) x_i x_j \geq 0$ et donc $\boxed{A \text{ est conditionnellement positive.}}$

16b. Soit ε et r dans $\mathbf{R}_+^*$. On dispose de λ dans $\mathbf{R}_+^*$ tel que $B + \varepsilon I_n + \lambda J$ soit positive. On note $C = (c_{ij}) = B + \varepsilon I_n + \lambda J$. Puisque C est symétrique réelle il en va de même pour la matrice $(\exp(rc_{ij}))$. Pour m dans $\mathbf{N}^*$, il résulte de la question 8b que C^{*m} est positive et donc $\dfrac{r^m}{m!}C^{*m}$ aussi, par positivité de $\dfrac{r^m}{m!}$. Pour $m=0$ on a $\dfrac{r^m}{m!}C^{*m}=J$ et J est positive puisqu'elle est symétrique réelle, de rang 1 et d'unique valeur propre non nulle donnée par sa trace, i.e. n, en vertu de la question 4. On en déduit que, pour tout entier naturel p et tout X dans $\mathbf{R}^n$, $\left\langle X \,\middle|\, \displaystyle\sum_{m=0}^{p} \frac{r^m}{m!}C^{*m}X \right\rangle \geq 0$, i.e. en notant $X={}^{\mathrm{t}}(x_1,\ldots,x_n)$,

$$\sum_{1\leq i,j\leq n}\sum_{m=0}^{p}\frac{r^m c_{ij}^m}{m!}x_ix_j \geq 0\ .$$

Par passage à la limite dans cette inégalité, il vient $\displaystyle\sum_{1\leq i,j\leq n}\exp(rc_{ij})x_ix_j \geq 0$ et donc $\boxed{(\exp(rc_{ij})) \text{ est positive.}}$

En reprenant les notations précédentes, on a donc, pour ε au voisinage de 0 à droite,

$$e^{\lambda}\left(\sum_{1\leq i,j\leq n}\exp(rb_{ij})(1+o(\varepsilon))x_ix_j\right)\geq 0$$

et donc, puisqu'on a $e^{\lambda}>0$, $\displaystyle\sum_{1\leq i,j\leq n}\exp(rb_{ij})(1+o(\varepsilon))x_ix_j \geq 0$. En passant à la limite quand ε tend vers 0 par valeurs strictement positives, il vient $\displaystyle\sum_{1\leq i,j\leq n}\exp(rb_{ij})x_ix_j\geq 0$ et donc $\boxed{(exp(rb_{ij})) \text{ est positive.}}$

17a. Soit B la matrice $\left(-\left|z_i-z_j\right|^2\right)$ et X dans le noyau de J. On note $X={}^{\mathrm{t}}(x_1,\ldots,x_n)$. Il vient

$$\begin{aligned}
\langle X\,|\,BX\rangle &= -\sum_{1\leq i,j\leq n}x_ix_j\left(\left|z_i\right|^2-2\operatorname{Re}(\overline{z_i}z_j)+\left|z_j\right|^2\right)\\
&= -\sum_{i=1}^{n}x_i\left|z_i\right|^2\sum_{j=1}^{n}x_j+2\operatorname{Re}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\overline{z_i}\sum_{j=1}^{n}x_jz_j\right)-\sum_{i=1}^{n}x_i\sum_{j=1}^{n}x_j\left|z_j\right|^2\\
&= 2\left|\sum_{i=1}^{n}x_iz_i\right|^2
\end{aligned}$$

et donc B est conditionnellement positive. Il résulte de la question précédente que, pour tout r dans $\mathbf{R}_+^*$, $\left(e^{-r\left|z_i-z_j\right|^2}\right)$ est positive, i.e. $\boxed{\left(e^{-\left|z_i-z_j\right|^2}\right) \text{ est infiniment divisible.}}$

17b. Soit t dans $\mathbf{R}_+^*$. La matrice $\left(\dfrac{1}{t+\left|z_i-z_j\right|^2}\right)$ est symétrique réelle par construction. Puisque e^{-t} est strictement positif, il résulte de ce qui précède que $\left(e^{-t-\left|z_i-z_j\right|^2}\right)$ est infiniment divisible et donc, pour r dans $\mathbf{R}_+^*$ et X dans $\mathbf{R}^n$, en notant $X={}^{\mathrm{t}}(x_1,\ldots,x_n)$, on a

$$\sum_{1\leq i,j\leq n}x_ix_je^{-r(t+\left|z_i-z_j\right|^2)}\geq 0\ .$$

Or le membre de gauche est une fonction continue de r, intégrable sur $\mathbf{R}_+$ puisque, pour $1 \leq i,j \leq n$, $t+|z_i-z_j|^2>0$. Il en résulte, par intégration

$$0 \leq \sum_{1\leq i,j\leq n} x_i x_j \int_0^{+\infty} e^{-r(t+|z_i-z_j|^2)}\,\mathrm{d}r = \sum_{1\leq i,j\leq n} x_i x_j \frac{1}{t+|z_i-z_j|^2}$$

et donc $\boxed{\left(\dfrac{1}{t+|z_i-z_j|^2}\right) \text{ est positive.}}$

En reprenant les notations précédentes et en supposant que X est dans le noyau de J, il vient

$$\begin{aligned} -\sum_{1\leq i,j\leq n} x_i x_j t^{-\frac12}\frac{|z_i-z_j|^2}{t+|z_i-z_j|^2} &= -\sum_{1\leq i,j\leq n} x_i x_j t^{-\frac12}\left(1-\frac{t}{t+|z_i-z_j|^2}\right)\\ &= t^{\frac12}\sum_{1\leq i,j\leq n} x_i x_j \frac{1}{t+|z_i-z_j|^2}\\ &\geq 0 \end{aligned}$$

Or le membre de gauche est une fonction de t continue sur $\mathbf{R}_+^*$, positive et combinaison linéaire des fonctions $t \mapsto t^{-\frac12}\dfrac{1}{t+|z_i-z_j|^2}$ pour lesquelles $z_i \neq z_j$ (puisque sinon le coefficient dans la combinaison linéaire est nul). Ces fonctions sont équivalentes à $t^{-\frac32}$ au voisinage de $+\infty$ et dans $O(t^{-\frac12})$ au voisinage de 0 à droite. Il résulte du critère de Riemann que ces fonctions sont intégrables sur $\mathbf{R}_+^*$ et donc que leur combinaison linéaire l'est aussi. Par linéarité et postivité de l'intégrale, on en déduit

$$-\sum_{1\leq i,j\leq n} x_i x_j \int_0^{+\infty} t^{-\frac12}\frac{|z_i-z_j|^2}{t+|z_i-z_j|^2}\,\mathrm{d}t \geq 0$$

et donc $\boxed{\left(-\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{-\frac12}\frac{|z_i-z_j|^2}{t+|z_i-z_j|^2}\,\mathrm{d}t\right) \text{ est conditionnellement positive.}}$

17c. Pour $1 \leq i,j \leq n$ tel que $z_i \neq z_j$, la fonction $x \mapsto |z_i-z_j|^2 x^2$ est de classe C^1 et bijective de $\mathbf{R}_+^*$ dans lui-même et il en résulte qu'on a, en posant $t=|z_i-z_j|^2 x^2$,

$$-\int_0^{+\infty} t^{-\frac12}\frac{|z_i-z_j|^2}{t+|z_i-z_j|^2}\,\mathrm{d}t = -2\,|z_i-z_j| \int_0^{+\infty}\frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = -\pi\,|z_i-z_j|\ ,$$

et donc la question précédente montre que $(-\pi\,|z_i-z_j|)$ est conditionnellement positive. Il résulte de la question 16b que pour tout r dans $\mathbf{R}_+^*$ $\left(e^{-r\pi|z_i-z_j|}\right)$ est positive et donc, puisque la multiplication par π est une bijection de $\mathbf{R}_+^*$ dans lui-même,

$\boxed{\left(e^{-|z_i-z_j|}\right) \text{ est infiniment divisible.}}$