X 2013 - MP - Composition B

Exposant de Hölder ponctuel d'une fonction continue

On note $\mathbf{N}$ l'ensemble des entiers naturels, $\mathbf{R}$ celui des nombres réels et $\mathcal{C}$ l'espace vectoriel des fonctions continues définies sur l'intervalle compact $[0;1]$ et à valeurs dans $\mathbf{R}$. Cet espace est muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$ définie pour tout f dans $\mathcal{C}$ par $\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0;1]} |f(x)|$.
On note $\mathcal{C}_0$ le sous-espace de $\mathcal{C}$ formé par les fonctions f telles que $f(0) = f(1) = 0$. La fonction $\log_2$ est définie sur $\mathbf{R}_+^*$ par $\log_2(t) = \dfrac{\ln(t)}{\ln(2)}$, où ln est le logarithme népérien.

PARTIE I - Définition de l'Exposant de Hölder ponctuel

Soit x_0 dans $[0;1]$. Pour tout s dans $[0;1[$ on désigne par $\Gamma^s(x_0)$ le sous-ensemble de $\mathcal{C}$ formé par les fonctions f vérifiant

$$\sup_{x\in[0;1]\setminus\{x_0\}} \frac{|f(x)-f(x_0)|}{|x-x_0|^s} < +\infty \ .$$

1a. Montrer que $\Gamma^s(x_0)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}$, puis que, pour tous réels s_1 et s_2 vérifiant $0 \le s_1 \le s_2 < 1$, l'on a $\Gamma^{s_2}(x_0) \subset \Gamma^{s_1}(x_0)$. Enfin, déterminer $\Gamma^0(x_0)$.

1b. Soit f dans $\mathcal{C}$. Si f est dérivable en x_0, montrer f appartient à $\Gamma^s(x_0)$ pour tout s dans $[0;1[$.

1c. Montrer que pour tout x_0 dans $]0;1[$, il existe f dans $\mathcal{C}$ non dérivable en x_0 tel que pour tout s dans $[0;1[$, $f \in \Gamma^s(x_0)$.

Pour tout f dans $\mathcal{C}$ et tout x_0 dans $[0;1]$, on pose

$$\alpha_f(x_0) = \sup\left\{s\in[0;1[\,|\, f\in\Gamma^s(x_0)\right\} \ .$$

Le réel $\alpha_f(x_0)$ est appelé *exposant de Hölder ponctuel de f en x_0* ; il permet de mesurer finement la régularité locale de f au voisinage du point x_0.

2. Soit p définie sur $[0;1]$ par $p(x) = \sqrt{|1-4x^2|}$. Déterminer l'exposant de Hölder ponctuel de p en $\dfrac{1}{2}$.

Pour tout f dans $\mathcal{C}$, on définit la fonction ω_f sur $[0;1]$ par

$$\omega_f(h) = \sup\left\{|f(x)-f(y)| \,\Big|\, (x,y)\in[0;1]^2 \text{ et } |x-y|\le h\right\} \ .$$

3a. Montrer que ω_f est croissante, et continue en 0.

3b. Montrer que pour tous h, h' dans $[0;1]$ tels que $h \le h'$, ω_f vérifie

$$\omega_f(h') \le \omega_f(h) + \omega_f(h'-h) \ .$$

3c. En déduire que ω_f est continue sur $[0;1]$.

4a. Soit s dans $[0;1[$. On suppose que la fonction $h \mapsto \dfrac{\omega_f(h)}{h^s}$ est bornée sur $]0;1]$. Pour tout x_0 dans $[0;1]$, montrer $f \in \Gamma^s(x_0)$.

4b. Soit q définie sur $[0;1]$ par $q(0) = 0$ et $q(x) = x\cos\left(\dfrac{\pi}{x}\right)$ sinon. Montrer que pour tout x_0 dans $[0;1]$, $\alpha_q(x_0) = 1$, mais que $\dfrac{\omega_q(h)}{\sqrt{h}}$ ne tend pas vers 0 quand h tend vers 0.

PARTIE II - Le système de Schauder

Pour j dans $\mathbf{N}$, on note $\mathcal{T}_j = \{k \in \mathbf{N} \mid 0 \leq k < 2^j\}$ et $\mathcal{I} = \left\{(j,k) \in \mathbf{N}^2 \;\middle|\; k \in \mathcal{T}_j\right\}$. Pour tout (j,k) dans $\mathcal{I}$, soit $\theta_{j,k}$ de $[0;1]$ dans lui-même la fonction de $\mathcal{C}_0$, définie pour tout x dans $[0;1]$ par

$$\theta_{j,k}(x) = \begin{cases} 1 - \left|2^{j+1}x - 2k - 1\right| \text{ si } x \in \left[k2^{-j}; (k+1)2^{-j}\right] , \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

La famille des fonctions $(\theta_{j,k})_{(j,k)\in\mathcal{I}}$ est appelée le *système de Schauder*.

On note $\tilde{k}_j(x)$ la partie entière du réel $2^j x$. On a donc $\tilde{k}_j(x) \leq 2^j x < \tilde{k}_j(x) + 1$.

5a. Montrer que pour tout j dans $\mathbf{N}$ et tout k dans $\mathcal{T}_{j+1}$, il existe un unique entier k' dans $\mathcal{T}_j$ tel que $\left[k2^{-j-1}; (k+1)2^{-j-1}\right] \subset \left[k'2^{-j}; (k'+1)2^{-j}\right]$. On précisera le lien entre k et k'.

5b. Calculer $\theta_{j,k}(\ell 2^{-j-1})$ pour tous j dans $\mathbf{N}$, k dans $\mathcal{T}_j$ et ℓ dans $\mathcal{T}_{j+1}$.

5c. Montrer que pour tout (j,k) dans $\mathcal{I}$, la fonction $\theta_{j,k}$ est continue, affine sur chaque intervalle de la forme $[\ell 2^{-n}; (\ell+1)2^{-n}]$ où $n > j$ et $\ell \in \mathcal{T}_n$.

5d. Montrer que pour (j,k) dans $\mathcal{I}$ et (x,y) dans $[0;1]^2$, on a $|\theta_{j,k}(x) - \theta_{j,k}(y)| \leq 2^{j+1}|x-y|$.

Dans le reste de cette partie f est un élément de $\mathcal{C}_0$. Pour tout n dans $\mathbf{N}$, soit $S_n f$ la fonction de $\mathcal{C}_0$ définie par

$$S_n f = \sum_{j=0}^{n} \sum_{k\in\mathcal{T}_j} c_{j,k}(f)\theta_{j,k} ,$$

où, pour (j,k) dans $\mathcal{I}$, on a posé $c_{j,k}(f) = f\left(\left(k + \dfrac{1}{2}\right)2^{-j}\right) - \dfrac{f(k2^{-j}) + f((k+1)2^{-j})}{2}$.

6. Montrer $\lim\limits_{j\to+\infty} \max\limits_{k\in\mathcal{T}_j} |c_{j,k}(f)| = 0$.

7a. Pour tous (j,k) et (i,ℓ) dans $\mathcal{I}$, calculer $c_{j,k}(\theta_{i,\ell})$.

7b. Soit $a_{j,k}$ une famille de réels indexée par (j,k) dans $\mathcal{I}$. On note $b_j = \max\limits_{k\in\mathcal{T}_j}|a_{j,k}|$, et on suppose que la série $\sum b_j$ est convergente. Pour j dans $\mathbf{N}$, soit f_j^a la fonction définie par

$$f_j^a(x) = \sum_{k\in\mathcal{T}_j} a_{j,k}\theta_{j,k}(x) .$$

Montrer que la série $\sum f_j^a$ est uniformément convergente sur $[0;1]$ vers une fonction notée f^a, qui appartient à $\mathcal{C}_0$ et qui vérifie, pour tout (j,k) dans $\mathcal{I}$, $c_{j,k}(f^a) = a_{j,k}$.

8a. On suppose f de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer qu'il existe une constante M positive ou nulle telle que pour tout (j,k) dans $\mathcal{I}$, $|c_{j,k}(f)| \leq M2^{-j}$. En déduire que la suite de fonctions $(S_n f)$ est uniformément convergente sur $[0;1]$ lorsque n tend vers ∞.

8b. On suppose f de classe $\mathcal{C}^2$. Montrer qu'il existe une constante M' positive ou nulle telle que pour tout (j,k) dans $\mathcal{I}$, $|c_{j,k}(f)| \leq M'4^{-j}$.

9a. Montrer que pour tout entier naturel n et tout ℓ dans $\mathcal{T}_{n+1}$, la fonction $S_n f$ est affine sur l'intervalle $\left[\ell 2^{-n-1}; (\ell+1)2^{-n-1}\right]$.

9b. Soit n dans $\mathbf{N}$. On suppose que pour tout ℓ dans $\mathcal{T}_n$, $(S_{n-1}f)(\ell 2^{-n}) = f(\ell 2^{-n})$. Montrer que l'on a aussi, pour tout ℓ dans $\mathcal{T}_{n+1}$, $(S_n f)(\ell 2^{-n-1}) = f(\ell 2^{-n-1})$.
On pourra distinguer les cas suivant la parité de ℓ.

9c. En déduire que pour tout n dans $\mathbf{N}$ et tout ℓ dans $\mathcal{T}_{n+1}$, $(S_n f)(\ell 2^{-n-1}) = f(\ell 2^{-n-1})$.

10a. Déduire de la question 9 que pour tout f de $\mathcal{C}_0$, $\lim_{n\to+\infty} \|f - S_n f\|_\infty = 0$.

10b. Soit n dans $\mathbf{N}$. Montrer que S_n est un projecteur sur $\mathcal{C}_0$ et qu'il est 1-lipschitzien.

11a. Soit s dans $]0;1[$. Montrer que si a et b sont dans $\mathbf{R}_+$, alors $a^s + b^s \leq 2^{1-s}(a+b)^s$.

11b. Montrer que si f appartient à $\Gamma^s(x_0) \cap \mathcal{C}_0$, alors il existe un réel strictement positif c_1 tel que, pour tout (j,k) dans $\mathcal{I}$, on ait $|c_{j,k}(f)| \leq c_1 \left(2^{-j} + \left|k2^{-j} - x_0\right|\right)^s$.

PARTIE III - Minoration de l'exposant de Hölder ponctuel

L'objectif de cette partie est d'établir une forme de réciproque du résultat de la question 11b. Dans toute cette partie, on désigne par f une fonction dans $\mathcal{C}_0$ vérifiant la propriété suivante :

$$(\mathcal{P}_1) \quad \exists x_0 \in [0;1]\ , \exists s \in]0;1[\ , \exists c_1 \in \mathbf{R}_+^*\ , \forall (j,k) \in \mathcal{I} \quad |c_{j,k}(f)| \leq c_1 \left(2^{-j} + \left|k2^{-j} - x_0\right|\right)^s \ .$$

Dans tout le reste de cette partie, on fixe les x_0, s et c_1 de la propriété $\mathcal{P}_1$ et x dans $[0;1]\backslash\{x_0\}$.

12. Montrer qu'il existe un unique n_0 dans $\mathbf{N}$ tel que $2^{-n_0-1} < |x - x_0| \leq 2^{-n_0}$.

13. On pose $W_j = \sum_{k\in\mathcal{T}_j} |c_{j,k}(f)|\,|\theta_{j,k}(x) - \theta_{j,k}(x_0)|$. Avec $\tilde{k}_j(x)$ comme dans la deuxième partie, montrer $W_j \leq \left(\left|c_{j,\tilde{k}_j(x)}(f)\right| + \left|c_{j,\tilde{k}_j(x_0)}(f)\right|\right) 2^{j+1}\,|x - x_0|$.

14a. Montrer que pour j inférieur ou égal à n_0 (n_0 est déterminé dans la question 12), on a

$$W_j \leq 4c_1 2^{(1-s)j} 3^s\,|x - x_0| \ .$$

14b. En déduire $\displaystyle\sum_{j=0}^{n_0} \sum_{k\in\mathcal{T}_j} |c_{j,k}(f)|\,|\theta_{j,k}(x) - \theta_{j,k}(x_0)| \leq 8\left(2^{1-s} - 1\right)^{-1} (3/2)^s\, c_1\,|x - x_0|^s$.

15. Montrer que pour tout j dans $\mathbf{N}$, $\left|c_{j,\tilde{k}_j(x_0)}(f)\right| \leq 2^{s(1-j)} c_1$. En déduire

$$\sum_{j=n_0+1}^{+\infty} \sum_{k\in\mathcal{T}_j} |c_{j,k}(f)|\,|\theta_{j,k}(x_0)| \leq \left(1 - 2^{-s}\right)^{-1} 2^s c_1\,|x - x_0|^s \ .$$

Dans la suite du problème, on suppose $\|f\|_\infty = 1$ et on rappelle que la fonction ω_f a été définie à la question 3.

16. Montrer qu'il existe un unique n_1 dans $\mathbf{N}$ tel que $\omega_f(2^{-n_1-1}) < 2^{-n_0 s} \leq \omega_f(2^{-n_1})$.

17. Montrer que pour tout n supérieur ou égal à n_1 (déterminé question 16) on a

$$\|f - S_n f\|_\infty \leq 2^{s+1}\,|x - x_0|^s \ .$$

On pourra utiliser les résultats des questions 9a et 9c.

18a. Montrer que lorsque $n_0 < n_1$, on a $\displaystyle\sum_{j=n_0+1}^{n_1} \sum_{k\in\mathcal{T}_j} |c_{j,k}(f)|\,|\theta_{j,k}(x)| \leq c_1 3^s (n_1 - n_0)\,|x - x_0|^s$.

On suppose de plus dans la suite que la fonction ω_f vérifie la propriété suivante :

$$(\mathcal{P}_2) \quad \forall N \in \mathbf{N}^*\ , \exists c_2(N) \in \mathbf{R}_+^*\ , \forall h \in]0;1] \quad \omega_f(h) \leq c_2(N)\left(1 + |\log_2(h)|\right)^{-N} \ .$$

18b. Pour N dans $\mathbf{N}^*$, montrer $n_1 - n_0 \leq n_1 + 1 \leq \left(\dfrac{c_2(N)}{\omega_f(2^{-n_1})}\right)^{1/N}$ et en déduire, en posant $c_3(N) = 3^s c_1 \left(c_2(N)\right)^{1/N}$, $\displaystyle\sum_{j=n_0+1}^{n_1} \sum_{k\in\mathcal{T}_j} |c_{j,k}(f)|\,|\theta_{j,k}(x)| \leq c_3(N)\,|x - x_0|^{(1-\frac{1}{N})s}$.

19. Déduire de ce qui précède $\alpha_f(x_0) \geq s$. (On pourra distinguer les cas $n_0 \geq n_1$ et $n_0 < n_1$.)

X 2013 - MP - Composition B

PARTIE I - Définition de l'Exposant de Hölder ponctuel

1a. Par définition $\Gamma^s(x_0)$ est une partie de $\mathcal{C}$. Elle contient la fonction nulle et est donc non vide. Pour x dans $[0;1] \setminus \{x_0\}$, f et g dans $\Gamma^s(x_0)$ et λ et μ des réels, on a par inégalité triangulaire

$$\begin{aligned}\frac{|(\lambda f+\mu g)(x)-(\lambda f+\mu g)(x_0)|}{|x-x_0|^s} &\leq |\lambda|\,\frac{|f(x)-f(x_0)|}{|x-x_0|^s}+|\mu|\,\frac{|g(x)-g(x_0)|}{|x-x_0|^s}\\ &\leq |\lambda| \sup_{t\in[0;1]\setminus\{x_0\}} \frac{|f(t)-f(x_0)|}{|t-x_0|^s}+|\mu| \sup_{t\in[0;1]\setminus\{x_0\}} \frac{|g(t)-g(x_0)|}{|t-x_0|^s}\\ &< +\infty\end{aligned}$$

et donc la quantité de gauche est majorée indépendemment de x dans $[0;1] \setminus \{x_0\}$ et admet donc un supremum, i.e. $\lambda f + \mu g$ appartient à $\Gamma^s(x_0)$. Par conséquent

$\boxed{\Gamma^s(x_0) \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathcal{C}.}$

Soit s_1 et s_2 des réels vérifiant $0 \leq s_1 \leq s_2 < 1$, f dans $\Gamma^{s_2}(x_0)$ et x dans $[0;1] \setminus \{x_0\}$. On a en particulier $0 < |x-x_0| \leq 1$ et donc $|x-x_0|^{-s_1} \leq |x-x_0|^{-s_2}$, puisque $-s_2 \leq -s_1$. On en déduit

$$\frac{|f(x)-f(x_0)|}{|x-x_0|^{s_1}} \leq \frac{|f(x)-f(x_0)|}{|x-x_0|^{s_2}} \leq \sup_{t\in[0;1]\setminus\{x_0\}} \frac{|f(t)-f(x_0)|}{|t-x_0|^{s_2}} < +\infty$$

et donc, par majoration indépendante de x, $f \in \Gamma^1(x_0)$. D'où $\boxed{\Gamma^{s_2}(x_0) \subset \Gamma^{s_1}(x_0).}$

Enfin toute fonction continue sur $[0;1]$ y est bornée, d'après le théorème de Weierstrass. Elle appartient donc à $\Gamma^0(x_0)$. La réciproque résultant de la définition, on en déduit $\boxed{\Gamma^0(x_0) = \mathcal{C}.}$

1b. Soit f dans $\mathcal{C}$ dérivable en x_0. Par caractérisation de Carathéodory on dispose de g continue en x_0 telle que, pour tout x dans $[0;1]$, $f(x) = f(x_0)+(x-x_0)g(x)$ et on a $g(x_0) = f'(x_0)$. Cela résulte également de la définition de la dérivabilité donnée par Weierstrass. Comme en dehors de x_0, g est quotient de deux fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas, elle est en fait continue sur $[0;1]$. Elle est donc bornée sur cet intervalle, d'après le théorème de Weierstrass et si M est un majorant de $|g|$, il vient pour tout x dans $[0;1] \setminus \{x_0\}$ et tout s dans $[0;1[$

$$\frac{|f(x)-f(x_0)|}{|x-x_0|^s} \leq \frac{|f(x)-f(x_0)|}{|x-x_0|} \leq M$$

et donc, par majoration indépendante de x, $\boxed{f \text{ appartient à } \Gamma^s(x_0).}$

1c. Soit x_0 dans $]0;1[$. On pose $f(x) = |x-x_0|$. Alors pour tout s dans $[0;1[$ et tout x dans $[0;1] \setminus \{x_0\}$, on a

$$\frac{|f(x)-f(x_0)|}{|x-x_0|^s} = |x-x_0|^{1-s} \leq 1$$

et donc $\boxed{f \in \Gamma^s(x_0) \text{ mais } f \text{ n'est pas dérivable en } x_0.}$

2. Soit x dans $[0;1]$ distinct de $\frac{1}{2}$. On a

$$\frac{\left|p(x)-p(\frac{1}{2})\right|}{\left|x-\frac{1}{2}\right|^{1/2}} = 2\sqrt{x+\frac{1}{2}} \leq \sqrt{6}$$

mais, pour $s > \dfrac{1}{2}$,

$$\frac{\left|p(x)-p(\frac{1}{2})\right|}{\left|x-\frac{1}{2}\right|^{s}} \sim_{\frac{1}{2}} 2\left|x-\frac{1}{2}\right|^{\frac{1}{2}-s}$$

et donc cette quantité admet une limite infinie quand x tend vers $\frac{1}{2}$; en particulier $p \notin \Gamma^s(1/2)$. Par définition de l'exposant de Hölder ponctuel de p en $\dfrac{1}{2}$, on a donc $\boxed{\alpha_p(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}.}$

3a. Soit f dans $\mathcal{C}$. Puisque f est continue sur $[0;1]$, elle y est bornée, d'après le théorème de Weierstrass, et donc $\left\{|f(x)-f(y)| \;\middle|\; (x,y) \in [0;1]^2\right\}$ est majoré. Il en résulte que ω_f est bien défini. L'ensemble dont il est le supremum est croissant avec h et donc, par croissance du supremum, ω_f est croissant.

Par définition ω_f est positive et on a $\omega_f(0) = 0$. De plus, d'après le théorème de Heine, f est uniformément continue sur $[0;1]$. Pour $\varepsilon > 0$ on dispose donc de $\eta > 0$ tel que, pour tous x et y dans $[0;1]$ vérifiant $|x-y| < \eta$, on a $|f(x)-f(y)| < \varepsilon$. Autrement dit $\omega_f(\eta) < \varepsilon$ ou encore $|\omega_f(\eta) - \omega_f(0)| < \varepsilon$ par positivité de ω_f et puisque $\omega_f(0) = 0$. Il en résulte que $\boxed{\omega_f \text{ est croissante, et continue en } 0.}$

3b. Soit h et h' dans $[0;1]$ tels que $h \leq h'$. Soit x et y dans $[0;1]$ vérifiant $|x-y| \leq h'$. On dispose donc de u dans $\mathbf{R}$ tel que $y = x + h'u$ et $|u| \leq 1$. On a alors $|x+hu-x| \leq h$ et $|x+hu-y| = (h'-h)\,|u| \leq h'-h$ et donc, par inégalité triangulaire,

$$|f(x)-f(y)| \leq |f(x)-f(x+hu)| + |f(x+hu)-f(y)| \leq \omega_f(h) + \omega_f(h')\ .$$

Par passage au supremum à gauche, il vient $\boxed{\omega_f(h') \leq \omega_f(h) + \omega_f(h'-h).}$

3c. Soit h et h' dans $[0;1]$. Si $h \leq h'$, on a, par croissance de ω_f et d'après ce qui précède :

$$\left|\omega_f(h') - \omega_f(h)\right| = \omega_f(h') - \omega_f(h) \leq \omega_f(|h'-h|)$$

et si $h' \leq h$,

$$\left|\omega_f(h') - \omega_f(h)\right| = \omega_f(h) - \omega_f(h') \leq \omega_f(|h'-h|)\ .$$

Il résulte de la continuité en 0 de ω_f qu'elle est uniformément continue sur $[0;1]$ et donc a fortiori $\boxed{\omega_f \text{ est continue sur } [0;1].}$

4a. Soit x_0 et x dans $[0;1]$, avec $x \neq x_0$, et M un majorant de $h \mapsto \dfrac{\omega_f(h)}{h^s}$ sur $]0;1]$. Par définition on a

$$\frac{|f(x)-f(x_0)|}{|x-x_0|^s} \leq \frac{\omega_f(|x-x_0|)}{|x-x_0|^s} \leq M$$

puisque $|x-x_0| \leq 1$. Par conséquent le membre de gauche admet majorant indépendant de x et donc $\boxed{f \in \Gamma^s(x_0).}$

4b. Soit s dans $[0;1[$. Par définition de q, elle est de classe C^∞ sur $]0;1]$. D'après 1b, pour x_0 dans $]0;1]$, $f \in \Gamma^s(x_0)$. Pour x non nul on a $\dfrac{|q(x)-q(0)|}{|x-0|^s} = x^{1-s}\left|\cos\left(\dfrac{\pi}{x}\right)\right| \leq x^{1-s} \leq 1$ et donc $f \in \Gamma^s(0)$. Par conséquent, pour tout x_0 dans $[0;1]$, $\boxed{\alpha_q(x_0) = 1.}$

Soit n dans $\mathbf{N}$. On a $\left|\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}\right| = \dfrac{1}{n(n+1)}$. En posant $h_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$, il vient

$$\frac{\omega_q(h_n)}{\sqrt{h_n}} \geq \sqrt{n(n+1)}\left|q\left(\frac{1}{n}\right) - q\left(\frac{1}{n+1}\right)\right| = \sqrt{n(n+1)}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\right) \geq 2$$

la dernière minoration résultant de l'inégalité arithmético-géométrique $\sqrt{ab} \leq \dfrac{1}{2}(a+b)$ appliquée à $a = \dfrac{1}{n}$ et $b = \dfrac{1}{n+1}$. En particulier $\dfrac{\omega_q(h_n)}{\sqrt{h_n}}$ ne saurait tendre vers 0. Comme (h_n) tend quant à elle vers 0, $\boxed{\dfrac{\omega_q(h)}{\sqrt{h}} \text{ ne tend pas vers 0 quand } h \text{ tend vers 0.}}$

PARTIE II

5a. Soit j dans $\mathbf{N}$, k dans $\mathcal{T}_{j+1}$ et k' dans $\mathbf{N}$. On a

$$\begin{aligned}
\left[k2^{-j-1};(k+1)2^{-j-1}\right] \subset \left[k'2^{-j};(k'+1)2^{-j}\right] &\iff \frac{k'}{2^j} \leq \frac{k}{2^{j+1}} < \frac{k+1}{2^{j+1}} \leq \frac{k'+1}{2^j} \\
&\iff k' \leq \frac{k}{2} < \frac{k+1}{2} \leq k'+1 \\
&\iff k' \leq \frac{k}{2} < k'+1 \text{ et } \frac{k+1}{2} \leq k'+1 \\
&\iff k' = \left[\frac{k}{2}\right] \text{ et } k \leq 2k'+1 \\
&\iff k' = \left[\frac{k}{2}\right] \text{ et } k < 2k'+2 \\
&\iff k' = \left[\frac{k}{2}\right] \text{ et } \frac{k}{2} < k'+1 \\
&\iff k' = \left[\frac{k}{2}\right] .
\end{aligned}$$

Comme $0 \leq k < 2^{j+1}$ entraîne $0 \leq \dfrac{k}{2} < 2^j$ et donc aussi $0 \leq \left[\dfrac{k}{2}\right] < 2^j$, on en déduit l'existence et l'unicité de k' dans $\mathcal{T}_{j+1}$ vérifiant la propriété voulue, si k est donné, et on a

$$\boxed{\left[k2^{-j-1};(k+1)2^{-j-1}\right] \subset \left[k'2^{-j};(k'+1)2^{-j}\right] \iff k' = \left[\frac{k}{2}\right].}$$

5b. Soit j dans $\mathbf{N}$ et k dans $\mathcal{T}_j$. La fonction valeur absolue est affine par morceaux et donc $\theta_{j,k}$ aussi puisque $\theta_{j,k}$ s'annule aux bornes de $\left[k2^{-j};(k+1)2^{-j}\right]$. Plus précisément la subdivision associée à $\theta_{j,k}$ est

$$(0, k2^{-j}, (2k+1)2^{-j-1}, (k+1)2^{-j}, 1)\,,$$

en convenant de retirer 0 si $k=0$ et de retirer 1 si $k=2^j-1$, et la valeur en ces points est respectivement $(0,0,1,0,0)$. On peut récrire cette subdivision sous la forme

$$(0, 2k\times 2^{-j-1}, (2k+1)\times 2^{-j-1}, (2k+2)\times 2^{-j-1}, 1)$$

et il en résulte que, pour ℓ dans $\mathcal{T}_{j+1}$, $\theta_{j,k}(\ell 2^{-j-1})$ est nul sauf si $\ell = 2k+1$ auquel cas il vaut 1. Autrement dit, en notant $\delta_{a,b}$ le symbôle de Kronecker, $\boxed{\theta_{j,k}(\ell 2^{-j-1}) = \delta_{\ell,2k+1}.}$

5c. Soit (j,k) dans $\mathcal{I}$. On a déjà justifié que $\theta_{j,k}$ est affine par morceaux sur $[0;1]$ et donc aussi continue. Sa restriction à tout intervalle contenu dans $[0;1]$ l'est donc aussi. Soit $n>j$ et $\ell\in\mathcal{T}_n$, par récurrence immédiate à partir du résultat de la question 5a, on dispose d'un unique k' dans $\mathcal{T}_{j+1}$ tel que $[\ell 2^{-n};(\ell+1)2^{-n}]\subset\left[k'2^{-j-1};(k'+1)2^{-j-1}\right]$, et k' est obtenu par itération $n-j-1$ fois de la fonction $x\mapsto\left\lfloor\dfrac{x}{2}\right\rfloor$ à ℓ. Comme les points de la subdivision associée à $\theta_{j,k}$ sont de la forme $m2^{-j-1}$ avec m entier, il en résulte que $\theta_{j,k}$ est affine sur $\left[k'2^{-j-1};(k'+1)2^{-j-1}\right]$ et donc a fortiori sur $[\ell 2^{-n};(\ell+1)2^{-n}]$. Par conséquent $\boxed{\theta_{j,k} \text{ est continue, affine sur } [\ell 2^{-n};(\ell+1)2^{-n}].}$

5d. Soit (j,k) dans $\mathcal{I}$. La fonction $\theta_{j,k}$ est affine par morceaux avec comme subdivision associée $(0, k2^{-j}, (2k+1)2^{-j-1}, (k+1)2^{-j}, 1)$ avec comme valeurs associées $(0,0,1,0,0)$ et donc avec comme pentes successives $(0, 2^{j+1}, -2^{j+1}, 0)$. Ces pentes sont toutes, en valeur absolue, inférieures à 2^{j+1}. Soit maintenant (x,y) dans $[0;1]^2$ et (x_n) la suite finie dont le premier terme est x, le dernier y et entre eux les éventuels points de la subdivision associée à $\theta_{j,k}$, choisis de telle sorte que la suite (x_n) soit monotone. On note p son nombre de termes. Il vient, par inégalité triangulaire et puisque, pour tout n inférieur à p, $\theta_{j,k}$ est affine de pente inféirieure en valeur absolue à 2^{j+1} entre x_{n-1} et x_n,

$$|\theta_{j,k}(x)-\theta_{j,k}(y)| \le \sum_{n=1}^{p} |\theta_{j,k}(x_{n-1})-\theta_{j,k}(x_n)| \le \sum_{k=1}^{p} 2^{j+1}\,|x_{n-1}-x_n|$$

et donc, par monotonie de la suite (x_n), il vient $\boxed{|\theta_{j,k}(x)-\theta_{j,k}(y)|\le 2^{j+1}\,|x-y|.}$

6. Soit j dans $\mathbf{N}$ et k dans $\mathcal{T}_j$. On a

$$c_{j,k}(f) = \frac{1}{2}\left(f\left((2k+1)2^{-j-1}\right) - f(2k2^{-j-1})\right) + \frac{1}{2}\left(f\left((2k+1)2^{-j-1}\right) - f((k+1)2^{-j-1})\right)$$

et donc $|c_{j,k}(f)|\le\omega_f(2^{-j-1})$. Il résulte donc de 3a $\boxed{\lim_{j\to+\infty}\max_{k\in\mathcal{T}_j}|c_{j,k}(f)|=0.}$

7a. Soit (j,k) et (i,ℓ) dans $\mathcal{I}$. Si $k>\ell$ alors $\theta_{i,\ell}$ est affine sur $\left[k2^{-j};(k+1)2^{-j}\right]$ d'après 5c et donc $c_{j,k}(\theta_{i,\ell})=0$. Si $k<\ell$ alors $\theta_{i,\ell}$ est nul en tous les points de la forme $m2^{-k-1}$ avec m entier et donc une fois encore $c_{j,k}(\theta_{i,\ell})=0$. Si $k=\ell$, alors $\theta_{i,\ell}$ est nul en tous les points de la forme $m2^{-k}$ avec m entier et donc il résulte de 5b $\boxed{c_{j,k}(\theta_{i,\ell})=\delta_{k,\ell}\delta_{i,j}.}$

7b. Pour (j,k) dans $\mathcal{I}$, comme $\theta_{j,k}$ est affine par morceaux, elle prend des valeurs comprises entre la plus petite et la plus grande valeur qu'elle prend en les points de sa subdivision associée, i.e. entre 0 et 1. Il en résulte $\|\theta_{j,k}\|_\infty = 1$.

Pour j dans $\mathbf{N}$ et x dans $[0;1]$, si $2^j x$ est entier alors $f_j^a(x) = 0$ puisque les fonctions $\theta_{j,k}$ s'annulent toutes en x, pour k dans $\mathcal{T}_j$. Sinon on a $f_j^a(x) = a_{j,\tilde{k}_j(x)}\theta_{j,\tilde{k}_j(x)}(x)$ et il en résulte $\|f^a\|_\infty \leq \max\limits_{k\in\mathcal{T}_j} |a_{j,k}|$. Par comparaison entre séries à termes positifs, on en déduit que la série $\sum f_j^a$ est normalement convergente sur $[0;1]$ et donc a fortiori

$\boxed{\sum f_j^a \text{ est uniformément convergente sur } [0;1].}$

Sa somme est une fonction continue puisque les $\theta_{j,k}$ et donc aussi les f_j^a le sont (pour j dans $\mathbf{N}$ et k dans $\mathcal{T}_j$), puisque la convergence est normale.

Pour j dans $\mathbf{N}$ et k dans $\mathcal{T}_j$, on a $\theta_{j,k}(0) = \theta_{j,k}(1) = 0$ et donc aussi $f_j^a(0) = f_j^a(1) = 0$ et donc $\boxed{f^a \in \mathcal{C}_0.}$

Soit (j,k) dans $\mathcal{I}$. Par linéarité de la limite, et donc de la somme des séries, on a

$$c_{j,k}(f^a) = \sum_{i=0}^{n}\sum_{\ell\in\mathcal{T}_i} a_{i,\ell}c_{j,k}(\theta_{i,\ell})$$

et donc, d'après la question précédente $\boxed{c_{j,k}(f^a) = a_{j,k}.}$

8a. Soit (j,k) dans $\mathcal{I}$. Puisque f est de classe $\mathcal{C}^1$ elle est $\|f'\|_\infty$-lipschitzienne d'après le théorème de Lagrange, dit des accroissements finis. D'après le calcul effectué question 6, il vient

$$|c_{j,k}(f)| \leq \omega_f(2^{-j-1}) \leq \|f'\|_\infty 2^{-j-1}$$

et donc on dispose de M dans $\mathbf{R}_+$ indépendant de k tel que $\boxed{|c_{j,k}(f)| \leq M2^{-j}.}$

Par comparaison avec une série géométrique on en déduit que la série $\sum \max_{k\in\mathcal{T}_j} |c_{j,k}(f)|$ est convergente et donc, d'après la question précédente,

$\boxed{(S_n f) \text{ est uniformément convergente sur } [0;1].}$

8b. Soit x dans $]0;1[$ et g l'application définie $[-a;a]$, avec $a = \min(x, 1-x)$, par

$$g(h) = f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)\ .$$

Alors g est de classe $\mathcal{C}^2$ puisque f l'est et on a $g(0) = g'(0) = 0$. Par conséquent l'inégalité de Taylor-Lagrange donne, pour $|h| < a$, $|g(h)| \leq \dfrac{h^2}{2}\|g''\|_\infty \leq h^2\|f''\|_\infty$. Il en résulte qu'il existe une constante M' dans $\mathbf{R}_+$ telle que pour tout (j,k) dans $\mathcal{I}$, $\boxed{|c_{j,k}(f)| \leq M'4^{-j}.}$

9a. Soit n dans $\mathbf{N}$ et ℓ dans $\mathcal{T}_{n+1}$. D'après 5c $S_n f$ est somme de fonctions affines sur l'intervalle $\left[\ell 2^{-n-1}; (\ell+1)2^{-n-1}\right]$. Par conséquent $\boxed{S_n f \text{ est affine sur cet intervalle.}}$

9b. Soit ℓ dans $\mathcal{T}_{n+1}$. D'après 5a, et avec la convention $S_{-1}f = 0$, on a

$$(S_n f)(\ell 2^{-n-1}) = (S_{n-1}f)(\ell 2^{-n-1}) + \sum_{k\in\mathcal{T}_n} \delta_{\ell,2k+1}c_{n,k}(f)$$

et en particulier si ℓ est pair il vient

$$(S_n f)(\ell 2^{-n-1}) = (S_{n-1}f)\left(\frac{\ell}{2}2^{-n}\right) = f\left(\frac{\ell}{2}2^{-n}\right) = f(\ell 2^{-n-1})\ .$$

Si ℓ est impair, on pose $\ell = 2p+1$ et il vient en utilisant la question précédente

$$\begin{aligned}(S_n f)(\ell 2^{-n-1}) &= (S_{n-1}f)((2p+1)2^{-n-1}) + c_{n,p}(f)\\ &= \frac{1}{2}\left((S_{n-1}f)(p2^{-n}) + (S_{n-1}f)((p+1)2^{-n})\right) + c_{n,p}(f)\\ &= \frac{1}{2}\left(f(p2^{-n}) + f((p+1)2^{-n})\right) + c_{n,p}(f)\\ &= f(\ell 2^{-n-1})\end{aligned}$$

et donc, dans tous les cas, $\boxed{(S_n f)(\ell 2^{-n-1}) = f(\ell 2^{-n-1}).}$

9c. D'après la question précédente le prédicat $(\mathbf{H}_n)$ donné par

« Pour tout ℓ dans $\mathcal{T}_n$, $(S_{n-1}f)(\ell 2^{-n}) = f(\ell 2^{-n})$ »

est héréditaire. Pour $n = 0$, avec la convention $S_{-1}(f) = 0$, il est vrai puisque f appartient à $\mathcal{C}_0$. D'après le principe de récurrence, il est donc vrai pour tout entier n et donc aussi en particulier pour $n \geq 1$, i.e. pour tout n dans $\mathbf{N}$ et tout ℓ dans $\mathcal{T}_{n+1}$, $\boxed{(S_n f)(\ell 2^{-n-1}) = f(\ell 2^{-n-1}).}$

10a. Soit j dans $\mathbf{N}$ et x dans $[0;1]$, on a $\left|\tilde{k}_j(x)2^{-j} - x\right| \leq 2^{-j}$ et donc la suite $\left(\tilde{k}_j(x)2^{-j}\right)_{j\in\mathbf{N}}$ converge vers x. D'après 8a la suite $S_n f$ converge uniformément vers une limite, que l'on note g. On en déduit $\lim S_n(f)(\tilde{k}_{n+1}(x)2^{-n-1}) = g(x)$. D'après ce qui précède on a donc $\lim_n f(\tilde{k}_{n+1}(x)2^{-n-1}) = g(x)$ et donc, par continuité de f en x, $g(x) = f(x)$, i.e. $g = f$. Comme $S_n f$ converge uniformément vers sa limite, $\boxed{\lim_{n\to+\infty} \|f - S_n f\|_\infty = 0.}$

10b. Pour (j,k) dans $\mathcal{I}$, $c_{j,k}$ est linéaire donc S_n l'est aussi et $\theta_{j,k} \in \mathcal{C}_0$ et donc S_n est à valeurs dans cet espace vectoriel. De plus, toujours par linéarité et d'après 7a, on a $c_{j,k} \circ S_n = c_{j,k}$, et donc $S_n \circ S_n = S_n$ par linéarité. Il en résulte que $\boxed{S_n \text{ est un projecteur sur } \mathcal{C}_0.}$
Pour f dans $\mathcal{C}_0$, $S_n f$ est affine par morceaux et coïncide avec f en les ponts de la subdivision adaptée, d'après 9, il en résulte qu'elle prend des valeurs comprises entre des valeurs prises par f et donc $\|S_n f\|_\infty \leq \|f\|_\infty$. Par linéarité de S_n, il en découle qu'il est $\boxed{\text{1-lipschitzien.}}$

11a. Soit a et b dans $\mathbf{R}_+$. Si a ou b est nul, puisque $0^s = 0$ et $2^{1-s} \geq 1$, on a $a^s + b^s \leq 2^{1-s}(a+b)^s$. Sinon l'inégalité

$$\frac{a^s + b^s}{2} \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^s$$

résulte de la concavité de la fonction puissance s pour $0 < s < 1$ (par exemple parce que sa dérivée seconde est négative puisque $s(s-1) < 0$). Donc $\boxed{a^s + b^s \leq 2^{1-s}(a+b)^s.}$

11b. Soit f dans à $\Gamma^s(x_0) \cap \mathcal{C}_0$ et (j,k) dans $\mathcal{I}$. Par définition on dispose de M dans $\mathbf{R}_+$ tel que, pour x dans $[0;1]$, $|f(x) - f(x_0)| \leq M\,|x - x_0|^s$. On note g la fonction $x \mapsto f(x) - f(x_0)$. Par linéarité de $c_{j,k}$ et puisque les fonctions constantes sont affines

$$c_{j,k}(g) = c_{j,k}(f) - c_{j,k}(f(x_0)) = c_{j,k}(f)\ .$$

Il en résulte, par inégalité triangulaire

$$|c_{j,k}(f)| \leq M\left|(2k+1)2^{-j-1} - x_0\right|^s + \frac{M}{2}\left(\left|k2^{-j} - x_0\right|^s + \left|(k+1)2^{-j} - x_0\right|^s\right)\ .$$

Or, par inégalité triangulaire,

$$\left|(2k+1)2^{-j-1} - x_0\right| \leq 2^{-j-1} + \left|k2^{-j} - x_0\right| \leq 2^{-j} + \left|k2^{-j} - x_0\right|$$

et donc, par croissance des fonctions puissance d'exposant positif,

$$\left|(2k+1)2^{-j-1} - x_0\right|^s \leq \left(2^{-j} + \left|k2^{-j} - x_0\right|\right)^s .$$

De plus, d'après la question précédente

$$\left|k2^{-j} - x_0\right|^s + \left|(k+1)2^{-j} - x_0\right|^s \leq 2^{1-s}\left(\left|k2^{-j} - x_0\right| + \left|(k+1)2^{-j} - x_0\right|\right)^s .$$

Or, par inégalité triangulaire,

$$\left|k2^{-j} - x_0\right| + \left|(k+1)2^{-j} - x_0\right| \leq 2\left|k2^{-j} - x_0\right| + 2^{-j} \leq 2\left(\left|k2^{-j} - x_0\right| + 2^{-j}\right)$$

et donc, par croissance de la fonction puissance, on conclut qu'en posant $c_1 = 2M$, il existe un réel strictement positif c_1 tel que $\boxed{|c_{j,k}(f)| \leq c_1\left(2^{-j} + |k2^{-j} - x_0|\right)^s.}$

PARTIE III

12. Soit n dans $\mathbf{N}$, on a

$$\begin{aligned} 2^{-n-1} < |x - x_0| \leq 2^{-n} &\iff -n-1 < \ln_2|x - x_0| \leq -n \\ &\iff n \leq -\ln_2|x - x_0| < n+1 \iff n = [-\ln_2|x - x_0|] \end{aligned}$$

et donc il existe un unique n_0 dans $\mathbf{N}$ tel que $\boxed{2^{-n_0-1} < |x - x_0| \leq 2^{-n_0}.}$

13. Soit j dans $\mathbf{N}$. On a déjà remarqué en 7b que pour k dans $\mathcal{T}_j$, si $k \neq \tilde{k}_j(x)$ alors $\theta_{j,k}(x) = 0$ et si $k \neq \tilde{k}_j(x_0)$ alors $\theta_{j,k}(x_0) = 0$, donc

$$W_j = \sum_{k \in \left\{\tilde{k}_j(x), \tilde{k}_j(x_0)\right\}} |c_{j,k}(f)|\,|\theta_{j,k}(x) - \theta_{j,k}(x_0)|$$

et donc, en utilisant 5d,

$$W_j = \sum_{k \in \left\{\tilde{k}_j(x), \tilde{k}_j(x_0)\right\}} |c_{j,k}(f)|\,2^{j+1}\,|x - x_0|$$

et donc $\boxed{W_j \leq \left(\left|c_{j,\tilde{k}_j(x)}(f)\right| + \left|c_{j,\tilde{k}_j(x_0)}(f)\right|\right)2^{j+1}\,|x - x_0|.}$

14a. Soit j inférieur ou égal à n_0. Soit $j \leq n_0$. D'après $(\mathcal{P}_1)$ on a

$$\left|c_{j,\tilde{k}_j(x)}(f)\right| + \left|c_{j,\tilde{k}_j(x_0)}(f)\right| \leq c_1\left(\left|\tilde{k}_j(x)2^{-j} - x_0\right| + 2^{-j}\right)^s + c_1\left(\left|\tilde{k}_j(x_0)2^{-j} - x_0\right| + 2^{-j}\right)^s$$

Or, par inégalité triangulaire,

$$\left|\tilde{k}_j(x)2^{-j} - x_0\right| \leq \left|\tilde{k}_j(x)2^{-j} - x\right| + |x - x_0|$$

et donc, par définition de $\tilde{k}_j$, puisque $|x - x_0| \leq 2^{-n_0} \leq 2^{-j}$ et en utilisant 11a

$$\begin{aligned}
\left|c_{j,\tilde{k}_j(x)}(f)\right| + \left|c_{j,\tilde{k}_j(x_0)}(f)\right| &\leq c_1\left(|x-x_0| + 2\times 2^{-j}\right)^s + c_1\left(2\times 2^{-j}\right)^s \\
&\leq c_1 2^{1-s}\left(|x-x_0| + 4\times 2^{-j}\right)^s \\
&\leq 2c_1 2^{-sj}\left(\frac{5}{2}\right)^s
\end{aligned}$$

d'où $\boxed{W_j \leq 4c_1 2^{(1-s)j}3^s\,|x-x_0|.}$

14b. Par sommation des inégalités précédentes, et puisque $|x - x_0| \leq 2^{-n_0}$, il vient

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{n_0}\sum_{k\in\mathcal{T}_j}|c_{j,k}(f)|\,|\theta_{j,k}(x)-\theta_{j,k}(x_0)| &\leq 4c_1\left(2^{(1-s)}-1\right)^{-1}3^s\,|x-x_0|\left(2^{(n_0+1)(1-s)}-1\right) \\
&\leq 4c_1\left(2^{(1-s)}-1\right)^{-1}3^s\,|x-x_0|\,2^{1-s}2^{n_0(1-s)} \\
&\leq 8c_1\left(2^{(1-s)}-1\right)^{-1}\left(\frac{3}{2}\right)^s|x-x_0|\,2^{n_0(1-s)} \\
&\leq 8c_1\left(2^{(1-s)}-1\right)^{-1}\left(\frac{3}{2}\right)^s 2^{-n_0 s}
\end{aligned}$$

et donc $\boxed{\sum_{j=0}^{n_0}\sum_{k\in\mathcal{T}_j}|c_{j,k}(f)|\,|\theta_{j,k}(x)-\theta_{j,k}(x_0)| \leq 8\left(2^{1-s}-1\right)^{-1}(3/2)^s\,c_1\,|x-x_0|^s.}$

15. Soit j dans $\mathbf{N}$. D'après $(\mathcal{P}_1)$ et par définition de $\tilde{k}_j$, $\left|c_{j,\tilde{k}_j(x_0)}(f)\right| \leq c_1(2^{-j}+2^{-j})^s$ et donc $\boxed{\left|c_{j,\tilde{k}_j(x_0)}(f)\right| \leq 2^{s(1-j)}c_1.}$

Comme remarqué en 7b, pour k dans $\mathcal{T}_j$, si $k \neq \tilde{k}_j(x_0)$ on a $\theta_{j,k}(x_0) = 0$. De plus, comme également remarqué en 7b $\|\theta_{j,k}\|_\infty = 1$. Par conséquent

$$\sum_{k\in\mathcal{T}_j}|c_{j,k}(f)|\,|\theta_{j,k}(x_0)| \leq \left|c_{j,\tilde{k}_j(x_0)}(f)\right| \leq 2^{s(1-j)}c_1\ .$$

Par sommation de série géométrique, puisque $0 < 2^{-s} < 1$, on a

$$\sum_{j=n_0+1}^{+\infty}\sum_{k\in\mathcal{T}_j}|c_{j,k}(f)|\,|\theta_{j,k}(x_0)| \leq 2^s\left(1-2^{-s}\right)^{-1}2^{-(n_0+1)s}c_1\ .$$

Comme $2^{-(n_0+1)} < |x - x_0|$, il vient, par croissance de la fonction puissance s,

$$\boxed{\sum_{j=n_0+1}^{+\infty}\sum_{k\in\mathcal{T}_j}|c_{j,k}(f)|\,|\theta_{j,k}(x_0)| \leq \left(1-2^{-s}\right)^{-1}2^s c_1\,|x-x_0|^s.}$$

16. D'après le théorème de Weierstrass, puisque f est continue et de norme 1, on dispose de x dans $[0;1]$ tel que $|f(x)| = 1$ et donc, puisque $f(0) = 0$, $\omega_f(x) \geq 1$. Puisque $2^{-n_0 s} \leq 1$ il en résulte que $\omega_f^{-1}\left([2^{-n_0 s}; +\infty[\right)$ est non vide. Comme ω_f est continue et croissante, d'après 3a et 3c, cet ensemble est un intervalle fermé : il est fermé par continuité et si x y appartient alors c'est le cas aussi pour tout y tel que $x \leq y$ puisqu'alors $2^{-n_0 s} \leq \omega_f(x) \leq \omega_f(y)$. On note a sa borne inférieure. Puisque $\omega_f(0) = 0$, on a $a > 0$ et donc, comme en 12, on dispose de n_1 dans $\mathbf{N}$ tel que $2^{-n_1-1} < a \leq 2^{-n_1}$. Par croissance de ω_f on en déduit $2^{-n_0 s} \leq \omega_f(2^{-n_1})$. Par définition de a on en déduit aussi $\omega_f(2^{-n_1-1}) < 2^{-n_0 s}$.

Pour n dans $\mathbf{N}$, si $n < n_1$ alors $n + 1 \leq n_1$ et donc $\omega_f(2^{-n+1}) \geq 2^{-n_0 s}$; et si $n > n_1$ alors $\omega_f(2^{-n}) < 2^{-n_0 s}$. Il en résulte que n_1 est l'unique entier a posséder la propriété voulue, i.e. $\boxed{\omega_f(2^{-n_1-1}) < 2^{-n_0 s} \leq \omega_f(2^{-n_1}).}$

17. Soit n supérieur ou égal à n_1 et x dans $[0;1]$. Il vient, en utilisant 9c,

$$S_n f(x) - f(x) = S_n f(x) - S_n f\left(\tilde{k}_n(x) 2^{-n-1}\right) + f\left(\tilde{k}_n(x) 2^{-n-1}\right) - f(x)$$

et donc puisque $S_n f$ est affine sur $\left[\tilde{k}_n(x)2^{-n-1}; (\tilde{k}_n(x)+1)2^{-n-1}\right]$ d'après 9a et par inégalité triangulaire

$$|S_n f(x) - f(x)| \leq \left|S_n f((\tilde{k}_n(x)+1)2^{-n-1}) - S_n f(\tilde{k}_j(x)2^{-n-1})\right| + \left|f(\tilde{k}_n(x)2^{-n-1}) - f(x)\right|$$

i.e. d'après 9c

$$\begin{aligned} |S_n f(x) - f(x)| &\leq \left|f((\tilde{k}_n(x)+1)2^{-n-1}) - f(\tilde{k}_j(x)2^{-n-1})\right| + \left|f(\tilde{k}_n(x)2^{-n-1}) - f(x)\right| \\ &\leq 2\omega_f(2^{-n-1})\ . \end{aligned}$$

Puisque $n \geq n_1$, il vient

$$\omega_f(2^{-n-1}) \leq 2^{-n_0 s} = 2^s 2^{(-n_0-1)s} \leq 2^s |x - x_0|^s$$

et donc $\boxed{\|f - S_n f\|_\infty \leq 2^{s+1} |x - x_0|^s.}$

18a. Soit $j \geq n_0 + 1$, comme remarqué dans la question 15, on a

$$\sum_{k \in \mathcal{T}_j} |c_{j,k}(f)|\,|\theta_{j,k}(x)| \leq \left|c_{j,\tilde{k}_j(x)}(f)\right| \leq c_1 \left(\left|\tilde{k}_j(x)2^{-j} - x_0\right| + 2^{-j}\right)^s\ .$$

Or, par inégalité triangulaire et par définition de $\tilde{k}_j$,

$$\left|\tilde{k}_j(x)2^{-j} - x_0\right| + 2^{-j} \leq 2 \times 2^{-j} + |x - x_0| \leq 2 \times 2^{-n_0-1} + |x - x_0| < 3|x - x_0|$$

Il en résulte, si $n_1 > n_0$ $\boxed{\displaystyle\sum_{j=n_0+1}^{n_1} \sum_{k \in \mathcal{T}_j} |c_{j,k}(f)|\,|\theta_{j,k}(x)| \leq c_1 3^s (n_1 - n_0)\,|x - x_0|^s.}$

18b. Soit N dans $\mathbf{N}^*$. Par définition de n_1, $\omega_f(2^{-n_1})$ est strictement positif et donc, d'après la propriété $\mathcal{P}_2$, $(1+n_1)^N \leq \dfrac{c_2(N)}{\omega_f(2^{-n_1})}$. Par croissance de la fonction puissance $1/N$ et positivité de n_0 on en déduit $\boxed{n_1 - n_0 \leq n_1 + 1 \leq \left(\dfrac{c_2(N)}{\omega_f(2^{-n_1})}\right)^{1/N}.}$

Si $n_1 \leq n_0$ le membre de gauche de l'inégalité recherché est nul (par convention) et la majoration est donc immédiate. Sinon, en reportant cette majoration dans l'inégalité précédente (ce qui est licite puisque tous les termes sont positifs) et en utilisant $\omega_f(2^{-n_1}) \geq 2^{-n_0 s} \geq |x-x_0|^s$, il vient directement, par décroissance de la fonction puissance $-1/N$, $\boxed{\displaystyle\sum_{j=n_0+1}^{n_1} \sum_{k\in\mathcal{T}_j} |c_{j,k}(f)|\,|\theta_{j,k}(x)| \leq c_3(N)\,|x-x_0|^{(1-\frac{1}{N})s}.}$

19. Soit $n = \max(n_0, n_1)$ et N dans $\mathbf{N}^*$. On pose α_{14a}, α_{15}, α_{17} et α_{18b} les constantes apparaissant dans les majorations des questions en indice, i.e. respectivement $8\left(2^{1-s}-1\right)^{-1}(3/2)^s c_1$, $(1-2^{-s})^{-1}\,2^s c_1$, 2^{s+1} et $c_3(N)$. On a, par inégalité triangulaire et en utilisant successivement les questions correspondant aux constantes introduites :

$$\begin{aligned}
|f(x)-f(x_0)| &\leq |S_nf(x)-S_nf(x_0)| + 2\,\|f-S_nf\|_\infty \\
&\leq |S_{n_0}f(x)-S_{n_0}f(x_0)| + |S_nf(x)-S_{n_0}f(x)| + |S_nf(x_0)-S_{n_0}f(x_0)| \\
&\quad +2\alpha_{17}\,|x-x_0|^s \\
&\leq \alpha_{14b}\,|x-x_0|^s + \alpha_{18b}\,|x-x_0|^{(1-\frac{1}{N})s} + 2\alpha_{17}\,|x-x_0|^s \\
&\quad + \sum_{j=n_0+1}^{n} \sum_{k\in\mathcal{T}_j} |c_{j,k}(f)|\,|\theta_{j,k}(x_0)| \\
&\leq \alpha_{14b}\,|x-x_0|^s + \alpha_{18b}\,|x-x_0|^{(1-\frac{1}{N})s} + 2\alpha_{17}\,|x-x_0|^s \\
&\quad + \sum_{j=n_0+1}^{+\infty} \sum_{k\in\mathcal{T}_j} |c_{j,k}(f)|\,|\theta_{j,k}(x_0)| \\
&\leq \alpha_{14b}\,|x-x_0|^s + \alpha_{18b}\,|x-x_0|^{(1-\frac{1}{N})s} + 2\alpha_{17}\,|x-x_0|^s + \alpha_{15}\,|x-x_0|^s\ .
\end{aligned}$$

Par conséquent, $f \in \Gamma^{(1-\frac{1}{N})s}(x_0)$ et donc $\alpha_f(x_0) \geq \left(1-\dfrac{1}{N}\right)s$. Par passage à la limite en N, on en conclut $\boxed{\alpha_f(x_0) \geq s.}$