

# ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CONCOURS D'ADMISSION 2018

FILIÈRE MP

## COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES B

*Durée : 4 heures*

*L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve*

*Samedi 5 mai 2018, 9h00 – 13h00*

Pour des raisons qui apparaîtront dans la Troisième Partie, on utilise deux entiers naturels distincts  $n$  (minuscule) et  $N$  (majuscule). Les candidats sont priés de respecter les notations de l'énoncé.

On désigne par  $\mathbb{R}_n[X]$  l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels, de degré inférieur ou égal à  $n$ . Le sous-espace de  $\mathbb{R}_n[X]$  formé des polynômes pairs (c'est-à-dire vérifiant  $P(-X) = P(X)$ ) est noté  $\Pi_n$ , et celui des polynômes impairs (c'est-à-dire vérifiant  $P(-X) = -P(X)$ ) est noté  $J_n$ .

On définit l'ensemble  $A_N$  formé des  $P \in \mathbb{R}_N[X]$ , tels que  $P(-1) = P(1) = 1$ , qui satisfont de plus  $P(x) \geq 0$  pour tout  $x$  dans l'intervalle  $[-1, 1]$ . On définit sur  $\mathbb{R}_N[X]$  une forme linéaire  $L$  par

$$L(P) = \int_{-1}^1 P(x) dx.$$

L'objet du problème est l'étude de sa borne inférieure  $a_N$  sur le sous-ensemble  $A_N$  :

$$a_N = \inf\{L(P) \mid P \in A_N\}.$$

## Questions préliminaires

1. (a) Vérifier que  $A_N$  est une partie convexe de  $\mathbb{R}_N[X]$ .
- (b) Montrer que l'expression

$$\|P\|_1 = \int_{-1}^1 |P(x)| dx$$

définit une norme sur  $\mathbb{R}_N[X]$ .

- (c) Montrer que  $A_N$  est fermé dans l'espace vectoriel normé  $(\mathbb{R}_N[X], \|\cdot\|_1)$ .
2. (a) Montrer que la borne inférieure de  $L$  sur  $A_N$  est atteinte.

*Dans la suite, on notera  $B_N$  l'ensemble des  $P \in A_N$  tels que  $L(P) = a_N$ .*

- (b) Montrer que  $B_N$  est une partie convexe compacte.
- (c) Vérifier que  $B_N$  contient un polynôme pair.

## Première Partie

On munit  $\mathbb{R}_n[X]$  du produit scalaire défini par

$$\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^1 P(x)Q(x) dx,$$

et de la norme associée

$$\|P\|_2 = \sqrt{\langle P, P \rangle}$$

(on ne demande pas de vérifier qu'il s'agit bien d'un produit scalaire et d'une norme).

Pour  $j \in \mathbb{N}$ , on définit le polynôme

$$P_j(X) = \frac{1}{2^j j!} \frac{d^j}{dX^j} [(X^2 - 1)^j].$$

Par convention,  $P_0 = 1$ .

3. (a) Quel est le degré de  $P_j$  ?  
 (b) Montrer que  $P_j$  est un polynôme pair ou impair, selon la valeur de  $j$ .  
 (c) Montrer que  $P_j(1) = 1$  et  $P_j(-1) = (-1)^j$ .
4. Au moyen de l'intégration par parties, montrer que la famille  $(P_j)_{0 \leq j \leq n}$  est orthogonale dans  $\mathbb{R}_n[X]$ .
5. On note

$$g_j = \int_{-1}^1 P_j(x)^2 dx, \quad I_j = \int_{-1}^1 (1-x^2)^j dx.$$

- (a) Établir une relation entre  $g_j$  et  $I_j$ .  
 (b) Trouver une relation entre  $I_j$  et  $I_{j-1} - I_j$ , et en déduire une relation de récurrence pour la suite  $(I_j)_{j \in \mathbb{N}}$ .  
 (c) En déduire la valeur de  $I_j$ , puis celle de  $g_j$ .
6. (a) Montrer que la famille  $(P_j)_{0 \leq j \leq n}$  est une base de  $\mathbb{R}_n[X]$ .  
 (b) En déduire que la famille  $(P_{2j})_{0 \leq j \leq \frac{n}{2}}$  est une base de  $\Pi_n$ , tandis que la famille  $(P_{2j+1})_{0 \leq j \leq \frac{n-1}{2}}$  est une base de  $J_n$ .

## Deuxième Partie

On choisit un polynôme pair dans  $B_N$  (voir la question 2.c), et on le note  $R_N$ .

7. Montrer qu'il existe des nombres entiers  $r, s, t \geq 0$ , des nombres réels  $c_1, \dots, c_r$  différents de  $\pm 1$ , des réels non nuls  $\rho_1, \dots, \rho_s$  et des nombres complexes  $w_1, \dots, w_t$  qui ne sont ni réels ni imaginaires purs, tels que

$$R_N(X) = \prod_{j=1}^r \frac{X^2 - c_j^2}{1 - c_j^2} \prod_{k=1}^s \frac{X^2 + \rho_k^2}{1 + \rho_k^2} \prod_{\ell=1}^t \frac{X^2 - w_\ell^2}{1 - w_\ell^2} \cdot \frac{X^2 - \overline{w}_\ell^2}{1 - \overline{w}_\ell^2}.$$

8. On décide de remplacer tous les  $\rho_k$  par des zéros. On remplace donc les facteurs correspondants de  $R_N$ ,

$$\frac{X^2 + \rho_k^2}{1 + \rho_k^2},$$

par des facteurs  $X^2$ . On obtient ainsi un nouveau polynôme  $S_N$  de même degré que  $R_N$ .

Montrer que  $0 \leq S_N(x) \leq R_N(x)$  pour tout  $x \in [-1, 1]$ , puis que  $S_N \in B_N$ .

9. De même, dans la liste des  $c_j$ , on décide de remplacer ceux qui n'appartiennent pas à  $[-1, 1]$  par des zéros. On remplace donc les facteurs correspondants de  $S_N$ ,

$$\frac{X^2 - c_j^2}{1 - c_j^2},$$

par des facteurs  $X^2$ . On obtient ainsi un nouveau polynôme  $T_N$ .

Montrer que  $0 \leq T_N(x) \leq S_N(x)$  pour tout  $x \in [-1, 1]$ , puis que  $T_N \in B_N$ .

10. Soit  $w \in \mathbb{C}$  un nombre qui n'est ni réel ni imaginaire pur.

(a) Montrer que l'équation

$$\left| \frac{z-1}{z+1} \right| = \left| \frac{w-1}{w+1} \right|$$

définit un cercle dans le plan complexe, qui passe par  $w$ . Vérifier que l'intervalle  $] -1, 1[$  coupe ce cercle en un point unique ; on notera  $y$  ce point. On exprimera  $y$  en fonction du nombre

$$\lambda = \left| \frac{w-1}{w+1} \right|.$$

(b) Montrer l'inégalité

$$\left| \frac{1-w}{1-y} \right| > 1.$$

(c) Montrer que l'équation

$$\left| \frac{z-w}{z-y} \right| = \left| \frac{1-w}{1-y} \right|$$

définit un cercle dans le plan complexe, qui passe par 1 et par  $-1$ .

En déduire que, pour tout  $x \in [-1, 1] \setminus \{y\}$ , on a

$$\left| \frac{w-x}{y-x} \right| \geq \left| \frac{w-1}{y-1} \right| = \left| \frac{w+1}{y+1} \right|.$$

11. Conclure que  $R_N$  a toutes ses racines dans l'intervalle  $[-1, 1]$ .

## Troisième Partie

On note  $n$  la partie entière de  $\frac{N}{2}$ . On poursuit l'étude du polynôme  $R_N$ .

12. Montrer que  $\deg R_N = 2n$ .

13. Montrer que  $R_N$  est le carré d'un polynôme :  $R_N(X) = U_N(X)^2$  où  $U_N(1) = 1$  et  $U_N(-1) = \pm 1$ . Que peut-on dire de la parité de  $U_N$  ?

14. On suppose dans cette question que  $U_N$  est pair ; on a donc  $U_N \in \Pi_n$ . Dans  $\Pi_n$ , l'équation  $P(1) = 1$  définit un sous-espace affine noté  $H_n$ .

(a) Montrer que

$$\|U_N\|_2 = \min\{\|P\|_2 \mid P \in H_n\}.$$

(b) En déduire qu'il existe un nombre réel  $\mu$  tel que pour tout entier  $0 \leq j \leq \frac{n}{2}$ , on a  $\langle U_N, P_{2j} \rangle = \mu$ .  
(On pourra considérer des polynômes  $P \in H_n$  de la forme  $U_N + t(P_{2j} - P_{2k})$  avec  $t \in \mathbb{R}$ .)

(c) Exprimer  $U_N$  dans la base des  $P_{2j}$ . En déduire que

$$\frac{1}{\mu} = \sum_{0 \leq j \leq \frac{n}{2}} \frac{1}{g_{2j}}.$$

(d) Établir dans ce cas la formule

$$a_N = \left( \sum_{0 \leq j \leq \frac{n}{2}} \frac{1}{g_{2j}} \right)^{-1}.$$

15. On suppose maintenant que  $U_N$  est impair. Exprimer encore  $a_N$  en fonction des  $g_\ell$ .

16. Discuter, en fonction de la parité de  $n$ , la valeur de  $a_N$ . On en donnera la valeur explicite.

17. Donner la formule explicite de  $R_N$ , en fonction des polynômes  $P_j$ .