Première composition de mathématiques
X P' 1981

On note dans ce problème $\mathcal{S}$ l'ensemble des séries à termes réels, $\mathcal{S} = \left\{\sum a_n \;\middle|\; (a_n) \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}\right\}$.
Si a appartient à $\mathcal{S}$, avec $a = \sum a_n$, on lui associe, pour k dans $\mathbf{N}$, les sommes partielles

$$s_n^0(a) = \sum_{p=0}^{n} a_p\,, \quad s_n^{k+1}(a) = \frac{1}{n+1}\sum_{p=0}^{n} s_p^k(a)\,,$$

ainsi que les sommes

$$t_n^0(a) = s_n^0(a)\,, \quad t_n^{k+1}(a) = \frac{1}{\dbinom{n+k+1}{n}}\sum_{p=0}^{n}\binom{k+p}{p} t_p^k(a)\,.$$

Dans tout le problème a désignera un élément de $\mathcal{S}$. On note $\overline{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \cup \{\pm\infty\}$.
La partie I sert à démontrer des résultats utiles pour la suite du problème et on pourra admettre ces résultats à condition de le préciser clairement sur la copie.

PARTIE I

Soit $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de réels convergeant vers ℓ dans $\mathbf{R}$.

I.1.

a. Montrer que la suite $(y_n)_{n\in\mathbf{N}}$ donnée par $y_n = \dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} x_k$ converge vers ℓ.

b. Démontrer que le résultat énoncé ci-dessus reste valable même si $\ell \in \overline{\mathbf{R}}$.

I.2. On revient au cas où $\ell \in \mathbf{R}$.

a. Soit $(\lambda_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite à termes strictement positifs telle que la série $\sum \lambda_n$ diverge. Montrer que la suite de terme général

$$\frac{\displaystyle\sum_{p=0}^{n} \lambda_p x_p}{\displaystyle\sum_{p=0}^{n} \lambda_p}$$

converge vers ℓ.

b. On se donne des suites $(\lambda_{n,p})_{n\in\mathbf{N}}$, pour tout entier naturel p, et une suite $(\lambda_p)_{p\in\mathbf{N}}$ vérifiant les conditions :

i. Pour tous n et p entiers naturels, $\lambda_{n,p} > 0$ et $\lambda_p > 0$,

ii. Pour tout entier naturel p, $\lim \lambda_{n,p} = \lambda_p$,

iii. $\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} \lambda_p = +\infty$.

Montrer alors que la suite de terme général $\dfrac{\displaystyle\sum_{p=0}^{n} \lambda_{n,p} x_p}{\displaystyle\sum_{p=0}^{n} \lambda_{n,p}}$ converge vers ℓ.

Ce dernier résultat reste valable si $\ell \in \overline{\mathbf{R}}$ mais on ne demande pas de le démontrer.

PARTIE II

Si la suite $(s_n^k(a))_{n\in\mathbf{N}}$ converge dans $\mathbf{R}$, on dit que sa limite est la <u>somme d'indice k</u> de la série a et on appelle $\mathcal{S}_k$ le sous-ensemble de $\mathcal{S}$ pour laquelle cette condition est réalisée.

II.1. On suppose que la série a est convergente.

a. Montrer qu'elle a une somme d'indice 1 égale à sa somme.

b. Montrer la relation

$$s_n^1(a) - \sum_{p=0}^{+\infty} a_p = -\left(\sum_{p=n+1}^{+\infty} a_p + \frac{1}{n+1}\sum_{p=0}^{n} pa_p\right).$$

En déduire que $\displaystyle\frac{1}{n+1}\sum_{p=0}^{n} pa_p$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini.

II.2.

a. Montrer que, pour toute suite $(\sigma_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de nombres réels et tout k dans $\mathbf{N}$, il existe une série a dans $\mathcal{S}$, qu'on ne cherchera pas à déterminer explicitement, telle qu'on ait, pour tout n dans $\mathbf{N}$, $s_n^k(a) = \sigma_n$.

b. Comparer les ensembles $\mathcal{S}_k$ du point de vue de l'inclusion. Les inclusions obtenues sont-elles strictes ? Pour une série a dans $\mathcal{S}$ donnée, comparer entre elles les sommes d'indice k qui existent éventuellement.

II.3. Montrer que si la série a diverge et est à termes positifs, alors a n'appartient à aucun ensemble $\mathcal{S}_k$.

PARTIE III

Si la suite $(t_n^k(a))_{n\in\mathbf{N}}$ converge dans $\mathbf{R}$, on dit que sa limite est la <u>somme d'ordre k</u> de la série a et on appelle $\mathcal{T}_k$ la partie de $\mathcal{S}$ pour laquelle cette hypothèse est réalisée.

III.1. Comparer $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{T}_1$ ainsi que, lorsqu'elles existent, les sommes d'indice 1 et d'ordre 1 d'une même série a de $\mathcal{S}$.

III.2. Comparer les ensembles $\mathcal{T}_k$ du point de vue de l'inclusion sans se préoccuper du caractère strict ou large des inclusions obtenues. On pourra démontrer et utiliser la formule

$$\sum_{p=0}^{n}\binom{k+p}{p} = \binom{k+1+n}{n}.$$

Pour une série a dans $\mathcal{S}$ donnée, comparer entre elles les sommes d'ordre k qui existent éventuellement.

III.3. Soit $(c_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de réels. Pour x réel, on considère la série $c(x)$ donnée par $c(x) = \sum c_n x^n$. On suppose que la série $c(x)$ converge pour tout x de l'intervalle $]-1;+1[$. On pose pour tout n dans $\mathbf{N}$, $\displaystyle d_n = \sum_{p=0}^{n} c_p$.

a. Démontrer que, pour tout x_0 dans $]-1;+1[$, la suite $|c_n x_0^n|$ est bornée. En déduire que la série $c(x)$ est absolument convergente pour x dans $]-1;+1[$.

b. Montrer que, pour tout x_0 dans $]-1;+1[$, la suite $(d_n x_0^n)_{n\in\mathbf{N}}$ est bornée. En déduire que, pour tout x dans $]-1;+1[$, la suite $(d_n x^n)_{n\in\mathbf{N}}$ tend vers 0.

c. Pour x dans $]-1;+1[$, comparer les sommes $\displaystyle\sum_{p=0}^{n} c_p x^p$ et $\displaystyle\sum_{p=0}^{n-1} d_p(x^p - x^{p+1})$. En déduire l'égalité :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n = (1-x)\sum_{n=0}^{+\infty} d_n x^n.$$

d. En désignant par c la série numérique de terme général c_n, établir que, pour tout x dans $]-1;+1[$ et tout k dans $\mathbf{N}$, on a l'égalité :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n = (1-x)^{k+1} \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{k+n}{n} t_n^k(c) x^n \ .$$

PARTIE IV

IV.1. En conservant les mêmes notations, on pose $T_n^k(a) = \binom{k+n}{n} t_n^k(a)$.

a. À l'aide de la relation donnant $T_n^{k+1}(a)$ en fonction des $T_p^k(a)$ pour p dans $[\![0;n]\!]$, démontrer par récurrence l'égalité :

$$\binom{k+n}{n} t_n^k(a) = \sum_{p=0}^{n} \binom{k+n-p}{n-p} a_p \ .$$

b. En déduire l'égalité, pour $k \geq 1$:

$$T_n^k(a) = \sum_{p=0}^{n} \binom{k+n-p-1}{n-p} s_p^0(a)$$

puis, pour $k \geq 2$, exprimer de même $T_n^k(a)$ en fonction des $s_p^1(a)$ pour p dans $[\![0;n]\!]$.

IV.2. À la série a dans $\mathcal{S}$ on associe la série $F(a)$ dans $\mathcal{S}$ de terme général b_n donné par $b_0 = s_0^1(a) = a_0$ et, pour $n \geq 1$, $b_n = s_n^1(a) - s_{n-1}^1(a)$.

a. Établir pour tous entiers $k \geq 1$ et $n \geq 0$ l'égalité :

$$T_n^k(a) = (n+k) T_n^{k-1}(F(a)) - (k-1) T_n^k(F(a))$$

et en déduire l'égalité :

$$t_n^k(a) = k t_n^{k-1}(F(a)) - (k-1) t_n^k(F(a)) \ .$$

b. Établir l'égalité :

$$t_n^k(a) = (n+1) t_n^k(F(a)) - n t_{n-1}^k(F(a))$$

puis exprimer $t_n^k(F(a))$ par une combinaison linéaire, à coefficients indépendants de a, des $t_p^k(a)$ pour p dans $[\![0;n]\!]$.

IV.3.

a. Soit $k \geq 1$. Si $F(a) \in \mathcal{T}_{k-1}$, montrer $a \in \mathcal{T}_k$ et comparer dans ce cas les sommes d'ordre $k-1$ de $F(a)$ et d'ordre k de a. Étudier la réciproque.

b. Comparer, pour tout k dans $\mathbf{N}$, les ensembles $\mathcal{S}_k$ et $\mathcal{T}_k$ et, lorsqu'elles existent, les sommes d'indice k et d'ordre k d'une même série a dans $\mathcal{S}$.

Première composition de mathématiques – X P' 1981

PARTIE I

I.1. a. Par hypothèse on a $x_n - \ell = o(1)$ et donc, par sommation des relations de comparaison et puisque la série $\sum 1$ diverge et est à termes positifs, les sommes partielles des séries $\sum (x_n - \ell)$ et $\sum 1$ satisfont à la même relation de domination, i.e. $(n+1)(y_n - \ell) = o(n+1)$ ou encore $y_n - \ell = o(1)$. Autrement dit $\boxed{\text{la suite } (y_n)_{n\in\mathbf{N}} \text{ converge vers } \ell.}$

b. Par hypothèse on a $1 = o(x_n)$ et donc, par sommation des relations de comparaison et puisque la série $\sum 1$ diverge et est à termes positifs, les sommes partielles des séries $\sum x_n$ et $\sum 1$ satisfont à la même relation de domination, i.e. $n+1 = o((n+1)(y_n)$ ou encore $1 = o(y_n)$. Autrement dit $\lim |y_n| = +\infty$.

Puisque $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ diverge vers ℓ, elle est de signe constant à partir d'un certain rang. On dispose donc de ε dans $\{-1, +1\}$ et de n_0 dans $\mathbf{N}$ tel que, pour n entier vérifiant $n \geq n_0$, $\varepsilon x_n \geq 0$. Soit alors $M = |y_{n_0}|$. Toujours par divergence de $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$, on dispose de n_1 entier supérieur à n_0 tel que $\varepsilon x_{n_1} \geq (n_0+1)M$ et alors, pour n entier supérieur à n_1, on a

$$\varepsilon y_n = \frac{1}{n+1}(\varepsilon x_{n_1} + \varepsilon(n_0+1)y_{n_0}) + \frac{1}{n+1}\sum_{k=n_0+1}^{n_1-1} \varepsilon x_k + \frac{1}{n+1}\sum_{k=n_1+1}^{n} \varepsilon x_k$$

et donc $\varepsilon y_n \geq 0$. Il en résulte $\lim \varepsilon y_n = +\infty$ ou encore $\lim y_n = \lim x_n$, i.e.

$\boxed{\text{le résultat reste valable même si } \ell \in \overline{\mathbf{R}}.}$

I.2. a. Par hypothèse on a $x_n - \ell = o(1)$ et donc $\lambda_n(x_n - \ell) = o(\lambda_n)$, par sommation des relations de comparaison et puisque la série $\sum \lambda_n$ diverge et est à termes positifs, les sommes partielles des séries $\sum \lambda_n(x_n - \ell)$ et $\sum \lambda_n$ satisfont à la même relation de domination, i.e. $\displaystyle\sum_{p=0}^{n} \lambda_p x_p - \ell \sum_{p=0}^{n} \lambda_p = o\left(\sum_{p=0}^{n} \lambda_p\right)$ ou encore, puisque la suite $\displaystyle\left(\sum_{p=0}^{n} \lambda_p\right)_{n\in\mathbf{N}}$ est à termes strictement positifs, $\dfrac{\sum_{p=0}^{n} \lambda_p x_p}{\sum_{p=0}^{n} \lambda_p} - \ell = o(1)$. Autrement dit

$$\boxed{\text{la suite } \left(\frac{\sum_{p=0}^{n} \lambda_p x_p}{\sum_{p=0}^{n} \lambda_p}\right)_{n\in\mathbf{N}} \text{ converge vers } \ell.}$$

b. Soit ε dans $\mathbf{R}_+^*$. Puisque $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est convergente, elle est bornée et on dispose de n_0 dans $\mathbf{N}$ et de R dans $\mathbf{R}_+$ tels que $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est à valeurs dans la boule fermée $B(\ell, R)$ et, pour n entier supérieur à n_0, à valeurs dans $B(\ell, \varepsilon)$.

Pour n entier naturel, on pose $\Lambda_n = \displaystyle\sum_{p=0}^{n} \lambda_{n,p}$, de sorte que Λ_n est strictement positif, et $y_n = \dfrac{\sum_{p=0}^{n} \lambda_{n,p} x_p}{\Lambda_n}$. Si $n \geq n_0$, y_n est barycentre à coefficients strictement positifs de n_0 points de $B(\ell, R)$ et de $n - n_0 + 1$ points de $B(\ell, \varepsilon)$ et donc, par convexité des boules ouvertes, y_n est barycentre d'un point de $B(\ell, R)$ affecté du poids Λ_{n_0} et d'un point de $B(\ell, \varepsilon)$ affecté du poids $\Lambda_n - \Lambda_{n_0}$. En notant $\beta_n = \dfrac{\Lambda_{n_0}}{\Lambda_n}$, il vient alors $0 < \beta_n < 1$ et, par inégalité triangulaire,

$$|y_n - \ell| \leq (1 - \beta_n)\varepsilon + \beta_n R \leq \varepsilon + \beta_n R\ .$$

Soit M dans $\mathbf{R}_+$. On dispose d'un entier naturel N tel que $\displaystyle\sum_{p=0}^{N} \lambda_p > M$ et donc aussi d'un entier naturel n_1 tel que, pour $n \geq n_1$, on a $\displaystyle\sum_{p=0}^{N} \lambda_{n,p} > M$ par linéarité de la limite. Il vient alors, pour $n \geq \max(n_1, N)$, $\Lambda_n > M$ par positivité des scalaires $\lambda_{n,p}$ et il en résulte $\lim \Lambda_n = +\infty$ puis $\lim \beta_n = 0$ puisque le numérateur de β_n est borné car donné par une suite convergente.
Par conséquent on dispose d'un entier naturel n_2 tel que, pour $n \geq n_2$, $|y_n - \ell| \leq 2\varepsilon$ et donc $\lim y_n = \ell$, i.e. $\boxed{\text{la suite de terme général } \dfrac{\displaystyle\sum_{p=0}^{n} \lambda_{n,p} x_p}{\displaystyle\sum_{p=0}^{n} \lambda_{n,p}} \text{ converge vers } \ell.}$

PARTIE II

II.1. a. La suite donnée par $x_n = s_n^0(a)$ est convergente par hypothèse et donc, d'après I.1.a, la suite $s^1(a)$ est convergente de même somme, i.e.
$\boxed{\text{la série } a \text{ a une somme d'indice 1 égale à sa somme.}}$

b. Soit n un entier naturel. Par définition, on a

$$s_n^1(a) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \sum_{p=0}^{k} a_p = \frac{1}{n+1} \sum_{p=0}^{n} \sum_{k=p}^{n} a_p = \sum_{p=0}^{n} \frac{n+1-p}{n+1} a_p$$

et il vient $s_n^1(a) - s_n^0(a) = -\displaystyle\sum_{p=0}^{n} \frac{p}{n+1} a_p$, d'où, en retranchant $\displaystyle\sum_{p=n+1}^{+\infty} a_p$,

$$\boxed{s_n^1(a) - \sum_{p=0}^{+\infty} a_p = -\left(\sum_{p=n+1}^{+\infty} a_p + \frac{1}{n+1} \sum_{p=0}^{n} p a_p \right).}$$

D'après la question précédente, le membre de gauche tend vers 0 quand n tend vers l'infini et, par convergence de la série a, le premier terme du membre de droite aussi. Donc

$$\boxed{\frac{1}{n+1} \sum_{p=0}^{n} p a_p \text{ tend vers 0 quand } n \text{ tend vers l'infini.}}$$

II.2. a. Soit φ et ψ les applications définies sur $\mathcal{S}$ et $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ respectivement, et à valeurs dans $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$, par

$$\varphi(a) = \left(\sum_{p=0}^{n} a_p \right)_{n \in \mathbf{N}} \quad \text{et} \quad \psi(a) = \left(\frac{1}{n+1} \sum_{p=0}^{n} a_p \right)_{n \in \mathbf{N}}$$

alors φ et ψ sont bijectives d'inverses donnés par

$$\varphi^{-1}(a) = (a_0, a_1 - a_0, a_2 - a_1, \dots) \quad \text{et} \quad \psi^{-1}(a) = (a_0, 2a_1 - a_0, 3a_2 - 2a_1, \dots),$$

i.e. pour $n \in \mathbf{N}^*$, $\varphi^{-1}(a)_n = a_n - a_{n-1}$ et $\psi^{-1}(a) = (n+1)a_n - n a_{n-1}$. De plus, pour a dans $\mathcal{S}$, on a $s^0(a) = \varphi(a)$ et, pour $k \geq 1$, $s^k(a) = \psi^{k-1} \circ \varphi(a)$.
Pour toute suite $(\sigma_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de nombres réels et tout k dans $\mathbf{N}$, par bijectivité, et donc surjectivité des applications φ et ψ, il existe une série a dans $\mathcal{S}$ telle qu'on ait, pour tout n dans $\mathbf{N}$, $\boxed{s_n^k(a) = \sigma_n.}$

b. En reprenant les notations précédentes pour φ et ψ, φ réalise une bijection entre l'ensemble $\mathcal{S}_0$ des séries convergentes et l'ensemble des suites convergentes.
Soit k un entier naturel et a dans $\mathcal{S}$, on a $a \in \mathcal{S}_k$ si et seulement si $\psi^k \circ \varphi(a)$ est une suite convergente, i.e. si et seulement si $\psi^k \circ \varphi(a) \in \varphi(\mathcal{S}_0)$. Autrement dit on a $\mathcal{S}_k = \varphi^{-1} \circ \psi^{-k} \circ \varphi(\mathcal{S}_0)$ ou encore, en notant $\chi = \varphi^{-1} \circ \psi \circ \varphi$, $\mathcal{S}_k = \chi^{-k}(\mathcal{S}_0)$.
La question I.1.a montre qu'on a $\psi \circ \varphi(\mathcal{S}_0) \subset \varphi(\mathcal{S}_0)$, i.e. $\chi(\mathcal{S}_0) \subset \mathcal{S}_0$, et, pour a dans $\mathcal{S}_0$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \psi \circ \varphi(a)_n$. On a donc en particulier $\mathcal{S}_0 \subset \mathcal{S}_1$ et donc aussi, en appliquant χ^{-k}, $\mathcal{S}_k \subset \mathcal{S}_{k+1}$ et les sommes d'indices k et $k+1$ coïncident lorsque la première des deux existe.
De plus, en notant a la série $\sum(-1)^n$, on a $a \notin \mathcal{S}_0$ mais $a \in \mathcal{S}_1$ et donc $\mathcal{S}_0 \subsetneq \mathcal{S}_1$, puis par bijectivité de χ, $\mathcal{S}_k \subsetneq \mathcal{S}_{k+1}$. Par conséquent

$\boxed{\text{les ensembles } \mathcal{S}_k \text{ forment une suite strictement croissante au sens de l'inclusion et, pour une série } a \text{ dans } \mathcal{S} \text{ donnée, toutes les sommes d'indice } k \text{ de la série } a \text{ qui existent sont égales.}}$

II.3. Soit a une série divergente et à termes positifs, alors d'après I.1.b, il en est de même pour $s^1(a)$, i.e. en reprenant les notations précédentes pour χ, de $\chi(a)$. Par conséquent il en est de même pour $\chi^k(a)$ pour tout entier naturel k et donc, en particulier, $\chi^k(a) \notin \mathcal{S}_0$ ou encore $\boxed{a \text{ n'appartient à aucun ensemble } \mathcal{S}_k.}$

PARTIE III

III.1. Pour a dans $\mathcal{S}$, on a $s^1(a) = t^1(a)$ et donc

$\boxed{\mathcal{S}_1 \text{ et } \mathcal{T}_1 \text{ et les sommes d'indice 1 et d'ordre 1 existent simultanément et sont alors égales.}}$

III.2. Soit E l'ensemble $[\![0; n+k]\!]$ et F l'ensemble des parties à n éléments de E. Son cardinal est donc $\binom{n+k+1}{n}$. Soit X dans F, on lui associe le couple (x, Y) donné par $x = \max(E \backslash X)$ et $Y = X \cap [\![0; x-1]\!]$. Puisqu'on a alors $X = Y \cup [\![x+1; n+k]\!]$, cette application est injective. De plus X étant de cardinal n, son complémentaire est de cardinal $k+1$ et donc $x \geq k$, et si $x = k+p$ avec $0 \leq p \leq n$, X contient l'ensemble à $n-p$ éléments $[\![k+p+1; n+k]\!]$ et donc Y est de cardinal p.
Il en résulte que F est en bijection avec l'ensemble des couples de la forme (x, Y) où x est un élément de $[\![k; n+k]\!]$ et Y est une partie à p éléments de $[\![0; x-1]\!]$. Comme ce dernier ensemble est de cardinal $\displaystyle\sum_{p=0}^{n} \binom{k+p}{p}$, on en déduit $\boxed{\displaystyle\sum_{p=0}^{n} \binom{k+p}{p} = \binom{k+1+n}{n}}$.
On pose, pour tout entier naturel p, $\lambda_p = \binom{k+p}{p}$ ou encore $\lambda_p = \binom{k+p}{k}$. Alors $\sum \lambda_p$ est une série à termes positifs dont le terme général est équivalent à $\dfrac{1}{k!}p^k$, donc $\sum \lambda_p$ est divergente et il résulte de I.2.a que si $t^k(a)$ converge, alors il en va de même pour $t^{k+1}(a)$ et leurs limites sont égales. Par conséquent

$\boxed{\text{les ensembles } \mathcal{T}_k \text{ forment une suite strictement croissante au sens de l'inclusion et, pour une série } a \text{ dans } \mathcal{S} \text{ donnée, toutes les sommes d'ordre } k \text{ de la série } a \text{ qui existent sont égales.}}$

III.3. a. Soit x_0 dans $]-1; +1[$. Puisque $c(x_0)$ converge, la suite $(c_n x_0^n)$ tend vers 0 et, en particulier, $\boxed{\text{elle est bornée.}}$
Soit x dans $]-1; +1[$ et $x_0 = \dfrac{1+|x|}{2}$ de sorte qu'on a $|x| < x_0 < 1$. D'après ce qui précède la suite $(c_n x_0^n)$ est bornée et donc $c_n x^n = O\left(\left|\dfrac{x}{x_0}\right|^n\right)$. Par comparaison avec une série géométrique de raison (positive) strictement inférieure à 1,

$\boxed{\text{la série } c(x) \text{ est absolument convergente.}}$

b. Soit x_0 dans $]-1;+1[$. Par décroissance de $n \mapsto |x_0|^n$, on a $d_n x_0^n = O(s_n^0(c(x_0)))$. D'après ce qui précède la série $c(x_0)$ est absolument convergente, donc $s_n^0(c(x_0)) = O(1)$ et il en résulte que $\boxed{\text{la suite } (d_n x_0^n)_{n\in\mathbf{N}} \text{ est bornée.}}$

Soit x dans $]-1;+1[$ et $x_0 = \dfrac{1+|x|}{2}$. Comme précédemment, on a $d_n x^n = O\left(\left|\dfrac{x}{x_0}\right|^n\right)$ et donc $\boxed{\text{la suite } (d_n x^n)_{n\in\mathbf{N}} \text{ tend vers } 0.}$

c. Soit x dans $]-1;+1[$. Par transformation d'Abel, on a

$$\sum_{p=0}^{n-1} d_p(x^p - x^{p+1}) = d_0 - d_{n-1}x^n + \sum_{p=1}^{n-1} x^p(d_p - d_{p-1}) = \sum_{p=0}^{n-1} c_p x^p - d_{n-1}x^n\,,$$

i.e. $\boxed{\displaystyle\sum_{p=0}^{n} c_p x^p - \sum_{p=0}^{n-1} d_p(x^p - x^{p+1}) = d_n x^n.}$

En particulier puisque, d'après ce qui précède, le second membre tend vers 0 quand n tend vers l'infini et que la série $c(x)$ converge, la série $\sum(1-x)d_n x^n$ converge également et sa somme est égale à celle de $c(x)$. Comme $1-x$ est non nul, il en résulte que $\sum d_n x^n$ converge et qu'on a $\boxed{\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n = (1-x)\sum_{n=0}^{+\infty} d_n x^n.}$

d. Le résultat précédent s'écrit également

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n = (1-x)\sum_{n=0}^{+\infty} t_n^0(c)x^n = \sum \binom{0+n}{n} t_n^0(c)x^n\ .$$

Si la série $\sum\binom{k+n}{n}t_n^k(c)x^n$ converge pour tout x dans $]-1;+1[$, alors il en va de même pour la série de terme général $\displaystyle\sum_{p=0}^{n}\binom{k+p}{p}t_p^k(c)x^n$, i.e. $\dbinom{k+n+1}{n}t_n^{k+1}(c)x^n$, grâce à la question précédente, et sa somme vérifie

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{k+n}{n}t_n^k(c)x^n = (1-x)\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{k+n+1}{n}t_n^{k+1}(c)x^n$$

et on conclut donc par récurrence sur l'entier naturel k que, pour tout x dans $]-1;+1[$ et tout k dans $\mathbf{N}$, la série $\sum\binom{k+n}{n}t_n^k(c)x^n$ converge et on a l'égalité :

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n = (1-x)^{k+1}\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{k+n}{n}t_n^k(c)x^n.}$$

PARTIE IV

IV.1. a. Soit a dans $\mathcal{S}$ et, pour k dans $\mathbf{N}$, soit $(\mathbf{H}_k)$ le prédicat : pour tout entier naturel n, on a $T_n^k(a) = \displaystyle\sum_{p=0}^{n}\binom{k+n-p}{n-p}a_p$.

Pour $k=0$, on a $T^0(a) = t^0(a) = s^0(a)$, de sorte que $(\mathbf{H}_0)$ est vrai.

Soit maintenant k dans $\mathbf{N}$ tel que $(\mathbf{H}_k)$ soit vrai. On a alors, pour n dans $\mathbf{N}$,

$$\begin{aligned} T_n^{k+1}(a) &= \sum_{q=0}^{n} T_q^k(a) \\ &= \sum_{q=0}^{n}\sum_{p=0}^{q} \binom{k+q-p}{q-p} a_p \\ &= \sum_{p=0}^{n}\left(\sum_{q=p}^{n}\binom{k+q-p}{q-p}\right) a_p \\ &= \sum_{p=0}^{n}\left(\sum_{r=0}^{n-p}\binom{k+r}{r}\right) a_p \\ &= \sum_{p=0}^{n}\binom{k+n-p+1}{n-p+1} a_p\,, \end{aligned}$$

d'après III.2, et donc $(\mathbf{H}_{k+1})$ est vrai. D'après le principe de récurrence, on en déduit l'égalité pour tous k et n entiers naturels $\boxed{\binom{k+n}{n} t_n^k(a) = \sum_{p=0}^{n}\binom{k+n-p}{n-p} a_p.}$

<u>Remarque</u> : le sujet ne s'appuie pas sur la partie III, mais on pourrait le faire. On se donne un entier naturel n et on considère la série c donnée par $c_p = a_p$ si $p \leq n$ et $c_p = 0$. Alors les hypothèses de III.3 sont vérifiées puisque la série $c(x)$ est en fait une fonction polynomiale. De plus une récurrence immédiate montre que, pour $p \leq n$ et k dans $\mathbf{N}$, on a $t_p^k(a) = t_p^k(c)$. On en déduit, pour x dans $]-1;+1[$,

$$\sum_{p=0}^{n} a_p x^p = (1-x)^{k+1}\sum_{p=0}^{+\infty} T_p^k(c) x^p$$

et donc d'après la formule de Taylor,

$$T_n^k(a) = T_n^k(c) = \frac{1}{n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left((1-x)^{-(k+1)}\sum_{p=0}^{n} a_p x^p\right)_{|x=0}$$

ou encore, d'après la formule de Leibniz,

$$T_n^k(a) = \frac{1}{n!}\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p} p!\, a_p \frac{(k+n-p)!}{k!} = \sum_{p=0}^{n}\binom{k+n-p}{n-p} a_p\ .$$

b. On reprend la notation de II.2 : φ désigne l'application de $\mathcal{S}$ dans $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ donnée par

$$\varphi(a) = \left(\sum_{p=0}^{n} a_p\right)_{n\in\mathbf{N}}$$

et on note σ l'application de $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ dans $\mathcal{S}$ donnée par

$$\sigma((a_n)_{n\in\mathbf{N}}) = \sum a_n\ .$$

En particulier $s^0 = t^0 = T^0 = \varphi$ et, pour k dans $\mathbf{N}$, on a $T^{k+1} = \varphi \circ \sigma \circ T^k$, et donc $T^{k+1} = (\varphi \circ \sigma)^{k+1} \circ \varphi = T^k \circ (\sigma \circ \varphi)$. Comme $\sigma \circ \varphi(a) = \sum s_n^0(a)$, la formule précédente donne, pour $k \geq 1$ et n dans $\mathbf{N}$, $T_n^k(a) = T_n^{k-1}(\sum s_n^0(a))$, soit $\boxed{T_n^k(a) = \sum_{p=0}^{n} \binom{k+n-p-1}{n-p} s_p^0(a).}$

Pour $k \geq 2$, on a $T^k = T^{k-2} \circ (\sigma \circ \varphi)^2 = T^{k-2} \circ \sigma \circ T^1$, i.e. pour n dans $\mathbf{N}$, $T_n^k(a) = T_n^{k-2}(\sum T_n^1(a))$ et donc, puisque $T_n^1(a) = (n+1)t_n^1(a)$ et $t^1 = s^1$,

$$\boxed{T_n^k(a) = \sum_{p=0}^{n} \binom{k+n-p-2}{n-p} (p+1) s_p^1(a).}$$

IV.2. a. On a par définition $T^0 \circ F = s^1$ et donc, pour n dans $\mathbf{N}$, on a $(n+1)T_n^0(F(a)) = (n+1)s_n^1(a) = (n+1)t_n^1(a) = T_n^1(a)$, ce qui s'écrit aussi

$$T_n^1(a) = (n+1)T_n^0(F(a)) - 0 \cdot T_n^1(F(a)) \, .$$

Par ailleurs pour $k \geq 2$, on a, d'après les formules de la question précédente et puisque $s^0 \circ F = s^1$,

$$\begin{aligned}
T_n^k(a) &= \sum_{p=0}^{n} \binom{k+n-p-2}{n-p} (p+1) s_p^1(a) \\
(n+k)T_n^{k-1}(F(a)) &= \sum_{p=0}^{n} \binom{k+n-p-2}{n-p} (n+k) s_p^1(a) \\
(k-1)T_n^k(F(a)) &= \sum_{p=0}^{n} \binom{k+n-p-1}{n-p} (k-1) s_p^1(a)
\end{aligned}$$

et on a également, pour $p \leq n$,

$$(n+k-p-1)\binom{k+n-p-2}{n-p} = \frac{(n-p+k-1)!}{(n-p)!(k-2)!} = (k-1)\binom{n-p+k-1}{n-p} \, .$$

Il en résulte, pour tous entiers $k \geq 1$ et $n \geq 0$, l'égalité :

$$\boxed{T_n^k(a) = (n+k)T_n^{k-1}\left(F(a)\right) - (k-1)T_n^k\left(F(a)\right)}$$

et aussi, puisque $\binom{k+n}{n} = \frac{n+k}{k}\binom{n+k-1}{n}$,

$$\boxed{t_n^k(a) = k t_n^{k-1}\left(F(a)\right) - (k-1)t_n^k\left(F(a)\right).}$$

b. Si $k = 0$, l'identité cherchée s'écrit $s_n^0(a) = (n+1)s_n^1(a) - n s_{n-1}^1(a)$, ce qui est vrai pour tout n dans $\mathbf{N}^*$ par définition de s^1.

Soit k et n des entiers supérieurs à 1. Par construction, on a $T_n^k - T_{n-1}^k = T_n^{k-1}$ et donc

$$(n+k)T_n^{k-1} - (k-1)T_n^k = (n+1)T_n^k - (n+k)T_{n-1}^k \, ,$$

d'où, en utilisant la relation de la question précédente,

$$T_n^k(a) = (n+1)T_n^k\left(F(a)\right) - (n+k)T_{n-1}^k\left(F(a)\right) \, .$$

Donc, en divisant par $\binom{k+n}{n}$, pour tous k dans $\mathbf{N}$ et n dans $\mathbf{N}^*$,

$$\boxed{t_n^k(a) = (n+1)t_n^k\left(F(a)\right) - n t_{n-1}^k\left(F(a)\right).}$$

Pour tout entier k, on a $t_0^k(a) = t_0^0(a) = a_0$ et donc aussi $t_0^k\left(F(a)\right) = F(a)_0 = s_0^1(a) = a_0 = t_0^0(a)$. Il résulte de ce qui précède qu'on a, pour k dans $\mathbf{N}$ et n dans $\mathbf{N}^*$,

$$\begin{aligned}(n+1)t_n^k\left(F(a)\right) &= \sum_{p=1}^{n}\big((p+1)t_p^k\left(F(a)\right) - pt_{p-1}^k\left(F(a)\right)\big) + t_0^k\left(F(a)\right)\\ &= \sum_{p=1}^{n} t_p^k(a) + t_0^0\left(F(a)\right)\\ &= \sum_{p=1}^{n} t_p^k(a) + a_0\end{aligned}$$

et donc $\boxed{t_n^k\left(F(a)\right) = \dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{p=0}^{n} t_p^k(a).}$

IV.3. a. Si $F(a)$ appartient $\mathcal{T}_{k-1}$, alors il appartient aussi à $\mathcal{T}_k$ d'après III.2, et de plus $t^k(F(a))$ et $t^{k-1}(F(a))$ ont même limite. Il résulte alors de IV.2.a que $t^k(a)$ converge et a même limite que ces deux suites, i.e.

$\boxed{a \in \mathcal{T}_k \text{ et les sommes d'ordre } k-1 \text{ de } F(a) \text{ et d'ordre } k \text{ de } a \text{ sont égales.}}$

Réciproquement si $a \in \mathcal{T}_k$, alors d'après IV.2.b et I.1.a, $F(a) \in \mathcal{T}_k$ et $t^k(F(a))$ a même limite que $t^k(a)$. Il résulte alors de IV.2.a qu'on a également $F(a) \in \mathcal{T}_{k-1}$. Autrement dit

$\boxed{\text{si } a \in \mathcal{T}_k, \text{ alors } F(a) \in \mathcal{T}_{k-1}.}$

b. Soit k dans $\mathbf{N}$. D'après ce qui précède, on a

$$a \in \mathcal{T}_k \Leftrightarrow F^k(a) \in \mathcal{T}_0$$

et dans ce cas la somme d'ordre k de a est aussi la somme d'ordre 0 de $F^k(a)$.

On reprend les notations de II.2, à savoir φ et ψ sont les applications définies sur $\mathcal{S}$ et $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ respectivement, et à valeurs dans $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$, par

$$\varphi(a) = \left(\sum_{p=0}^{n} a_p\right)_{n\in\mathbf{N}} \quad \text{et} \quad \psi(a) = \left(\frac{1}{n+1}\sum_{p=0}^{n} a_p\right)_{n\in\mathbf{N}},$$

de sorte qu'on a $s^k = \psi^k \circ \varphi$, $F = \varphi^{-1} \circ \psi \circ \varphi$ et $F^k = \varphi^{-1} \circ s^k$. Par conséquent

$$F^k(a) \in \mathcal{T}_0 \Leftrightarrow s^k(a) \in \varphi(\mathcal{T}_0)$$

et donc, puisque $\varphi(\mathcal{T}_0) = \varphi(\mathcal{S}_0)$ et que cet ensemble est l'ensemble des suites convergentes, on a

$$F^k(a) \in \mathcal{T}_0 \Leftrightarrow a \in \mathcal{S}_k\ .$$

De plus la somme d'indice k de a est alors la limite de $s^k(a)$ et donc la somme de la série $\varphi^{-1} \circ s^k(a)$, soit la somme de la série $F^k(a)$.

On en conclut que

$\boxed{\text{pour tout } k \text{ dans } \mathbf{N},\ \mathcal{S}_k = \mathcal{T}_k \text{ et, lorsqu'elles existent, les sommes d'indice } k \text{ et d'ordre } k \text{ sont égales.}}$