ÉCOLE POLYTECHNIQUE – ÉCOLES NORMALES SUPÉRIEURES

CONCOURS D'ADMISSION 2011 FILIÈRE MP

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES – A – (XLC)

(Durée : 4 heures)

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve.

⋆⋆⋆

Valeurs singulières d'une matrice et inégalités de traces

Notations et conventions

Dans ce problème l'espace vectoriel $\mathbf{C}^n$ est muni du produit scalaire hermitien usuel noté $(.|.)$; on rappelle qu'il est linéaire à droite, semi-linéaire à gauche et que la base canonique $(e_1, \dots, e_n)$ de $\mathbf{C}^n$ est orthonormale. On note $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ l'espace vectoriel sur $\mathbf{C}$ des matrices à n lignes et n colonnes à coefficients complexes qu'on identifie à l'espace vectoriel des endormorphismes de $\mathbf{C}^n$ et I_n la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$. Le coefficient de la i-ième ligne et j-ième colonne d'une matrice A est noté A_{ij}. On note A^*, appelée adjointe de la matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, la matrice définie pour tous $1 \leqslant i, j \leqslant n$ par $A^*_{ij} = \overline{A_{ji}}$.

On définit les sous-ensembles de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ suivants :

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_n &= \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C}) |\ A^* = A\} \\
\mathcal{H}_n^+ &= \{A \in \mathcal{H}_n |\ (\forall x \in \mathbf{C}^n),\ (x|Ax) \geqslant 0\} \\
\mathcal{U}_n &= \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C}) |\ (\forall x, y \in \mathbf{C}^n),\ (Ax|Ay) = (x|y)\} \\
\mathcal{N}_n &= \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C}) |\ AA^* = A^*A\}
\end{aligned}$$

$\mathcal{D}_n$ désigne l'ensemble des matrices diagonales dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$

Enfin, pour tout sous-espace vectoriel F de $\mathbf{C}^n$, $F^\perp$ désigne le sous-espace orthogonal pour le produit hermitien usuel.

Ce problème a pour but l'étude de quelques inégalités de traces sur les matrices carrées à coefficients complexes via l'introduction de la décomposition en valeurs singulières et le calcul de la distance minimale pour la norme de Frobenius entre deux matrices de $\mathcal{H}_n$ définies à équivalence près par des changements de bases dans $\mathcal{U}_n$.

Première partie : étude de $\mathcal{N}_n$

1. Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$. Montrer pour tout couple (x, y) de vecteurs de $\mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^n$:

$$(A^* x|y) = (x|Ay).$$

2a. Montrer que $A \in \mathcal{U}_n$ si et seulement si $A^*A = AA^* = I_n$.

2b. Montrer que $A \in \mathcal{U}_n$ si et seulement si les colonnes de A forment une base orthonormale de $\mathbf{C}^n$.

3a. Montrer que si $A \in \mathcal{N}_n$, $A((\ker A)^\perp) \subset (\ker A)^\perp$. En déduire que si λ est une valeur propre de A et si E_λ est le sous-espace propre associé, alors $A(E_\lambda^\perp) \subset E_\lambda^\perp$.

3b. En déduire que $\mathcal{N}_n = \{UDU^*,\ U \in \mathcal{U}_n,\ D \in \mathcal{D}_n\}$.

4. Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$. On note $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ les racines du polynôme caractéristique (non nécessairement distinctes) de A. Montrer que si $A \in \mathcal{N}_n$, alors $\sum_{i=1}^n |\lambda_i|^2 = \sum_{i,j=1}^n |A_{i,j}|^2$. (On pourra calculer la trace de AA^*.)

5a. Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$. Montrer que si $A \in \mathcal{N}_n$, alors A et A^* ont même noyau.

5b. Montrer que les deux propositions suivantes sont équivalentes :
(i) $A \in \mathcal{N}_n$.
(ii) Tout vecteur propre de A est vecteur propre de son adjointe A^*.

Pour $(ii) \Rightarrow (i)$, on pourra procéder par récurrence sur la dimension n et pour un vecteur propre x de A considérer l'orthogonal de l'espace vectoriel engendré par x.

6a. Prouver que si la matrice $A \in \mathcal{N}_n$, son adjointe A^* peut s'exprimer comme un polynôme en A à coefficients complexes. (On pourra utiliser les polynômes d'interpolation de Lagrange.)

6b. Prouver que si A et B sont dans $\mathcal{N}_n$ et commutent alors $AB \in \mathcal{N}_n$.

7. Prouver que si A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ les deux propositions suivantes sont équivalentes :
(i) $A \in \mathcal{N}_n$
(ii) Il existe une matrice $U \in \mathcal{U}_n$ commutant avec A telle que $A^* = AU$.

On pourra construire U à partir des valeurs propres de A et raisonner dans une base orthonormale bien choisie.

Deuxième partie : valeurs singulières d'une matrice

8. Montrer que $A \in \mathcal{H}_n$ (resp. $\mathcal{H}_n^+$) si et seulement si A est diagonalisable dans une base orthonormale et ses valeurs propres sont réelles (resp. réelles positives).

9. Montrer que si $A \in \mathcal{H}_n^+$ il existe une unique matrice $S \in \mathcal{H}_n^+$ telle que $S^2 = A$. (Pour l'unicité, on pourra se ramener au cas où A est un multiple de l'identité en considérant les sous-espaces propres de A.)

Si A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ on dit que $A = US$ est une décomposition polaire de A si $S \in \mathcal{H}_n^+$ et $U \in \mathcal{U}_n$. Dans la suite du problème, on admettra l'existence d'une décomposition polaire pour toute matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$.

Si A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ on dit que $A = UDW$ est une décomposition en valeurs singulières de A si $U, W \in \mathcal{U}_n$ et $D \in \mathcal{D}_n$ est à coefficients réels positifs ou nuls.

10. Prouver que toute matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ admet une décomposition en valeurs singulières. (On pourra commencer par écrire une décomposition polaire de A.)

11. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$. Montrer qu'il existe une décomposition en valeurs singulières de A pour laquelle les coefficients diagonaux $\alpha_i = D_{ii}$ de D vérifient $\alpha_1 \geqslant \cdots \geqslant \alpha_n$ et que ces coefficients sont alors déterminés de façon unique. On les appelera les valeurs singulières de A.

Troisième partie : inégalités de traces

12. Soit $P \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ une matrice vérifiant

$$(\mathcal{P}_k) \qquad P^2 = P = P^*, \quad \mathrm{rang}(P) = k.$$

12a. Montrer que les coefficients de P vérifient :

(i) $0 \leqslant P_{ii} \leqslant 1$ pour tout entier i entre 1 et n,

(ii) $\sum_{i=1}^n P_{ii} = k$.

12b. Soit $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n$ des réels et D la matrice diagonale telle que $D_{ii} = \lambda_i$ pour tout entier i entre 1 et n. Montrer que $\mathrm{Tr}\,(PD) \leqslant \sum_{i=1}^k \lambda_i$. Trouver une matrice P vérifiant les conditions $(\mathcal{P}_k)$ telle que $\mathrm{Tr}\,(PD) = \sum_{i=1}^k \lambda_i$.

12c. Montrer que si P_1, P_2 sont deux matrices vérifiant les conditions $(\mathcal{P}_k)$, il existe $U \in \mathcal{U}_n$ telle que $P_2 = UP_1U^*$. En déduire que $\sum_{i=1}^k \lambda_i = \max\limits_{U \in \mathcal{U}_n} \mathrm{Tr}\,(UPU^*D)$ où P est une matrice vérifiant $(\mathcal{P}_k)$.

On dit qu'une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ est *doublement stochastique* si A est à coefficients réels positifs et vérifie $\sum_{i=1}^n A_{ik} = 1$ et $\sum_{j=1}^n A_{kj} = 1$, pour tout entier k compris entre 1 et n. On note $\mathcal{DS}_n$ l'ensemble des matrices doublement stochastiques dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$.

13. Montrer que si $U \in \mathcal{U}_n$, la matrice dont les coefficients sont les $|U_{i,j}|^2$ est doublement stochastique.

14. Soit A une matrice doublement stochastique de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ et soient

$$\alpha_1 \geqslant \alpha_2 \geqslant \cdots \geqslant \alpha_n, \qquad \beta_1 \geqslant \beta_2 \geqslant \cdots \geqslant \beta_n$$

des réels. On suppose que A n'est pas la matrice identité I_n et on note k le plus petit entier tel que $A_{kk} \neq 1$.

14a. Montrer qu'il existe deux entiers m et ℓ vérifiant $k < m \leqslant n$, $k < \ell \leqslant n$ et tels que $A_{mk} \neq 0$, $A_{k\ell} \neq 0$, $A_{m\ell} \neq 1$.

14b. Construire une matrice doublement stochastique A' de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ vérifiant :

(i) $A'_{ij} = A_{ij}$ si $(i,j) \notin \{(k,k),(m,k),(k,\ell),(m,\ell)\}$,

(ii) A'_{mk} ou $A'_{k\ell}$ est nul,

(iii) $\sum_{i,j=1}^n A'_{i,j}\alpha_i\beta_j \geqslant \sum_{i,j=1}^n A_{i,j}\alpha_i\beta_j$.

En déduire que $\max\limits_{A\in\mathcal{DS}_n} \sum_{i=1,j=1}^n A_{i,j}\alpha_i\beta_j = \sum_{i=1}^n \alpha_i\beta_i$.

15. Soient A et B deux matrices dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$.

15a. Soit D la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux $\alpha_i = D_{ii}$ sont les valeurs singulières de A et soit T la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux $\beta_i = T_{ii}$ sont les valeurs singulières de B telles que

$$\alpha_1 \geqslant \alpha_2 \geqslant \cdots \geqslant \alpha_n, \qquad \beta_1 \geqslant \beta_2 \geqslant \cdots \geqslant \beta_n.$$

Montrer qu'il existe U et V dans $\mathcal{U}_n$ telles que $\mathrm{Tr}\,(AB) = \mathrm{Tr}\,(UDVT)$.

15b. Montrer que $\mathrm{Tr}\,(AB) = \sum_{i,j=1}^n U_{ij}V_{ji}\alpha_j\beta_i$ et en déduire que

$$|\mathrm{Tr}\,(AB)| \leqslant \sum_{i=1}^n \alpha_i\beta_i.$$

15c. Soient A et B dans $\mathcal{H}_n^+$. Montrer que $|\mathrm{Tr}\,(AB)| \leqslant \mathrm{Tr}\,(A)\mathrm{Tr}\,(B)$.

16. Soient A et B dans $\mathcal{H}_n$ et soient

$$\alpha_1 \geqslant \alpha_2 \geqslant \cdots \geqslant \alpha_n, \qquad \beta_1 \geqslant \beta_2 \geqslant \cdots \geqslant \beta_n.$$

leurs valeurs propres.

Montrer que

$$\min_{U\in\mathcal{U}_n} \|A - U^*BU\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (\alpha_i - \beta_i)^2}\,,$$

où la norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ est donnée par $\|A\|^2 = \mathrm{Tr}\,(A^*A)$. On pourra commencer par déterminer $\max\limits_{U\in\mathcal{U}_n} \mathrm{Tr}\,(AU^*BU)$.

* *
*

Composition A – X-ENS 2011 - MP

PARTIE I - étude de $\mathcal{N}_n$

1. Soit x et y dans $\mathbf{C}^n$, on a $\langle A^*x \mid y\rangle = {}^{\mathrm{t}}(\overline{A^*x})y = {}^{\mathrm{t}}\overline{x}Ay$ et donc $\boxed{\langle A^*x \mid y\rangle = \langle x \mid Ay\rangle.}$

2a. Par définition de $\mathcal{U}_n$ et d'après ce qui précède, on a $A \in \mathcal{U}_n$ si et seulement si, pour tous x et y dans $\mathbf{C}^n$, on a $\langle x \mid y\rangle = \langle A^*Ax \mid y\rangle$ et donc, puisque le produit scalaire est défini, si et seulement si pour tout x dans $\mathbf{C}^n$ $x = A^*Ax$ ou encore si et seulement si $A^*A = I_n$, i.e. A est inversible d'inverse A^*. Puisque l'inverse à gauche est aussi l'inverse à droite, il vient $\boxed{A \in \mathcal{U}_n \Leftrightarrow A^*A = AA^* = I_n.}$

2b. On note $(x_i)_{1\leq i\leq n}$ les colonnes de A et δ le symbole de Kronecker. Alors A^*A est la matrice $(\langle x_i \mid x_j\rangle)_{1\leq i,j\leq n}$ et donc $A" * A = I_n$ si et seulement si $\langle x_i \mid x_j\rangle = \delta_{i,j}$, i.e. (x_i) est une famille orthonormée. Par cardinalité c'est alors une base.
$\boxed{A \text{ appartient à } \mathcal{U}_n \text{ si et seulement si ses colonnes forment une base orthonormée de } \mathbf{C}^n.}$

3a. Soit A dans $\mathcal{N}_n$, x dans $\mathrm{Ker}(A)$ et y dans $(\mathrm{Ker}(A))^\perp$. Puisque A^* commute avec A, A^* laisse stable $\mathrm{Ker}(A)$. Il vient alors $\langle Ay \mid x\rangle = \langle y \mid A^*x\rangle = 0$ puisque $A^*x \in \mathrm{Ker}(A)$ et $y \in (\mathrm{Ker}(A))^\perp$. Par conséquent $\boxed{A((\mathrm{Ker}(A))^\perp) \subset (\mathrm{Ker}(A))^\perp.}$

Soit λ une valeur propre de A, alors $A - \lambda I_n$ commute avec A^* et donc aussi avec $A^* - \overline{\lambda}I_n$. Comme $(A - \lambda I_n)^* = A^* - \overline{\lambda}I_n$, il résulte de ce qui précède que $A - \lambda I_n$ laisse stable $E_\lambda^\perp$ et donc A aussi, i.e. $\boxed{A(E_\lambda^\perp) \subset E_\lambda^\perp.}$

3b. On démontre par récurrence sur n que si A appartient à $\mathcal{N}_n$, alors A est diagonalisable dans une base orthonormée. Le cas $n = 1$ est direct puisque toute base est alors orthonormée. Soit $n \geq 2$ et A dans $\mathcal{N}_n$. Puisqu'on travaille dans $\mathbf{C}$, A admet au moins une valeur propre, que l'on note λ. Si $E_\lambda = E$, alors toute base orthonormée de $\mathbf{C}^n$ convient.

Sinon la restriction de A à $E_\lambda^\perp$ est un endomorphisme B de cet espace vectoriel. Pour x et y dans $E_\lambda^\perp$, on a $\langle A^*x \mid y\rangle = \langle x \mid Ay\rangle = \langle x \mid By\rangle$ et donc, par unicité de l'adjoint B^* est la restriction de A^* à $E_\lambda^\perp$. Il en résulte $BB^* = B^*B$ et donc si B est diagonalisable dans une base orthonormée de $E_\lambda^\perp$, il en va de même pour A en adjoignant à la base précédente une base orthonormée quelconque de E_λ. Le principe de récurrence permet de conclure que tout élément de $\mathcal{N}_n$ s'écrit UDU^{-1} avec D dans $\mathcal{D}_n$ et U dans $\mathcal{U}_n$, d'après 2b. On a donc alors $UDU^{-1} = UDU^*$.

Réciproquement si $A = UDU^*$ avec D dans $\mathcal{D}_n$ et U dans $\mathcal{U}_n$, il vient $A^* = UD^*U^*$ et donc $AA^* = UDD^*U^* = UD^*DU^* = A^*A$ puisque D et D^* sont diagonales et donc commutent entre elles. On conclut $\boxed{\mathcal{N}_n = \{UDU^* \mid U \in \mathcal{U}_n, D \in \mathcal{D}_n\}.}$

4. D'après ce qui précède on dispose de D dans $\mathcal{D}_n$ et U dans $\mathcal{U}_n$ tels qu'on ait $A = UDU^* = UDU^{-1}$. On a donc $AA^* = UDD^*U^{-1}$ et donc $\mathrm{Tr}(AA^*) = \mathrm{Tr}(D\overline{D})$. Comme la matrice diagonale D est formée des valeurs propres de A et que la diagonale de AA^* est formée des normes des vecteurs lignes de A, il vient

$$\mathrm{Tr}(AA^*) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |A_{i,j}|^2 = \mathrm{Tr}(DD^*) = \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^2\,,$$

i.e. $\boxed{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |A_{i,j}|^2.}$

5a. Si A appartient à $\mathcal{N}_n$, on dispose de D dans $\mathcal{D}_n$ et U dans $\mathcal{U}_n$ tels qu'on ait $A = UDU^* = UDU^{-1}$. On a alors $A^* = UD^*U^{-1}$ et donc $\mathrm{Ker}(A) = U(\mathrm{Ker}(D)) = U(\mathrm{Ker}(D^*)) = \mathrm{Ker}(A^*)$ puisque D et D^* sont diagonales et ont même noyau, à savoir l'espace engendré par les vecteurs de la base canonique associés à un terme nul sur la diagonale de D ou D^*. Il en résulte $\boxed{\mathrm{Ker}(A) = \mathrm{Ker}(A^*).}$

5b. En reprenant le raisonnement de la question 3a., si A appartient à $\mathcal{N}_n$, alors il en va de même de $A - \lambda I_n$ pour tout scalaire λ dans $\mathbf{C}$. Il en résulte que le noyau de $A - \lambda I_n$ est celui de $A^* - \overline{\lambda} I_n$ et donc tout vecteur propre de A pour la valeur propre λ est également vecteur propre de A^* pour la valeur propre $\overline{\lambda}$.

Réciproquement soit A dans $\mathfrak{M}_n(\mathbf{C})$ dont tout vecteur propre est un vecteur propre de son adjointe. Comme on travaille sur $\mathbf{C}$, on dispose d'une valeur propre de A et d'un vecteur propre unitaire x de A, donc aussi de A^*. On note F l'orthogonal de $\mathbf{C}x$. Puisque $\mathbf{C}x$ est stable par A, F est stable par A^*. De même $\mathbf{C}x$ est stable par A^* donc F est stable par A. Par le raisonnement conduit en 3b. et par unicité de l'adjoint, il en résulte que l'adjoint de la restriction de A à F est la restriction de A^* à F. En particulier ces deux endomorphismes de F ont mêmes vecteurs propres. De plus si la restriction de A à F est diagonalisable dans une base orthonormée, il en va de même pour A en adjoignant x à cette base. Le principe de récurrence permet donc de conclure que A est diagonalisable dans une base orthonormée et donc $A \in \mathcal{N}_n$ d'après 3b.

Au final $\boxed{(i) \Leftrightarrow (ii).}$

6a. Soit A dans $\mathcal{N}_n$. On note $(\lambda_i)_{1\leq i\leq r}$ l'ensemble de ses valeurs propres comptées sans multiplicité. Puisque $1 \leq r \leq n$, on dispose d'un polynôme P de $\mathbf{C}_{r-1}[X]$ vérifiant $\forall i \in [\![1, r]\!]$, $P(\lambda_i) = \overline{\lambda_i}$, par exemple donné par la formule d'interpolation de Lagrange. Soit alors D dans $\mathcal{D}_n$ et U dans $\mathcal{U}_n$ tels qu'on ait $A = UDU^* = UDU^{-1}$. Il vient $P(D) = \overline{D} = D^*$ et donc $P(A) = UP(D)U^{-1} = UD^*U^* = A^*$ et donc $\boxed{A^* \text{ est un poynôme en } A.}$

6b. Si A et B commutent, tout polynôme en A commute avec tout polynôme en B. Par conséquent, en utilisant la question précédente, si A et B sont dans $\mathcal{N}_n$ les quatre matrices A, A^*, B et B^* commutent entre elles et donc AB commute avec B^*A^*, ce qui n'est autre que $(AB)^*$. Il en résulte $\boxed{AB \in \mathcal{N}_n.}$

7. Soit A dans $\mathfrak{M}_n(\mathbf{C})$ et U dans $\mathcal{U}_n$ tels qu'on ait $A^* = AU$ et $AU = UA$, alors A^* commute avec A en tant que produit de deux telles matrices et donc $A \in \mathcal{N}_n$.

Réciproquement soit A dans $\mathcal{N}_n$. On dispose de D dans $\mathcal{D}_n$ et V dans $\mathcal{U}_n$ tels qu'on ait $A = VDV^* = VDV^{-1}$. Soit W la matrice diagonale dont les termes diagonaux sont égaux à 1 si le terme correspondant dans D est nul et à $\overline{\lambda}/\lambda$ s'il est égal à λ non nul. Alors W appartient à $\mathcal{U}_n$ puisqu'elle est diagonale à diagonale unitaire et on a $DW = \overline{D} = D^*$. On pose alors $U = VWV^*$ de sorte qu'on a

$$A^* = VD^*V^* = VDWV^* = VDV^*VWV^* = AU\ .$$

De plus, puisque D et W sont diagonales, elles commutent entre elles et donc A et U aussi. Enfin on a $UU^* = VWW^*V^* = VV^* = I_n$ et donc $U \in \mathcal{U}_n$. Au final $\boxed{(i) \Leftrightarrow (ii).}$

PARTIE II - valeurs singulières d'une matrice

8. On remarque tout d'abord $\mathcal{H}_n^+ \subset \mathcal{H}_n \subset \mathcal{N}_n$ et donc toutes les matrices de ces ensembles sont diagonalisables dans une base orthonormée d'après la question 3b. et, si A est une telle matrice, on dispose de D dans $\mathcal{D}_n$ et U dans $\mathcal{U}_n$ tels qu'on ait $A = UDU^* = UDU^{-1}$. Ainsi on a $A = A^*$ si et seulement si $D = D^*$, i.e. D est réelle, ce qui signifie que les valeurs propres de A sont réelles puisque la diagonale de D est constituée de ces valeurs propres.
De plus si $A = A^*$, $A \in \mathcal{H}_n^+$ si et seulement si pour tout vecteur x de $\mathbf{C}^n$, on a $\langle x \mid Ax\rangle \geq 0$, i.e. $\langle U^*x \mid DU^*x\rangle$ ou encore, puisque U^* est bijective, si et seulement si pour tout vecteur y de $\mathbf{C}^n$, on a $\langle y \mid Dy\rangle \geq 0$. Cette dernière condition s'écrit $\sum_{i=1}^n \lambda_i |y_i|^2$ en notant (λ_i) la diagonale de D et (y_i) les coordonnées de y et cette quantité est positive pour toutes valeurs de (y_i) dans $\mathbf{C}^n$ si et seulement si tous les λ_i le sont. Ainsi
$\boxed{\text{$A$ appartient à $\mathcal{H}_n$, respectivement $\mathcal{H}_n^+$ si et seulement si elle est diagonalisable dans une base orthonormée et ses valeurs propres sont réelles, respectivement réelles positives.}}$
9. Soit A et S dans $\mathcal{H}_n^+$ telles que $S^2 = A$ alors A et S sont diagonalisables et commutent. Soit λ une valeur propre de S et E_λ l'espace propre associé, alors λ est réel positif d'après ce qui précède, et la restriction de A à E_λ est $\lambda^2 \operatorname{Id}_{E_\lambda}$ puisque $A = S^2$. Comme l'application carré est injective sur $\mathbf{R}_+$ et que les valeurs propres de A sont réelles positives, d'après la question précédente, il en résulte que E_λ est l'espace propre de A pour la valeur propre λ^2 puisqu'on a démontré l'inclusion et que l'inclusion réciproque résulte de considérations de dimension sachant que les espaces propres de A sont en somme directe. Il en résulte que S est nécessairement égal à l'endomorphisme $\displaystyle\sum_{\mu \in Sp(A)} \sqrt{\mu}\, p_\mu$ où p_μ désigne le projecteur sur l'espace propre de A associé à la valeur propre μ. Comme, réciproquement, un tel endomorphisme est d'une part diagonalisable dans une base orthonormée avec des valeurs propres réelles positives et d'autre part de carré A, on en déduit qu'il existe $\boxed{\text{un unique S dans $\mathcal{H}_n^+$ vérifiant $S^2 = A$.}}$
10. Soit A dans $\mathfrak{M}_n(\mathbf{C})$. On dispose d'une décomposition polaire de A et donc de U dans $\mathcal{U}_n$ et de S dans $\mathcal{H}_n^+$ tels qu'on ait $A = US$. D'après la question 8. on dispose également de D dans $\mathcal{D}_n$ et à coefficients réels positifs et de V dans $\mathcal{U}_n$ avec $S = VDV^*$. On en déduit $A = (UV)DV^*$ et donc, puisque V^* et UV appartiennent à $\mathcal{U}_n$ (car $\mathcal{U}_n$ est un groupe de par la question 2a. et qu'on a $V^* = V^{-1}$), $\boxed{\text{$A$ admet une décomposition en valeurs singulières.}}$
11. Les matrices de permutations sont dans $\mathcal{U}_n$ d'après 2b. et donc si une matrice A admet UDW comme décomposition en valeurs singulières, $(UP^*)(PDP^*)(PW)$ en est une aussi. On peut donc choisir D de sorte que ses coefficients diagonaux soient ordonnés de façon décroissante : $\boxed{\text{une telle décomposition en valeurs singulières existe.}}$ De plus, pour toute décomposition en valeurs singulières $A = UDW$, il vient $A^*A = W^*D^*DW = W^{-1}D^2W$, de sorte que la diagonale de D est formée est racines carrées positives des valeurs propres de A^*A. On peut remarquer au passage que A^*A appartient à $\mathcal{H}_n^+$ et admet donc des valeurs propres positives puisqu'on a $(A^*A)^* = A^*A$ et que, pour tout x dans $\mathbf{C}^n$,
$$\langle x \mid A^*Ax\rangle = \|Ax\|^2 \geq 0\ .$$
L'ensemble des éléments de la diagonale de D est donc unique et donc, si on impose qu'ils soient ordonnés de façon décroissante, $\boxed{\text{ces coefficients sont déterminés de façon unique.}}$

PARTIE III - inégalités de traces

12a. Puisque $X^2 - X$ annule P, son spectre est inclus dans $\{0,1\}$ et donc on a $\mathrm{Tr}(P) = \mathrm{rg}(P) = k$, i.e. $\boxed{\sum_{i=1}^{n} P_{ii} = k.}$

Pour i dans $[\![1,n]\!]$, on a, puisque $P = P^2$ et $P^* = P$,

$$P_{ii} = \langle e_i \mid Pe_i \rangle = \langle e_i \mid P^2 e_i \rangle = \langle P^* e_i \mid Pe_i \rangle = \|Pe_i\|^2$$

et donc $0 \leq P_{ii} \leq \|P\|^2$. De plus, comme P est diagonalisable dans une base orthonormée, la norme de P est majorée par le plus grand module de ses valeurs propres car, si (u_i) est une base orthonormée de diagonalisation et (λ_i) les valeurs propres associées, on a pour tout x dans $\mathbf{C}$

$$\|Px\|^2 = \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^2 \langle e_i \mid x \rangle^2 \leq \max_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i|^2 \, \|x\|^2 \ .$$

Il en résulte $\|P\| \leq 1$ (en fait il y a égalité sauf si P est nul) et donc $\boxed{0 \leq P_{ii} \leq 1.}$

12b. Soit $(x_1, \ldots, x_n)$ des réels vérifiant $0 \leq x_i \leq 1$ pour $1 \leq i \leq n$ et $\sum_{i=1}^{n} x_i = k$. Soit j dans $[\![1,k]\!]$ tel que $x_j < 1$ alors on dispose de ℓ dans $[\![k+1,n]\!]$ vérifiant $x_\ell > 0$ (sinon on aurait $\sum_{i=1}^{n} x_i \leq k - 1 + x_j < k$) et donc aussi de ε strictement positif tel que $x_j + \varepsilon < 1$ et $x_\ell - \varepsilon > 0$. De plus on a

$$\sum_{i=1} \lambda_i x_i \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i + (\lambda_j - \lambda_\ell)\varepsilon$$

et donc la somme $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$ est maximale lorsque $x_1 = \cdots = x_k = 1$ et $x_{k+1} = \cdots = x_n = 0$. Elle vaut alors $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i$.

Puisque $\mathrm{Tr}(PD) = \sum_{i=1} \lambda_i P_{ii}$, il en résulte $\boxed{\mathrm{Tr}(PD) \leq \sum_{i=1}^{k} \lambda_i.}$

De plus si P est la matrice $I_{n,k}$ définie comme diagonale dont les k premiers termes diagonaux sont égaux à 1 et les autres nuls, on a $\boxed{P^2 = P = P^*,\ \mathrm{rg}(P) = k \text{ et } \mathrm{Tr}(PD) \leq \sum_{i=1}^{k} \lambda_i.}$

12c. Si une matrice P vérifie la condition $(\mathcal{P}_k)$, elle appartient à $\mathcal{H}_n$ et son spectre est inclus dans $\{0,1\}$, donc on dispose de D dans $\mathcal{D}_n$ et U dans $\mathcal{U}_n$ tels qu'on ait $A = UDU^* = UDU^{-1}$. Quitte à multiplier par une matrice de permutation comme dans la question 11. on peut supposer que les valeurs propres de D sont ordonnées de façon décroissante et il en résulte $D = I_{n,k}$ avec les notations de la question précédente. Par conséquent P_1 et P_2 sont semblables à $I_{n,k}$ via une matrice de $\mathcal{U}_n$ et elles le sont donc entre elles : il existe U dans $\mathcal{U}_n$ tel que $\boxed{P_2 = UP_1U^*.}$

La question précédente montre que $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i$ est le maximum des $\mathrm{Tr}(PD)$ pour P vérifiant $(\mathcal{P}_k)$ et donc, d'après ce qu'on vient de démontrer, en fixant P vérifiant cette condition, $\boxed{\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = \max_{U\in\mathcal{U}_n} \mathrm{Tr}(UPU^*D).}$

13. Soit U dans $\mathcal{U}_n$, alors U^* appartient aussi à $\mathcal{U}_n$ et donc, d'après la question 2b. leurs colonnes sont des vecteurs unitaires. Il en résulte

$$\sum_{i=1}^{n} |U_{ik}|^2 = \sum_{j=1} |U_{kj}|^2 = 1$$

pour tout entier k entre 1 et n. Comme les modules sont des nombres réels positifs, il en résulte que $\boxed{(|U_{ij}|^2)_{1\leq i,j\leq n} \text{ est doublement stochastique.}}$

14a. Puisque les colonnes de A avant la k-ème ont des 1 en position diagonale, tous leurs autres termes sont nuls, et de même pour les lignes, puisque A est doublement stochastique. Comme A_{kk} est distinct de 1, la k-ème ligne et la k-ème colonne ont des termes non nuls en dehors de A_{kk} et on en déduit l'existence de m et ℓ strictement supérieurs à k tels que $A_{k\ell}$ et A_{mk} sont non nuls. Il en résulte alors $A_{m\ell} \neq 1$ car sinon ces deux termes seraient nuls par stochasticité, i.e. $\boxed{A_{k\ell} \neq 0,\ A_{mk} \neq 0 \text{ et } A_{m\ell} \neq 1.}$

14b. On pose

$$A' = A + \min(A_{m,k}, A_{k,\ell})\,(E_{kk} - E_{k\ell} - E_{m,k} + E_{m,l}) \ .$$

Alors A' est à coefficients réells par construction et aussi à termes positifs puisque tous ses termes sont supérieurs à ceux correspondants dans A à l'exception des termes d'indices (k,ℓ) et (m,k) qui sont positifs par définition d'un minimum. De plus A' vérifie les conditions (i) et (ii) par construction et définition du minimum. Enfin

$$\begin{aligned}\sum_{i,j=1}^{n} A'_{ij}\alpha_i\beta_j - \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}\alpha_i\beta_j &= \min(A_{m,k}, A_{k,\ell})\,(\alpha_k\beta_k - \alpha_k\beta_\ell - \alpha_m\beta_k + \alpha_m\beta_\ell) \\ &= \min(A_{m,k}, A_{k,\ell})(\alpha_k - \alpha_m)(\beta_k - \beta_\ell) \geq 0\end{aligned}$$

et donc $\boxed{A' \text{ vérifie les conditions } (i), (ii) \text{ et } (iii).}$

Il en résulte que la somme $\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}\alpha_i\beta_j$ est maximale parmi les matrices doublement stochastiques lorsque A est l'identité et donc $\boxed{\max_{A\in\mathcal{DS}_n} \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}\alpha_i\beta_j = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\beta_i.}$

15a. D'après la question 11. on dispose de U_1, W_1, U_2 et W_2 dans $\mathcal{U}_n$ tels que $A = U_1DW_1$ et $B = U_2TW_2$. Il vient alors $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(U_1DW_1U_2TW_2) = \mathrm{Tr}(W_2U_1DW_1U_2T)$ par commutativité de la trace. Comme $\mathcal{U}_n$ est stable par multiplication, en posant $U = W_2U_1$ et $V = W_1U_2$, il vient $\boxed{\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(UDVT) \text{ avec } U \text{ et } V \text{ dans } \mathcal{U}_n.}$

15b. Pour i dans $[\![1,n]\!]$, on a en notant δ le symbole de Kronecker

$$(UDVT)_{ii} = \sum_{j,k,\ell=1}^{n} U_{ij} D_{j,k} V_{k,\ell} T_{\ell,i} = \sum_{j,k,\ell=1}^{n} U_{ij}\alpha_j \delta_{jk} V_{k,\ell}\beta_i\delta_{\ell,i}$$

et donc $\boxed{\mathrm{Tr}(AB) = \sum_{i,j=1}^{n} U_{ij}V_{ji}\alpha_i\beta_j.}$

15c. Par positivité des réels α_i et β_j, il résulte de l'inégalité triangulaire et de l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$|\mathrm{Tr}(AB)| \leq \sum_{i,j=1}^{n} |U_{ij}||V_{j,i}|\alpha_i\beta_j \leq \left(\sum_{i,j=1}^{n} |U_{i,j}|^2\alpha_i\beta_j\right)^{1/2} \left(\sum_{i,j=1}^{n} |V_{j,i}|^2\alpha_i\beta_j\right)^{1/2}$$

et donc, d'après 13 et 14b., puisque U et V^* appartient à $\mathcal{U}_n$, $\boxed{|\mathrm{Tr}(AB)| \leq \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\beta_i.}$

15d. D'après le calcul effectué à la question 11, les valeurs singulières de A sont les racines carrées des valeurs propres de A^*A. Donc, pour une matrice dans $\mathcal{H}_n^+$, ce sont ses valeurs propres puisque $A^*A = A^2$ et qu'on a affaire à des valeurs propres réelles positives. Par positivité on a aussi $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\beta_i \leq \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_i\beta_j$ et donc $\boxed{|\mathrm{Tr}(AB)| \leq \mathrm{Tr}(A)\,\mathrm{Tr}(B).}$

16. Soit $\lambda = \max(-\alpha_n, -\beta_n)$. On note $A' = A + \lambda I_n$ et $B' = B + \lambda I_n$ alors A' et B' sont dans $\mathcal{H}_n$ et toutes leurs valeurs propres sont positives, donc elles sont dans $\mathcal{H}_n^+$ d'après la question 8. Pour U dans $\mathcal{U}_n$, $U^*B'U$ appartient à $\mathcal{H}_n$ et ses valeurs propres sont celles de B', donc $U^*B'U$ appartient à $\mathcal{H}_n^+$ et donc, d'après la question 15b.,

$$\left|\mathrm{Tr}(A'U^*BU)\right| \leq \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i + \lambda)(\beta_i + \lambda)$$

puisque les valeurs propres de $U^*B'U$ sont celles de B' et que les valeurs singulières des matrices dans $\mathcal{H}_n$ sont leurs valeurs propres. Il en résulte, puisque $U^*B'U = U^*BU + \lambda I_n$,

$$\begin{aligned} \|A - U^*BU\|^2 &= \left\|A' - U^*B'U\right\|^2 = \left\|A'\right\|^2 + \left\|B'\right\|^2 - 2\,\mathrm{Tr}(A'U^*B'U) \\ &\geq \sum_{i=1}^{n} \Big((\alpha_i+\lambda)^2 + (\beta_i+\lambda)^2 - 2(\alpha_i+\lambda)(\beta_i+\lambda)\Big) = \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i - \beta_i)^2 \ . \end{aligned}$$

De plus on dispose de U_1 et U_2 dans $\mathcal{U}_n$ tels qu'on ait $A' = U_1(D + \lambda I_n)U_1^*$ et $B' = U_2(T + \lambda I_n)U_2^*$ de sorte qu'avec U dans $\mathcal{U}_n$ défini par $U = U_2U_1^*$, il vient

$$A' - U^*B'U = U_1\left(D + \lambda I_n - U_2^*U_2(T+\lambda I_n)U_2^*U_2\right)U_1^* = U_1(D-T)U_1^*$$

et donc, pour ce choix de U, il y a égalité l'inégalité précédente et il en résulte

$$\boxed{\min_{U\in\mathcal{U}_n} \|A - U^*BU\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i - \beta_i)^2}.}$$