Composition A
X-ENS 2015 - MP

Pour n supérieur à 1, l'espace des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n est noté $\mathbf{R}_n[X]$. Étant donnés deux polynômes non nuls P et Q à coefficients réels, leur plus grand commun diviseur (pgcd) unitaire est noté $P \wedge Q$.
Si r est un second entier supérieur à 1, $\mathscr{M}_{r,n}(\mathbf{R})$ désigne l'espace vectoriel des matrices à r lignes et n colonnes à coefficients réels. La notation $M = (m_{ij})$ signifie que le coefficient à la ligne i et colonne j de la matrice M est m_{ij}. On note $\mathscr{M}_n(\mathbf{R}) = \mathscr{M}_{n,n}(\mathbf{R})$ et I_n la matrice identité de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$.
Pour M dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$, on note χ_M son polynôme caractéristique et M^{T} sa transposée. On note $\mathscr{S}_n(\mathbf{R})$ (respectivement $\mathscr{O}_n(\mathbf{R})$) l'ensemble des matrices symétriques réelles (resp. orthogonales) de taille n. Étant donné un n-uplet $(a_1, \dots, a_n)$ de réels $\Delta(a_1, \dots, a_n)$ désigne la matrice diagonale associée :

$$\Delta(a_1, \dots, a_n) = \begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{pmatrix} .$$

Si M appartient à $\mathscr{S}_n(\mathbf{R})$, son spectre est réel. On convient de ranger ses valeurs propres (comptées avec leurs ordres de multiplicité) dans l'ordre *décroissant*. On note alors $\mathrm{Sp}(M) = (\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n)$ et $\mathrm{Sp}(M)$ est donc un n-uplet *ordonné*.
Un $n+1$-uplet $\widehat{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}) \in \mathbf{R}^{n+1}$ et un n-uplet $\widehat{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_n) \in \mathbf{R}^n$, ordonnés, sont dit *enlacés* si $\lambda_j \geq \mu_j \geq \lambda_{j+1}$ pour tout j dans $[\![1; n]\!]$. Ils sont dits *strictement enlacés* si $\lambda_j > \mu_j > \lambda_{j+1}$ pour tout j. Par exemple, $(4, 3, 2, 1)$ et $(\pi, e, \sqrt{2})$ sont strictement enlacés.

Questions préliminaires

1.(a) Montrer que $\mathscr{O}_n(\mathbf{R})$ est un sous-groupe du groupe $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ des matrices inversibles.
  (b) Montrer que $\mathscr{O}_n(\mathbf{R})$ est une partie compacte de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$
2. Soit M et N dans $\mathscr{S}_n(\mathbf{R})$. Montrer qu'il existe U dans $\mathscr{O}_n(\mathbf{R})$ tel que $N = UMU^{-1}$ si et seulement si $\chi_M = \chi_N$.
3. Soit $\widehat{\lambda} = (\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_{n+1}) \in \mathbf{R}^{n+1}$ et $\widehat{\mu} = (\mu_1 \geq \cdots \geq \mu_n) \in \mathbf{R}^n$. Soit x un réel. Formons

$$\widehat{\lambda}' = (\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_i \geq x > \lambda_{i+1} \geq \cdots \geq \lambda_{n+1})$$

en choisissant l'entier i dans $[\![0; n+1]\!]$ convenablement. Si $x > \lambda_1$ on a donc $i = 0$, tandis que si $x \leq \lambda_{n+1}$, on a $i = n+1$. On forme de même

$$\widehat{\mu}' = (\mu_1 \geq \cdots \geq \mu_j \geq x > \mu_{j+1} \geq \cdots \geq \mu_n) .$$

On suppose que $\widehat{\lambda}$ et $\widehat{\mu}$ sont enlacés. Montrer $j \leq i \leq j+1$. En examinant chacun des deux cas $j = i$ ou $j = i - 1$, montrer que $\widehat{\lambda}'$ et $\widehat{\mu}'$ sont enlacés.

PARTIE I

Soit $\widehat{\mu} = (\mu_1 > \cdots > \mu_n) \in \mathbf{R}^n$. On se donne des entiers m_k supérieurs ou égaux à 1 pour k dans $[\![1; n]\!]$. On pose $Q = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} (X - \mu_k)^{m_k}$ et pour j dans $[\![1; n]\!]$, $P_j = \dfrac{Q}{X - \mu_j}$.

4. On suppose dans cette question et la suivante que tous les m_k sont égaux à 1.
  (a) Montrer que la famille $(Q, P_1, P_2, \dots, P_n)$ est une base de $\mathbf{R}_n[X]$.
  (b) Soit j dans $[\![1; n]\!]$. Vérifier $(-1)^{j-1} P_j(\mu_j) > 0$.
5. Soit P dans $\mathbf{R}[X]$ un polynôme unitaire de degré $n+1$.

(a) Montrer qu'il existe un unique vecteur $(a, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ dans $\mathbf{R}^{n+1}$ tel que

$$P = (X-a)Q - \sum_{j=1}^{n} \alpha_j P_j \ . \tag{1}$$

(b) On suppose que les nombres réels $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ sont tous strictement positifs. Montrer que P a $n+1$ racines réelles distinctes $\lambda_1 > \cdots > \lambda_{n+1}$ et que $\widehat{\lambda} = (\lambda_1 > \cdots > \lambda_{n+1})$ et $\widehat{\mu}$ sont strictement enlacés.

(c) Réciproquement on suppose que P a $n+1$ racines réelles distinctes $\lambda_1 > \cdots > \lambda_{n+1}$ et que $\widehat{\lambda} = (\lambda_1 > \cdots > \lambda_{n+1})$ et $\widehat{\mu}$ sont strictement enlacés. Montrer que, pour tout j dans $[\![1;n]\!]$, $\alpha_j > 0$.

6. On revient au cas général, i.e. m_k quelconques. Montrer $Q \wedge Q' = \prod_{k=1}^{n} (X - \mu_k)^{m_k - 1}$.

7. Soit $(a, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ dans $\mathbf{R}^{n+1}$ et soit P dans $\mathbf{R}[X]$ défini par la formule

$$P = (X-a)Q - \sum_{j=1}^{n} \alpha_j P_j \ .$$

(a) Donner une expression de $P \wedge Q$ en fonction des μ_j, des m_j et de l'ensemble J des indices pour lesquels $\alpha_j = 0$.

(b) On suppose que les nombres $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ sont positifs ou nuls.
Montrer que les racines de P sont toutes réelles.
On admettra par la suite que, dans ce cas le plus général, le $(N+1)$-uplet des racines de P et le N-uplet des racines de Q sont enlacés.

PARTIE II

8. Soit r et s deux entiers naturels non nuls. Soit A dans $\mathscr{M}_r(\mathbf{R})$, B dans $\mathscr{M}_{r,s}(\mathbf{R})$, C dans $\mathscr{M}_{s,r}(\mathbf{R})$ et D dans $\mathscr{M}_s(\mathbf{R})$. On suppose de plus que A est inversible. On considère la matrice M de $\mathscr{M}_{r+s}(\mathbf{R})$ ayant la forme par blocs suivante

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \ .$$

Trouver deux matrices U dans $\mathscr{M}_{r,s}(\mathbf{R})$ et V dans $\mathscr{M}_s(\mathbf{R})$ telles que

$$M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & I_s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_r & U \\ 0 & V \end{pmatrix}$$

et en déduire

$$\det(M) = \det(A)\det(D - CA^{-1}B) \ .$$

On pourra admettre par la suite que cette formule reste vraie lorsque M et ses blocs $A, \ldots, D$ sont à coefficients dans le corps $\mathbf{R}(X)$ des fractions rationnelles.

9. Soit M dans $\mathscr{S}_{n+1}(\mathbf{R})$ une matrice symétrique. On écrit M sous la forme par blocs

$$M = \begin{pmatrix} A & y \\ y^{\mathrm{T}} & a \end{pmatrix}$$

avec a réel, y dans $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ et A dans $\mathscr{S}_n(\mathbf{R})$.

(a) Si le spectre de A est $\mathrm{Sp}(A) = (\mu_1 \geq \cdots \geq \mu_n)$, montrer qu'il existe U dans $\mathscr{O}_{n+1}(\mathbf{R})$ et z dans $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ tels que

$$UMU^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} \Delta(\mu_1, \ldots, \mu_n) & z \\ z^{\mathrm{T}} & a \end{pmatrix} \ .$$

(b) En déduire qu'il existe des nombres réels positifs ou nuls α_j, pour j dans $[\![1;n]\!]$, tels que

$$\chi_M = (X-a)Q_0 - \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \frac{Q_0}{X-\mu_j}\ , \quad \text{où } Q_0 = \prod_{k=1}^{n}(X-\mu_k)\ .$$

(c) Montrer que $\mathrm{Sp}(M)$ et $\mathrm{Sp}(A)$ sont enlacés.

10. Pour $T = (t_{ij}) \in \mathscr{M}_{n+1}(\mathbf{R})$, on note $T_{\leq n}$ la matrice extraite de taille n dont les coefficients sont les t_{ij} pour $1 \leq i, j \leq n$. Soit M dans $\mathscr{S}_{n+1}(\mathbf{R})$. Montrer que l'ensemble

$$\left\{\mathrm{Sp}\left((UMU^{-1})_{\leq n}\right) \;\middle|\; U \in \mathscr{O}_{n+1}(\mathbf{R})\right\}\ ,$$

noté $\mathcal{C}_M$, est une partie compacte de $\mathbf{R}^n$.

11. On suppose de plus que les valeurs propres de M sont distinctes. On a donc $\mathrm{Sp}(M) = (\lambda_1 > \cdots > \lambda_{n+1})$.

(a) Soit $\widehat{\mu} = (\mu_1 > \cdots > \mu_n)$ tel que $\mathrm{Sp}(M)$ et $\widehat{\mu}$ soient strictement enlacés. Montrer que $\widehat{\mu}$ appartient à $\mathcal{C}_M$.

(b) Montrer

$$\mathcal{C}_M = \{\widehat{\mu} \,|\, \mathrm{Sp}(M) \text{ et } \widehat{\mu} \text{ sont enlacés}\}\ . \tag{2}$$

PARTIE III

On considère l'application Diag_n de $\mathscr{S}_n(\mathbf{R})$ dans $\mathbf{R}^n$ envoyant $M = (m_{ij})$ sur $(m_{11}, m_{22}, \ldots, m_{nn})$. Soit M dans $\mathscr{S}_n(\mathbf{R})$. Dans cette partie, on se propose d'étudier l'ensemble suivant

$$\mathcal{D}_M = \left\{\mathrm{Diag}_n(UMU^{-1}) \;\middle|\; U \in \mathscr{O}_n(\mathbf{R})\right\}\ .$$

12. On étudie d'abord le cas $n = 2$. On note alors $\mathrm{Sp}(M) = (\lambda_1 \geq \lambda_2)$.
Montrer que $\mathcal{D}_M$ est le segment de $\mathbf{R}^2$ dont les extrémités sont (λ_1, λ_2) et (λ_2, λ_1).

13. Soit $M = (m_{ij})$ dans $\mathscr{S}_n(\mathbf{R})$. On note $\mathrm{Sp}(M) = (\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n) \in \mathbf{R}^n$. On se propose de démontrer que, pour tout s dans $[\![1;n]\!]$, on a :

$$\sum_{i=1}^{s} m_{ii} \leq \sum_{i=1}^{s} \lambda_i\ . \tag{3}$$

(a) Que pensez-vous du cas $s = n$?

(b) Exprimer $\displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} m_{ii}$ au moyen des valeurs propres de la matrice $M_{\leq n-1}$ obtenue en supprimant la dernière ligne et la dernière colonne de M. En déduire l'inégalité (3) lorsque $s = n-1$.

(c) En procédant par récurrence sur n, montrer l'inégalité (3) pour tout s dans $[\![1;n]\!]$.

PARTIE IV

14. On note E l'espace vectoriel $\mathbf{R}^2$ muni du produit scalaire standard et de la base canonique $\mathcal{B} = \{e_1, e_2\}$. On définit une base $\mathcal{C} = \{\omega_1, \omega_2\}$ de E par $\omega_1 = e_1$ et $\omega_2 = \frac{1}{2}(e_1 + \sqrt{3}e_2)$.

(a) Soit s_1 la symétrie orthogonale par rapport à la droite $\mathbf{R}\omega_1$. Montrer que la matrice de s_1 dans la base $\mathcal{C}$ est $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

(b) Soit s_2 la symétrie orthogonale par rapport à la droite $\mathbf{R}\omega_2$. Montrer que la matrice de s_2 dans la base $\mathcal{C}$ est $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

15. Soit H l'ensemble des vecteurs (m_1, m_2, m_3) de $\mathbf{R}^3$ tels que $m_1 + m_2 + m_3 = 0$. On note H^+ le sous-ensemble des (m_1, m_2, m_3) de H tels que $m_1 \geq m_2 \geq m_3$. On considère l'application φ de H dans E donnée par
$$\varphi(m_1, m_2, m_3) = (m_1 - m_2)\omega_1 + (m_2 - m_3)\omega_2 \ .$$
   (a) Montrer que φ est un isomorphisme linéaire. Décrire $\varphi(H^+)$.

   (b) Montrer que, pour tout (m_1, m_2, m_3) dans H, on a
$$s_1 \circ \varphi(m_1, m_2, m_3) = \varphi(m_1, m_3, m_2) \quad \text{et} \quad s_2 \circ \varphi(m_1, m_2, m_3) = \varphi(m_2, m_1, m_3) \ .$$
   (c) Soit $\widehat{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in H$ tel que $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3$. On note $\mathcal{Q}_{\widehat{\lambda}}$ l'ensemble des (m_1, m_2, m_3) de H^+ tels que $m_1 \leq \lambda_1$ et $m_1 + m_2 \leq \lambda_1 + \lambda_2$. Montrer que $\varphi(\mathcal{Q}_{\widehat{\lambda}})$ est un quadrilatère dont on décrira les sommets.

16. Soit M dans $\mathscr{S}_3(\mathbf{R})$ une matrice de trace nulle. On note $\mathrm{Sp}(M) = (\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3)$. On se propose de décrire $\varphi(\mathcal{D}_M)$.

   (a) Soit (m_1, m_2, m_3) dans H. Soit σ une permutation de $\{1, 2, 3\}$. Montrer $(m_1, m_2, m_3) \in \mathcal{D}_M \iff (m_{\sigma(1)}, m_{\sigma(2)}, m_{\sigma(3)}) \in \mathcal{D}_M$.

   (b) En utilisant la question 13, montrer que l'intersection $H^+ \cap \mathcal{D}_M$ est incluse dans $\mathcal{Q}_{\widehat{\lambda}}$.

   (c) Soit (m_1, m_2, m_3) dans $\mathcal{D}_M$. Montrer que le segment de H dont les sommets sont (m_1, m_2, m_3) et (m_2, m_1, m_3) est inclus dans $\mathcal{D}_M$. On pourra utiliser la question 12.

   De même, montrer que le segment de H dont les sommets sont (m_1, m_2, m_3) et (m_1, m_3, m_2) est inclus dans $\mathcal{D}_M$.

   (d) Montrer que $\mathcal{D}_M$ contient $\mathcal{Q}_{\widehat{\lambda}}$.

   (e) Montrer que si $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3$ alors $\varphi(\mathcal{D}_M)$ est un hexagone, dont on déterminera les sommets.

Composition A – X-ENS 2015 - MP

Questions préliminaires

1.(a) Soit M dans $\mathscr{O}_n(\mathbf{R})$, on a $M^{\mathrm{T}}M = I_n$ et donc, par multiplicativité du déterminant et invariance de celui-ci par transposition, $\det(M)^2 = 1$ et en particulier $\det(M) \neq 0$ i.e. $\mathscr{O}_n(\mathbf{R})$ est inclus dans $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$. On a $I_n^{\mathrm{T}} I_n = I_n^2 = I_n$ et donc $I_n \in \mathscr{O}_n(\mathbf{R})$. Soit M et N dans $\mathscr{O}_n(\mathbf{R})$, puisque N est inversible on peut considérer N^{-1} et il vient

$$(MN^{-1})^{\mathrm{T}} MN^{-1} = (N^{-1})^{\mathrm{T}} M^{\mathrm{T}} M N^{-1} = (N^{\mathrm{T}})^{-1} N^{-1} = (NN^{\mathrm{T}})^{-1} = I_n$$

puisque la transposition et le passage à l'inverse commutent, et l'inverse à droite est aussi l'inverse à gauche. On en déduit $MN^{-1} \in \mathscr{O}_n(\mathbf{R})$ et donc

$\boxed{\mathscr{O}_n(\mathbf{R}) \text{ est un sous-groupe de } \mathrm{GL}_n(\mathbf{R}).}$

(b) On munit $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ du produit scalaire canonique donné par $\langle A \,|\, B\rangle = \mathrm{tr}(A^{\mathrm{T}}B)$. On remarque que $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ est de dimension finie et donc, daprès le théorème de Heine-Borel, $\mathscr{O}_n(\mathbf{R})$ est compact si et seulement s'il est fermé et borné. Par définition et puisque $\mathrm{tr}(I_n) = M$, $\mathscr{O}_n(\mathbf{R})$ est inclus dans la boule de centre 0 et de rayon n, donc est en particulier borné. Le produit étant bilinéaire en dimension finie, il est continu, tout comme la transposition qui est linéaire. Il en résulte que l'application $M \mapsto M^{\mathrm{T}}M$ est continue sur $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ et donc que $\mathscr{O}_n(\mathbf{R})$ est fermé en tant qu'image réciproque du singleton (fermé) $\{I_n\}$ par cette application continue. Il en résulte que $\boxed{\mathscr{O}_n(\mathbf{R}) \text{ est compact.}}$

2. Le sens direct est immédiat par multiplicativité du déterminant puisque, pour x réel et U orthogonale, $\det(xI_n - UMU^{-1}) = \det(U(xI_n - M)U^{-1}) = \det(xI_n - M)$.

Réciproquement, d'après le théorème spectral, M et N sont orthosemblables à une matrice diagonale dont la diagonale est leur spectre (compté avec multiplicité), i.e. les racines de leur polynôme caractéristique comptées avec multiplicité. On remarque que, puisque $\mathscr{O}_n(\mathbf{R})$ est un groupe, la relation d'orthosimilarité est une relation d'équivalence. Or, quitte à conjuguer par une matrice de permutation, qui est orthogonale, M et N sont donc orthosemblables à une même matrice diagonale $\Delta(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, avec $\mathrm{Sp}(M) = \mathrm{Sp}(N) = (\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n)$. Elles sont donc orthosemblables et ainsi il existe U dans $\mathscr{O}_n(\mathbf{R})$ tel que $\boxed{N = UMU^{-1} \text{ si et seulement si } \chi_M = \chi_N.}$

3. Par définition, pour k entier, si on a $x \leq \mu_k$, alors puisque $\mu_k \leq \lambda_k$, il vient $x \leq \lambda_k$. Il en résulte $i \geq j$. On a également $\mu_{k+1} \geq \lambda_{k+2}$ et donc si $x > \mu_{k+1}$, on a aussi $x > \lambda_{k+2}$. Il en résulte $i \leq j+1$. D'où $\boxed{j \leq i \leq j+1.}$

Les deux cas correspondent aux deux possibilités de placement de x par rapport à μ_i. On a soit $\lambda_i \geq \mu_i \geq x > \lambda_{i+1}$, soit $\lambda_i \geq x > \mu_i \geq \lambda_{i+1}$ (avec la convention $\lambda_0 = \mu_0 = +\infty$ et $\lambda_{n+1} = \mu_n = -\infty$). On a toujours $\lambda'_k = \lambda_k$ si $k \leq i$, $\lambda'_{i+1} = x$ et $\lambda'_{k+1} = \lambda_k$ si $k > i$. Dans le premier cas on a $\mu'_k = \mu_k$ pour $k \leq i$, $\mu'_{i+1} = x$ et $\mu'_{k+1} = \mu_k$ si $k > i$, tandis que dans le second on a $\mu'_k = \mu_k$ pour $k < i$, $\mu'_i = x$ et $\mu'_{k+1} = \mu_k$ si $k \geq i$. D'où, dans le premier cas,

$$\lambda'_1 \geq \mu'_1 \geq \cdots \lambda'_i \geq \mu'_i \geq x = \lambda'_{i+1} = \mu'_{i+1} \geq \cdots \geq \lambda'_{n+1} \geq \mu'_{n+1} \geq \lambda'_{n+2}$$

et, dans le second cas, $\lambda'_1 \geq \mu'_1 \geq \cdots \lambda'_i \geq x = \mu'_i = \lambda'_{i+1} > \mu'_{i+1} \geq \cdots \geq \lambda'_{n+1} \geq \mu'_{n+1} \geq \lambda'_{n+2}$. Par conséquent $\boxed{\widehat{\lambda}' \text{ et } \widehat{\mu}' \text{ sont enlacés.}}$

PARTIE I

4.(a) Soit P dans $\mathbf{R}_n[X]$. Puisque Q n'est pas nul, on peut effectuer la division euclidienne de P par Q. On dispose donc de A et B dans $\mathbf{R}[X]$ tels que $P = AQ + B$ avec B de degré strictement inférieur à n. Il résulte de $AQ = P - B \in \mathbf{R}_n[X]$ que A est un scalaire puisque Q est de degré n. On peut remarquer au passage $A = a_n$ où a_n désigne le coefficient de degré n de P (éventuellement nul). Par ailleurs le polynôme

$$B - \sum_{j=1}^{n} \frac{B(\mu_j)}{P_j(\mu_j)} P_j$$

est bien défini car les μ_j sont tous distincts et donc $P_j(\mu_j) \neq 0$, et il s'annule en tous les μ_j par construction car $P_j(\mu_k) = P_j(\mu_j)\delta_{jk}$. Comme il est de degré strictement inférieur à n, on en déduit qu'il s'annule, d'après le théorème de D'ALEMBERT-GAUSS. On en déduit, en remarquant $P(\mu_j) = B(\mu_j)$,

$$P = a_n Q_n + \sum_{j=1}^{n} \frac{P(\mu_j)}{P_j(\mu_j)} P_j$$

et donc la famille $(Q, P_1, P_2, \ldots, P_n)$ est une famille génératrice de $\mathbf{R}_n[X]$. Cet espace étant de dimension $n+1$, par cardinalité on en déduit que $\boxed{(Q, P_1, P_2, \ldots, P_n) \text{ en est une base.}}$

(b) On a

$$P_j(\mu_j) = \prod_{1 \leq i < j} (\mu_j - \mu_i) \times \prod_{j < i \leq n} (\mu_j - \mu_i) = (-1)^{j-1} \prod_{1 \leq i < j} (\mu_i - \mu_j) \times \prod_{j < i \leq n} (\mu_j - \mu_i)$$

et donc, les termes apparaissant dans les produits du dernier membre étant tous strictement positifs par hypothèse sur $\widehat{\mu}$, on a $\boxed{(-1)^{j-1} P_j(\mu_j) > 0.}$

5.(a) Puisque P est unitaire de degré $n+1$ et Q unitaire de degré n, $P - XQ$ est de degré au plus n. Puisque $(Q, P_1, P_2, \ldots, P_n)$ en est une base, on en déduit qu'il existe un

$$\boxed{\text{unique } (a, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \text{ dans } \mathbf{R}^{n+1} \text{ tel que } P = (X-a)Q - \sum_{j=1}^{n} \alpha_j P_j.}$$

(b) Par construction on a, pour $1 \leq j \leq n$, $P(\mu_j) = -\alpha_j P_j(\mu_j)$ et donc, puisque α_j est strictement positif, $(-1)^j P(\mu_j) > 0$ d'après la question 4b. Il résulte du théorème de BOLZANO (dit des valeurs intermédiaires) que P admet une racine dans chaque intervalle $]\mu_{j+1}; \mu_j[$ pour $1 \leq j < n$. De plus P est unitaire de degré $n+1$ donc de limite $+\infty$ en $+\infty$ et de limite $(-1)^{n+1}\infty$ en $-\infty$. Comme $P(\mu_1) < 0$ et $(-1)^{n+1} P(\mu_n) < 0$, le même argument donne l'existence d'une racine de P dans les intervalles $]-\infty; \mu_n[$ et $]\mu_1; +\infty[$. On en déduit que P admet au moins $n+1$ racines réelles distinctes, donc exactement $n+1$ puisqu'il est de degré au plus $n+1$, i.e. $\boxed{P \text{ a } n+1 \text{ racines réelles distinctes } \lambda_1 > \cdots > \lambda_{n+1}.}$ De plus on a déjà remarqué qu'on a $\lambda_1 > \mu_1 > \lambda_2 > \cdots > \lambda_n > \mu_n > \lambda_{n+1}$ et donc $\boxed{\widehat{\lambda} = (\lambda_1 > \cdots > \lambda_{n+1}) \text{ et } \widehat{\mu} \text{ sont strictement enlacés.}}$

(c) Par construction on a, pour $1 \leq j \leq n$, $P(\mu_j) = -\alpha_j P_j(\mu_j)$ et donc $(-1)^j P(\mu_j) = (-1)^{j-1} P_j(\mu_j) \alpha_j$. Or on a par hypothèse $P(\mu_j) = \prod_{k=1}^{n+1} (\mu_j - \lambda_k)$ et donc $(-1)^j P(\mu_j) = \prod_{k \leq j} (\lambda_k - \mu_j) \prod_{k > j} (\mu_j - \lambda_k)$, ce qui montre que cette quantité est strictement positive puisque $\widehat{\lambda}$ et $\widehat{\mu}$ sont strictement enlacés. La question 4b permet de conclure que, pour tout j dans $[\![1; n]\!]$, $\boxed{\alpha_j > 0.}$

6. Puisque Q est scindé, il en va de même de $Q \wedge Q'$ car c'en est un diviseur. Comme on a affaire à un polynôme unitaire, il vient $Q \wedge Q' = \prod_{k=1}^{n} (X - \mu_k)^{\alpha_k}$ pour certains entiers naturels (α_k). Si μ_k est racine simple de Q, il n'est pas racine de Q' et donc $\alpha_k = 0 = m_k - 1$. Si μ_k est racine multiple

de Q, il est racine de multiplicité exactement $m_k - 1$ de Q' et donc $\alpha_k = m_k - 1$. Par conséquent $\boxed{Q \wedge Q' = \prod_{k=1}^{n} (X - \mu_k)^{m_k - 1}.}$

7.(a) Puisque $P = (X-a)Q - \sum_{j=1}^{n} \alpha_j P_j$ représente la division euclidienne de P par Q, on a $P \wedge Q = \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j P_j\right) \wedge Q$. De plus pour $1 \leq j \leq n$, $(X-\mu_j)^{m_j}$ divise tous les P_k pour $k \neq j$, $(X-\mu_j)^{m_j - 1}$ divise P_j et $(X-\mu_j)^{m_j}$ divise $\alpha_j P_j$ si et seulement si $\alpha_j = 0$. Comme précédemment, puisque Q est scindé, on en déduit $\boxed{P \wedge Q = \prod_{j \in J} (X-\mu_j)^{m_j} \prod_{j \notin J} (X-\mu_j)^{m_j - 1}.}$

(b) On pose $P_1 = \dfrac{P}{P \wedge Q}$, $Q_1 = \dfrac{Q}{Q \wedge P}$, i.e. $Q_1 = \prod_{j \notin J} (X-\mu_j)$ et pour $j \notin J$, $\tilde{P}_j = \dfrac{Q_1}{X - \mu_j}$. En divisant la relation de définition de P par $P \wedge Q$, il vient $P_1 = (X-a)Q_1 - \sum_{j \notin J} \alpha_j \tilde{P}_j$. Il résulte alors de la question 5b que P_1 est simplement scindé. Comme $P \wedge Q$ est scindé, on en conclut que $\boxed{\text{les racines de } P \text{ sont toutes réelles.}}$

PARTIE II

8. On vérifie directement que $\boxed{U = A^{-1}B \text{ et } V = D - CA^{-1}B \text{ conviennent.}}$ Le déterminant étant multiplicatif et celui d'une matrice triangulaire par blocs étant le produit des déterminants de ses blocs diagonaux, on a $\det(M) = \det(A)\det(V)$, i.e. $\boxed{\det(M) = \det(A)\det(D - CA^{-1}B).}$

9.(a) Le théorème spectral permet de disposer de P dans $\mathscr{O}_n(\mathbf{R})$ tel que $PAP^{\mathrm{T}} = \Delta(\mu_1, \ldots, \mu_n)$. On pose alors $U = \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $z = Py$. Il vient $U^{\mathrm{T}}U = \begin{pmatrix} P^{\mathrm{T}}P & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_{n+1}$, donc $\boxed{U \in \mathscr{O}_{n+1}(\mathbf{R})}$ et $UMU^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} UAP^{\mathrm{T}} & Py \\ y^{\mathrm{T}}P^{\mathrm{T}} & a \end{pmatrix}$, i.e. $\boxed{UMU^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} \Delta(\mu_1, \ldots, \mu_n) & z \\ z^{\mathrm{T}} & a \end{pmatrix}.}$

(b) Le polynôme caractéristique étant invariant par conjugaison, en notant $N = UMU^{\mathrm{T}}$, on a $\chi_M = \chi_N$. On considère $XI_{n+1} - N$ comme matrice dans $\mathscr{M}_{n+1}(\mathbf{R}(X))$. Le déterminant de son bloc supérieur gauche est alors Q_0 et comme Q_0 n'est pas nul, il est inversible dans $\mathbf{R}(X)$. On peut donc appliquer la question 8 et obtenir $\chi_N = Q_0((X-a) - z^{\mathrm{T}}\Delta((X-\mu_1)^{-1}, \ldots, (X-\mu_n)^{-1})z)$. En notant $z = (z_j)$ et en posant $\alpha_j = z_j^2$, on obtient $\boxed{\alpha_j \geq 0 \text{ et } \chi_M = (X-a)Q_0 - \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \frac{Q_0}{X - \mu_j}.}$

(c) On note $(\mu'_k)_{1 \leq k \leq r}$ les racines de Q_0, sans multiplicité, et α'_k la somme des α_j pour j tel que $\mu_j = \mu'_k$. Alors $\alpha'_k \geq 0$ et $\chi_M = (X-a)Q_0 - \sum_{k=1}^{r} \alpha'_k \dfrac{Q_0}{X - \mu'_k}$. Comme $Q_0 = \chi_A$ par construction, il résulte alors de l'assertion admise en fin de partie I que $\boxed{\mathrm{Sp}(M) \text{ et } \mathrm{Sp}(A) \text{ sont enlacés.}}$

10. Soit U dans $\mathscr{O}_{n+1}(\mathbf{R})$, on a $\mathrm{Sp}(UMU^{-1}) = \mathrm{Sp}(M)$ et donc, d'après la question précédente, $\mathrm{Sp}(M)$ et $\mathrm{Sp}\left((UMU^{-1})_{\leq n}\right)$ sont enlacés. En particulier ce dernier est inclus dans le compact $[\,\lambda_{n+1}; \lambda_1\,]^n$. Ainsi $\mathcal{C}_M$ est une partie de ce compact. L'assertion est donc équivalente au caractère fermé de $\mathcal{C}_M$. Soit $(\widehat{\lambda}^{(k)})$

une suite à valeurs dans $\mathcal{C}_M$ et convergeant vers un certain $\widehat{\lambda}$ dans $\mathbf{R}^n$. On note $\widehat{\lambda}^{(k)} = (\lambda_1^{(k)} \geq \cdots \lambda_n^{(k)})$. Par passage à la limite dans les inéquations $\lambda_j^{(k)} \geq \lambda_{j+1}^{(k)}$, pour $1 \leq j < n$, on en déduit que $\widehat{\lambda}$ est ordonné : $\widehat{\lambda} = (\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n)$. Par ailleurs, par définition, on dispose de (U_k) une suite à valeurs dans $\mathscr{O}_n(\mathbf{R})$ telle que $\widehat{\lambda}_k = \mathrm{Sp}\left((U_k M U_k^{\mathrm{T}})_{\leq n}\right)$. Par compacité de $\mathscr{O}_n(\mathbf{R})$, quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer (U_k) convergente, disons vers U. Par continuité des applications suivantes : le produit matriciel, car bilinéaire en dimension finie ; la transposition, car linéaire en dimension finie ; l'application qui à une matrice T associe $T_{\leq n}$ car linéaire en dimension finie ; l'application qui à une matrice T associe son polynôme caractéristique car polynomiale ; on en déduit que $\prod_{j=1}^{n}(X-\lambda_j^{(k)})$ converge vers le polynôme caractéristique de $(UMU^{\mathrm{T}})_{\leq n}$. Puisque l'application $(a_1, \ldots, a_n) \mapsto \prod_{j=1}^{n}(X-a_j)$ est également continue, car polynomiale, on en déduit par unicité de la limite que le polynôme caractéristique de $(UMU^{\mathrm{T}})_{\leq n}$ est égal à $\prod_{j=1}^{n}(X-\lambda_j)$ et donc que $\widehat{\lambda} = \mathrm{Sp}\left((UMU^{-1})_{\leq n}\right)$. Ceci permet de conclure qu'on a affaire à une partie fermée, incluse dans un compacte, donc compacte : $\boxed{\mathcal{C}_M \text{ est une partie compacte de } \mathbf{R}^n.}$

11.(a) On pose $P = \chi_M$ et $Q = \prod_{j=1}^{n}(X-\mu_j)$. Puisque $\mathrm{Sp}(M)$ et $\widehat{\mu}$ sont strictement enlacés, la question 5c permet de disposer de réels strictement positifs $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ et d'un réel a tels que $P = (X - a)Q - \sum_{j=1}^{n} \alpha_j P_j$, en reprenant les notations de cette question. On pose alors $z = (\sqrt{\alpha_j})_{1\leq j\leq n}$ et $N = \begin{pmatrix} \Delta(\mu_1, \ldots, \mu_n) & z \\ z^{\mathrm{T}} & a \end{pmatrix}$. Les calculs effectués en question 9b montrent qu'on a $\chi_N = P$ et donc, d'après la question 2, N est orthosemblable à M. Comme $N_{\leq n} = \Delta(\mu_1, \ldots, \mu_n)$, $\boxed{\widehat{\mu} \text{ appartient à } \mathcal{C}_M.}$

(b) La question précédente montre $\prod_{j=1}^{n} \,]\lambda_j ; \lambda_{j+1}[\, \subset \mathcal{C}_M$. Comme $\mathcal{C}_M$ est fermé, il contient l'adhérence du produit d'intervalles ouverts précédents. Par définition de la topologie produit, cette adhérence est le produit des adhérences, i.e. le produit des intervalles fermés, ce qui est exactement la définition des n-uplets ordonnés enlacés avec $\mathrm{Sp}(M)$. La réciproque provenant des arguments de la question 10, i.e. de la question 9c, on en conclut $\boxed{\mathcal{C}_M = \{\widehat{\mu} \,|\, \mathrm{Sp}(M) \text{ et } \widehat{\mu} \text{ sont enlacés}\}.}$

PARTIE III

12. Le théorème spectral permet de supposer $M = \Delta(\lambda_1, \lambda_2)$ puisqu'une classe d'orthosimilitude est invariante par orthosimilarité. Comme tout élément de $\mathscr{O}_2(\mathbf{R})$ peut s'écrire $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\varepsilon\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \varepsilon\cos(\theta) \end{pmatrix}$ avec $\theta \in \mathbf{R}$ et $\varepsilon \in \{\pm 1\}$, on a

$$\mathcal{D}_M = \left\{(\lambda_1\cos^2(\theta) + \lambda_2\sin^2(\theta), \lambda_1\sin^2(\theta) + \lambda_2\cos^2(\theta)) \;\middle|\; \theta \in \mathbf{R}, \varepsilon \in \{\pm 1\}\right\} .$$

Comme $\cos^2$ est une surjection de $\mathbf{R}$ sur $[0;1]$, on en déduit que $(\cos^2, \sin^2)$ est une surjection de $\mathbf{R}$ sur $\{(t, 1-t) \,|\, 0 \leq t \leq 1\}$. Il en résulte

$$\mathcal{D}_M = \{t(\lambda_1, \lambda_2) + (1-t)(\lambda_2, \lambda_1) \,|\, 0 \leq t \leq 1\} ,$$

i.e. $\boxed{\mathcal{D}_M = [(\lambda_1, \lambda_2); (\lambda_2, \lambda_1)].}$

13.(a) La trace d'une matrice diagonalisable étant égale à la somme de ses valeurs propres, par invariance de la trace par conjugaison, $\boxed{\text{pour } s = n, \text{ (3) est une égalité.}}$

(b) On a $\displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} m_{ii} = \mathrm{tr}(M_{\leq n-1})$. Comme $M_{\leq n-1}$ est symétrique réelle donc diagonalisable, $\boxed{\displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} m_{ii} \text{ est la somme des valeurs propres de } M_{\leq n-1}.}$ Il résulte de la question 9c que les spectres de M et $M_{\leq n-1}$ sont entrelacés et donc, en sommant les inégalités de définition de l'entrelacement, $\boxed{\text{l'inégalité (3) lorsque } s = n-1.}$

(c) Pour n dans $\mathbf{N}^*$ on note $(\mathbf{H}_n)$ le prédicat : $\forall M \in \mathscr{S}_n(\mathbf{R}), \forall s \in [\![1; n]\!]\ \displaystyle\sum_{i=1}^{s} m_{ii} \leq \sum_{i=1}^{s} \lambda_i$, où $\mathrm{Sp}(M) = \widehat{\lambda}$. Le prédicat est tautologiquement vrai pour $n = 1$. Soit n supérieur à 2 tel que $(\mathbf{H}_{n-1})$ soit vrai et M dans $\mathscr{S}_n(\mathbf{R})$. On note $\mathrm{Sp}(M_{\leq n-1}) = \widehat{\mu}$. Pour s dans $[\![1; n-1]\!]$, on a $(M_{\leq n-1})_{\leq s} = M_{\leq s}$ et il vient $\displaystyle\sum_{i=1}^{s} m_{ii} \leq \sum_{i=1}^{s} \mu_i$. Il résulte de la question 9c que les spectres de M et $M_{\leq n-1}$ sont entrelacés et donc $\displaystyle\sum_{i=1}^{s} m_{ii} \leq \sum_{i=1}^{s} \lambda_i$. Le cas $s = n$ étant une égalité, d'après la question 13a, on en déduit $(\mathbf{H}_n)$.
Par principe de récurrence $\boxed{\text{l'inégalité (3) pour tout } s \text{ dans } [\![1; n]\!].}$

PARTIE IV

14.(a) Par définition on a $s_1(\omega_1) = \omega_1$ et $s_1(\omega_2) = \frac{1}{2}(e_1 - \sqrt{3}e_2) = \omega_1 - \omega_2$ et donc $\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(s_1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.}$

(b) Par définition on a $s_2(\omega_2) = \omega_2$ et, puisque ω_2 est unitaire, $s_2(\omega_1) = 2\langle \omega_1 \,|\, \omega_2 \rangle \omega_2 - \omega_1$, et donc $\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(s_2) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.}$

15.(a) Par définition φ est la restriction à H de l'application linéaire envoyant la base canonique de $\mathbf{R}^3$ sur la famille $(\omega_1, \omega_2 - \omega_1, -\omega_2)$, dont le noyau est formé des triplets (x, y, z) tels que $x = y = z$. Puisque H est par définition l'orthogonal de ce noyau, en particulier c'en est un supplémentaire et le théorème du rang montre que $\boxed{\varphi \text{ est un isomorphisme linéaire.}}$ Par définition de H^+ son image est incluse dans le cône formé des combinaisons linéaires à coefficients positifs de ω_1 et ω_2. Puisque φ est un isomorphisme la réciproque est vraie et donc $\boxed{\varphi(H^+) = \mathbf{R}_+\omega_1 + \mathbf{R}_+\omega_2.}$

(b) Soit (m_1, m_2, m_3) dans H, on a

$$s_1 \circ \varphi(m_1, m_2, m_3) = (m_1 - m_2)\omega_1 + (m_2 - m_3)(\omega_1 - \omega_2) = (m_1 - m_3)\omega_1 + (m_3 - m_2)\omega_2$$

i.e. $\boxed{s_1 \circ \varphi(m_1, m_2, m_3) = \varphi(m_1, m_3, m_2).}$ On a également

$$s_2 \circ \varphi(m_1, m_2, m_3) = (m_1 - m_2)(\omega_2 - \omega_1) + (m_2 - m_3)\omega_2 = (m_2 - m_1)\omega_1 + (m_1 - m_3)\omega_2$$

i.e. $\boxed{s_2 \circ \varphi(m_1, m_2, m_3) = \varphi(m_2, m_1, m_3).}$

(c) Soit a et b dans $\mathbf{R}_+$. On a $\varphi^{-1}(a\omega_1+b\omega_2)=\frac{1}{3}(2a+b,b-a,-a-2b)$ et donc $a\omega_1+b\omega_2$ appartient à $\varphi(\mathcal{Q}_{\widehat{\lambda}})$ si et seulement si $2a+b\leq 3\lambda_1$ et $a+2b\leq 3(\lambda_1+\lambda_2)$. Ainsi $\varphi(\mathcal{Q}_{\widehat{\lambda}})$ est l'intersection des quatre demi-plans d'inéquations $a\geq 0$, $b\geq 0$, $2a+b\leq 3\lambda_1$ et $a+2b\leq 3(\lambda_1+\lambda_2)$. C'est donc l'intersection du triangle de sommets $(0,0)$, $(0,3\lambda_1)$ et $(\frac{3}{2}\lambda_1,0)$, et du triangle de sommets $(0,0)$, $(0,\frac{3}{2}(\lambda_1+\lambda_2))$ et $(3(\lambda_1+\lambda_2),0)$. Il s'agit de deux triangles dont deux côtés sont portés par les axes de coordonnées. Les deux autres côtés sont portés respectivement par les droites d'équations $2a+b=3\lambda_1$ et $a+2b=3(\lambda_1+\lambda_2)$. Ces deux droites se coupent en $(\lambda_1-\lambda_2,\lambda_2-\lambda_3)$, donc en un point de $\varphi(H^+)$. On a par ailleurs $\frac{3}{2}(\lambda_1+\lambda_2)\leq 3\lambda_1$ et $\frac{3}{2}\lambda_1=-\frac{3}{2}(\lambda_2+\lambda_3)\leq -3\lambda_3=3(\lambda_1+\lambda_2)$, ce qui permet de conclure que $\boxed{\varphi(\mathcal{Q}_{\widehat{\lambda}})\text{ est un quadrilatère de sommets }(0,0),\ (\tfrac{3}{2}\lambda_1,0),\ (\lambda_1-\lambda_2,\lambda_2-\lambda_3)\text{ et }(0,\tfrac{3}{2}(\lambda_1+\lambda_2)).}$

16.(a) La classe d'orthosimilitude d'une matrice (a_{ij}) contient la matrice $(a_{\sigma(i),\sigma(j)})$ puisque une permutation de la base canonique est une base orthogonale. Ainsi

$$\boxed{(m_1,m_2,m_3)\in\mathcal{D}_M \iff (m_{\sigma(1)},m_{\sigma(2)},m_{\sigma(3)})\in\mathcal{D}_M.}$$

(b) Soit (m_1,m_2,m_3) dans $H^+\cap\mathcal{D}_M$ et U dans $\mathscr{O}_3(\mathbf{R})$ tel que $\mathrm{Diag}_3(UMU^{\mathrm{T}})=(m_1,m_2,m_3)$. Il résulte de la question 13 qu'on a $m_1\leq\lambda_1$ et $m_1+m_2\leq\lambda_1+\lambda_2$ i.e. $\boxed{H^+\cap\mathcal{D}_M\subset\mathcal{Q}_{\widehat{\lambda}}.}$

(c) Pour P dans $\mathscr{O}_2(\mathbf{R})$ on note $N_P=\left(\begin{smallmatrix}P&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)N\left(\begin{smallmatrix}P^{\mathrm{T}}&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)$. La classe d'orthosimilitude d'une matrice N contient les matrices N_P puisque $\left(\begin{smallmatrix}P&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)$ appartient à $\mathscr{O}_3(\mathbf{R})$. Si $\mathrm{Diag}_3(N)=(m_1,m_2,m_3)$, alors d'après la question 12, $\mathrm{Diag}_3(N_P)$ décrit le segment joignant (m_1,m_2,m_3) et (m_2,m_1,m_3). Par conséquent $\boxed{\text{le segment de sommets }(m_1,m_2,m_3)\text{ et }(m_2,m_1,m_3)\text{ est inclus dans }\mathcal{D}_M.}$ En considérant $N'_P=\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&P\end{smallmatrix}\right)N\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&P^{\mathrm{T}}\end{smallmatrix}\right)$, pour P dans $\mathscr{O}_2(\mathbf{R})$, on a $\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&P\end{smallmatrix}\right)\in\mathscr{O}_3(\mathbf{R})$ et $\mathrm{Diag}_3(N'_P)$ décrit le segment joignant (m_1,m_2,m_3) et (m_1,m_3,m_2). Par conséquent

$$\boxed{\text{le segment de sommets }(m_1,m_2,m_3)\text{ et }(m_1,m_3,m_2)\text{ est inclus dans }\mathcal{D}_M.}$$

(d) Soit (m_1,m_2,m_3) dans $\mathcal{Q}_{\widehat{\lambda}}$. On a donc $\lambda_3\leq m_3\leq m_2\leq m_1\leq\lambda_1$. On construit $\widehat{\mu}$ enlacé avec $\widehat{\lambda}$ vérifiant les propriétés suivantes, en notant $\widehat{\mu}=(\mu_1\geq\mu_2)$: il existe j dans $[\![1;2]\!]$ tel que $\mu_2\leq m_{j+1}\leq m_j\leq\mu_1$ et $\mu_1+\mu_2=m_j+m_{j+1}$. Selon que λ_2 appartient à l'intervalle $[\lambda_3;m_3[$, $[m_3;m_2[$, $[m_2;m_1]$ ou $]m_1;\lambda_1]$, on prend respectivement pour $\widehat{\mu}$: $(\lambda_1+\lambda_2-m_1\geq\lambda_3)$ avec $j=2$, $(m_2\geq m_3)$, $(m_1\geq m_2)$ ou $(\lambda_1\geq\lambda_2+\lambda_3-m_3)$ avec $j=1$. Dans les cas extrêmes on vérifie : $\lambda_1+\lambda_2-m_1\geq\lambda_2\geq\lambda_3$ et $\lambda_1+\lambda_2-m_1+\lambda_3=m_2+m_3$, d'une part, et $\lambda_1\geq\lambda_2\geq\lambda_2+\lambda_3-m_3$ et $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3-m_3=m_1+m_2$. D'après la question 11b on dispose donc de U dans $\mathscr{O}_3(\mathbf{R})$ tel que $\mathrm{Sp}((UMU^{\mathrm{T}})_{\leq 2})=\widehat{\mu}$. Donc, d'après la question 12 on dispose de P dans $\mathscr{O}_2(\mathbf{R})$ tel que $\mathrm{Diag}_2(P(UMU^{\mathrm{T}})_{\leq 2}P^{\mathrm{T}})=(m_j,m_{j+1})$. Puisque la conjugaison préserve la nullité de la trace, en posant $V=\begin{pmatrix}P&0\\0&1\end{pmatrix}U$, on a $V\in\mathscr{O}_3(\mathbf{R})$ et $\mathrm{Diag}_3(VMV^{\mathrm{T}})=(m_j,m_{j+1},m_{5-2j})$, i.e. une permutation de (m_1,m_2,m_3) appartient à $\mathcal{D}_M$. Il résulte donc de la question 16a que $\boxed{\mathcal{D}_M\text{ contient }\mathcal{Q}_{\widehat{\lambda}}.}$

(e) Il résulte des questions 16b et 16d qu'on a $H^+\cap\mathcal{D}_M=\mathcal{Q}_{\widehat{\lambda}}$. La question 16a entraîne que $\mathcal{D}_M$ est la réunion des images de $\mathcal{Q}_{\widehat{\lambda}}$ par permutation des coordonnées. Comme le groupe S_3 est engendré par la transposition (23) et la transposition (12), il résulte alors de la question 15b que $\varphi(\mathcal{D}_M)$ est la réunion des images successives de $\varphi(\mathcal{Q}_{\widehat{\lambda}})$ par s_1 et s_2. Comme deux côtés du quadrilatère $\varphi(\mathcal{Q}_{\widehat{\lambda}})$ sont parallèles aux axes de coordonnées et les deux autres leurs sont orthogonaux, on en conclut que

$$\boxed{\begin{array}{l}\varphi(\mathcal{D}_M)\text{ est l'hexagone de sommets }(\lambda_1-\lambda_2,\lambda_2-\lambda_3),\ (\lambda_1-\lambda_3,\lambda_3-\lambda_2),\ (\lambda_2-\lambda_3,\lambda_3-\lambda_1),\\ (\lambda_3-\lambda_2,\lambda_2-\lambda_1),\ (\lambda_3-\lambda_1,\lambda_1-\lambda_2)\text{ et }(\lambda_2-\lambda_1,\lambda_1-\lambda_3).\end{array}}$$