Composition A
X-ENS 2015 - MP

Pour n supérieur à 1, l'espace des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n est noté $\mathbf{R}_n[X]$. Étant donnés deux polynômes non nuls P et Q à coefficients réels, leur plus grand commun diviseur (pgcd) unitaire est noté $P \wedge Q$.
Si r est un second entier supérieur à 1, $\mathscr{M}_{r,n}(\mathbf{R})$ désigne l'espace vectoriel des matrices à r lignes et n colonnes à coefficients réels. La notation $M = (m_{ij})$ signifie que le coefficient à la ligne i et colonne j de la matrice M est m_{ij}. On note $\mathscr{M}_n(\mathbf{R}) = \mathscr{M}_{n,n}(\mathbf{R})$ et I_n la matrice identité de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$. Pour M dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$, on note χ_M son polynôme caractéristique et ${}^{\mathrm{t}}M$ sa transposée. On note $\mathscr{S}_n(\mathbf{R})$ (respectivement $\mathscr{O}_n(\mathbf{R})$) l'ensemble des matrices symétriques réelles (resp. orthogonales) de taille n. Étant donné un n-uplet $(a_1, \ldots, a_n)$ de réels $\Delta(a_1, \ldots, a_n)$ désigne la matrice diagonale associée :

$$\Delta(a_1, \ldots, a_n) = \begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{pmatrix} .$$

Si M appartient à $\mathscr{S}_n(\mathbf{R})$, son spectre est réel. On convient de ranger ses valeurs propres (comptées avec leurs ordres de multiplicité) dans l'ordre *décroissant*. On note alors $\mathrm{Sp}(M) = (\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n)$ et $\mathrm{Sp}(M)$ est donc un n-uplet *ordonné*.
Un $n+1$-uplet $\widehat{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1}) \in \mathbf{R}^{n+1}$ et un n-uplet $\widehat{\mu} = (\mu_1, \ldots, \mu_n) \in \mathbf{R}^n$, ordonnés, sont dit *enlacés* si $\lambda_j \geq \mu_j \geq \lambda_{j+1}$ pour tout j dans $[\![1;n]\!]$. Ils sont dits *strictement enlacés* si $\lambda_j > \mu_j > \lambda_{j+1}$ pour tout j. Par exemple, $(4,3,2,1)$ et $(\pi, e, \sqrt{2})$ sont strictement enlacés.

Questions préliminaires

1(a) Montrer que $\mathscr{O}_n(\mathbf{R})$ est un sous-groupe du groupe $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ des matrices inversibles.

(b) Montrer que $\mathscr{O}_n(\mathbf{R})$ est une partie compacte de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$

2. Soit M et N dans $\mathscr{S}_n(\mathbf{R})$. Montrer qu'il existe U dans $\mathscr{O}_n(\mathbf{R})$ tel que $N = UMU^{-1}$ si et seulement si $\chi_M = \chi_N$.

3. Soit $\widehat{\lambda} = (\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_{n+1}) \in \mathbf{R}^{n+1}$ et $\widehat{\mu} = (\mu_1 \geq \cdots \geq \mu_n) \in \mathbf{R}^n$. Soit x un réel. Formons

$$\widehat{\lambda}' = (\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_i \geq x > \lambda_{i+1} \geq \cdots \geq \lambda_{n+1})$$

en choisissant l'entier i dans $[\![0;n+1]\!]$ convenablement. Si $x > \lambda_i$ on a donc $i = 0$, tandis que si $x \leq \lambda_{n+1}$, on a $i = n+1$. On forme de même

$$\widehat{\mu}' = (\mu_1 \geq \cdots \geq \mu_j \geq x > \mu_{j+1} \geq \cdots \geq \mu_n) .$$

On suppose que $\widehat{\lambda}$ et $\widehat{\mu}$ sont enlacés. Montrer $j \leq i \leq j+1$. En examinant chacun des deux cas $j = i$ ou $j = i-1$, montrer que $\widehat{\lambda}'$ et $\widehat{\mu}'$ sont enlacés.

PARTIE I

Soit $\widehat{\mu} = (\mu_1 > \cdots > \mu_n) \in \mathbf{R}^n$. On se donne des entiers m_k supérieurs ou égaux à 1 pour k dans $[\![1;n]\!]$. On pose $Q = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} (X - \mu_k)^{m_k}$ et pour j dans $[\![1;n]\!]$, $P_j = \dfrac{Q}{X - \mu_j}$.

4. On suppose dans cette question et la suivante que tous les m_k sont égaux à 1.
   (a) Montrer que la famille $(Q, P_1, P_2, \dots, P_n)$ est une base de $\mathbf{R}_n[X]$.
   (b) Soit j dans $[\![1;n]\!]$. Vérifier $(-1)^{j-1}P_j(\mu_j) > 0$.
5. Soit P dans $\mathbf{R}[X]$ un polynôme unitaire de degré $n+1$.
   (a) Montrer qu'il existe un unique vecteur $(a, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ dans $\mathbf{R}^{n+1}$ tel que
$$P = (X-a)Q - \sum_{j=1}^{n} \alpha_j P_j \ . \tag{1}$$
   (b) On suppose que les nombres réels $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ sont tous strictement positifs. Montrer que P a $n+1$ racines réelles distinctes $\lambda_1 > \cdots > \lambda_{n+1}$ et que $\widehat{\lambda} = (\lambda_1 > \cdots > \lambda_{n+1})$ et $\widehat{\mu}$ sont strictement enlacés.
   (c) Réciproquement on suppose que P a $n+1$ racines réelles distinctes $\lambda_1 > \cdots > \lambda_{n+1}$ et que $\widehat{\lambda} = (\lambda_1 > \cdots > \lambda_{n+1})$ et $\widehat{\mu}$ sont strictement enlacés. Montrer que, pour tout j dans $[\![1;n]\!]$, $\alpha_j > 0$.
6. On revient au cas général, i.e. m_k quelconques. Montrer $Q \wedge Q' = \displaystyle\prod_{k=1}^{n}(X-\mu_k)^{m_k-1}$.
7. Soit $(a, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ dans $\mathbf{R}^{n+1}$ et soit P dans $\mathbf{R}[X]$ défini par la formule
$$P = (X-a)Q - \sum_{j=1}^{n} \alpha_j P_j \ .$$
   (a) Donner une expression de $P \wedge Q$ en fonction des μ_j, des m_j et de l'ensemble J des indices pour lesquels $\alpha_j = 0$.
   (b) On suppose que les nombres $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ sont positifs ou nuls.
   Montrer que les racines de P sont toutes réelles.
   On admettra par la suite que, dans ce cas le plus général, le $(N+1)$-uplet des racines de P et le N-uplet des racines de Q sont enlacés.

PARTIE II

8. Soit r et s deux entiers naturels non nuls. Soit A dans $\mathscr{M}_r(\mathbf{R})$, B dans $\mathscr{M}_{r,s}(\mathbf{R})$, C dans $\mathscr{M}_{s,r}(\mathbf{R})$ et D dans $\mathscr{M}_s(\mathbf{R})$. On suppose de plus que A est inversible. On considère la matrice M de $\mathscr{M}_{r+s}(\mathbf{R})$ ayant la forme par blocs suivante
$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} .$$
   Trouver deux matrices U dans $\mathscr{M}_{r,s}(\mathbf{R})$ et V dans $\mathscr{M}_s(\mathbf{R})$ telles que
$$M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & I_s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_r & U \\ 0 & V \end{pmatrix}$$
   et en déduire
$$\det(M) = \det(A)\det(D - CA^{-1}B) \ .$$
   On pourra admettre par la suite que cette formule reste vraie lorsque M et ses blocs $A, \dots, D$ sont à coefficients dans le corps $\mathbf{R}(X)$ des fractions rationnelles.

9. Soit M dans $\mathscr{S}_{n+1}(\mathbf{R})$ une matrice symétrique. On écrit M sous la forme par blocs

$$M = \begin{pmatrix} A & y \\ {}^{\mathrm{t}}y & a \end{pmatrix}$$

avec a réel, y dans $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ et A dans $\mathscr{S}_n(\mathbf{R})$.

(a) Si le spectre de A est $\mathrm{Sp}(A) = (\mu_1 \geq \cdots \geq \mu_n)$, montrer qu'il existe U dans $\mathscr{O}_{n+1}(\mathbf{R})$ et z dans $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ tels que

$$UM\,{}^{\mathrm{t}}U = \begin{pmatrix} \Delta(\mu_1, \ldots, \mu_n) & z \\ {}^{\mathrm{t}}z & a \end{pmatrix} .$$

(b) En déduire qu'il existe des nombres réels positifs ou nuls α_j, pour j dans $[\![1;n]\!]$, tels que

$$\chi_M = (X-a)Q_0 - \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \frac{Q_0}{X-\mu_j} , \quad \text{où } Q_0 = \prod_{k=1}^{n} (X-\mu_k) .$$

(c) Montrer que $\mathrm{Sp}(M)$ et $\mathrm{Sp}(A)$ sont enlacés.

10. Pour $T = (t_{ij}) \in \mathscr{M}_{n+1}(\mathbf{R})$, on note $T_{\leq n}$ la matrice extraite de taille n dont les coefficients sont les t_{ij} pour $1 \leq i,j \leq n$. Soit M dans $\mathscr{S}_{n+1}(\mathbf{R})$. Montrer que l'ensemble

$$\left\{ \mathrm{Sp}\left((UMU^{-1})_{\leq n} \right) \,\middle|\, U \in \mathscr{O}_{n+1}(\mathbf{R}) \right\} ,$$

noté $\mathcal{C}_M$, est une partie compacte de $\mathbf{R}^n$.

11. On suppose de plus que les valeurs propres de M sont distinctes. On a donc $\mathrm{Sp}(M) = (\lambda_1 > \cdots > \lambda_{n+1})$.

(a) Soit $\widehat{\mu} = (\mu_1 > \cdots > \mu_n)$ tel que $\mathrm{Sp}(M)$ et $\widehat{\mu}$ soient strictement enlacés. Montrer que $\widehat{\mu}$ appartient à $\mathcal{C}_M$.

(b) Montrer

$$\mathcal{C}_M = \{ \widehat{\mu} \,|\, \mathrm{Sp}(M) \text{ et } \widehat{\mu} \text{ sont enlacés} \} . \tag{2}$$

PARTIE III

On considère l'application Diag_n de $\mathscr{S}_n(\mathbf{R})$ dans $\mathbf{R}^n$ envoyant $M = (m_{ij})$ sur $(m_{11}, m_{22}, \ldots, m_{nn})$. Soit M dans $\mathscr{S}_n(\mathbf{R})$. Dans cette partie, on se propose d'étudier l'ensemble suivant

$$\mathcal{D}_M = \left\{ \mathrm{Diag}_n(UMU^{-1}) \,\middle|\, U \in \mathscr{O}_n(\mathbf{R}) \right\} .$$

12. On étudie d'abord le cas $n = 2$. On note alors $\mathrm{Sp}(M) = (\lambda_1 \geq \lambda_2)$.
Montrer que $\mathcal{D}_M$ est le segment de $\mathbf{R}^2$ dont les extrémités sont (λ_1, λ_2) et (λ_2, λ_1).

13. Soit $M = (m_{ij})$ dans $\mathscr{S}_n(\mathbf{R})$. On note $\mathrm{Sp}(M) = (\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n) \in \mathbf{R}^n$. On se propose de démontrer que, pour tout s dans $[\![1;n]\!]$, on a :

$$\sum_{i=1}^{s} m_{ii} \leq \sum_{i=1}^{s} \lambda_i . \tag{3}$$

(a) Que pensez-vous du cas $s = n$?

(b) Exprimer $\sum_{i=1}^{n-1} m_{ii}$ au moyen des valeurs propres de la matrice $M_{\leq n-1}$ obtenue en supprimant la dernière ligne et la dernière colonne de M. En déduire l'inégalité (5) lorsque $s = n-1$.

(c) En procédant par récurrence sur n, montrer l'inégalité (5) pour tout s dans $[\![1;n]\!]$.

PARTIE IV

14. On note E l'espace vectoriel $\mathbf{R}^2$ muni du produit scalaire standard et de la base canonique $\mathcal{B} = \{e_1, e_2\}$. On définit une base $\mathcal{C} = \{\omega_1, \omega_2\}$ de E par $\omega_1 = e_1$ et $\omega_2 = \frac{1}{2}(e_1 + \sqrt{3}e_2)$.

(a) Soit s_1 la symétrie orthogonale par rapport à la droite $\mathbf{R}\omega_1$. Montrer que la matrice de s_1 dans la base $\mathcal{C}$ est $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

(b) Soit s_2 la symétrie orthogonale par rapport à la droite $\mathbf{R}\omega_2$. Montrer que la matrice de s_2 dans la base $\mathcal{C}$ est $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

15. Soit H l'ensemble des vecteurs (m_1, m_2, m_3) de $\mathbf{R}^3$ tels que $m_1 + m_2 + m_3 = 0$. On note H^+ le sous-ensemble des (m_1, m_2, m_3) de H tels que $m_1 \geq m_2 \geq m_3$. On considère l'application φ de H dans E donnée par

$$\varphi(m_1, m_2, m_3) = (m_1 - m_2)\omega_1 + (m_2 - m_3)\omega_2 \ .$$

(a) Montrer que φ est un isomorphisme linéaire. Décrire $\varphi(H^+)$.

(b) Montrer que, pour tout (m_1, m_2, m_3) dans H, on a

$$s_1 \circ \varphi(m_1, m_2, m_3) = (m_1, m_3, m_2) \quad \text{et} \quad s_2 \circ \varphi(m_1, m_2, m_3) = (m_2, m_1, m_3) \ .$$

(c) Soit $\widehat{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in H$ tel que $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3$. On note $\mathcal{Q}_{\widehat{\lambda}}$ l'ensemble des (m_1, m_2, m_3) de H^+ tels que $m_1 \leq \lambda_1$ et $m_1 + m_2 \leq \lambda_1 + \lambda_2$. Montrer que $\varphi(\mathcal{Q}_{\widehat{\lambda}})$ est un quadrilatère dont on décrira les sommets.

16. Soit M dans $\mathscr{S}_3(\mathbf{R})$ une matrice de trace nulle. On note $\mathrm{Sp}(M) = (\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3)$. On se propose de décrire $\varphi(\mathcal{D}_M)$.

(a) Soit (m_1, m_2, m_3) dans H. Soit σ une permutation de $\{1, 2, 3\}$. Montrer $(m_1, m_2, m_3) \in \mathcal{D}_M \iff (m_{\sigma(1)}, m_{\sigma(2)}, m_{\sigma(3)}) \in \mathcal{D}_M$.

(b) En utilisant la question 13, montrer que l'intersection $H^+ \cap \mathcal{D}_M$ est incluse dans $\mathcal{Q}_{\widehat{\lambda}}$.

(c) Soit (m_1, m_2, m_3) dans $\mathcal{D}_M$. Montrer que le segment de H dont les sommets sont (m_1, m_2, m_3) et (m_2, m_1, m_3) est inclus dans $\mathcal{D}_M$. On pourra utiliser la question 12.

De même, montrer que le segment de H dont les sommets sont (m_1, m_2, m_3) et (m_1, m_3, m_2) est inclus dans $\mathcal{D}_M$.

(d) Montrer que $\mathcal{D}_M$ contient $\mathcal{Q}_{\widehat{\lambda}}$.

(e) Montrer que si $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3$ alors $\varphi(\mathcal{D}_M)$ est un hexagone, dont on déterminera les sommets.

COMPOSITION A – X-ENS 2015 - MP

Questions préliminaires

1(a) Soit M dans $\mathscr{O}_n(\mathbf{R})$, on a ${}^{\mathrm{t}}MM = I_n$ et donc, par multiplicativité du déterminant et invariance de celui-ci par transposition, $\det(M)^2 = 1$ et en particulier $\det(M) \neq 0$ i.e. $\mathscr{O}_n(\mathbf{R})$ est inclus dans $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$. On a ${}^{\mathrm{t}}I_nI_n = I_n^2 = I_n$ et donc $I_n \in \mathscr{O}_n(\mathbf{R})$. Soit M et N dans $\mathscr{O}_n(\mathbf{R})$, puisque N est inversible on peut considérer N^{-1} et il vient

$$ {}^{\mathrm{t}}(MN^{-1})MN^{-1} = {}^{\mathrm{t}}(N^{-1})\, {}^{\mathrm{t}}MMN^{-1} = ({}^{\mathrm{t}}N)^{-1}N^{-1} = (N\,{}^{\mathrm{t}}N)^{-1} = I_n $$

puisque la transposition et le passage à l'inverse commutent, et l'inverse à droite est aussi l'inverse à gauche. On en déduit $MN^{-1} \in \mathscr{O}_n(\mathbf{R})$ et donc

$\boxed{\mathscr{O}_n(\mathbf{R}) \text{ est un sous-groupe de } \mathrm{GL}_n(\mathbf{R}).}$

(b) On munit $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ du produit scalaire canonique donné par $\langle A \,|\, B\rangle = \mathrm{Tr}({}^{\mathrm{t}}AB)$. On remarque que $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ est de dimension finie et donc, daprès le théorème de HEINE-BOREL, $\mathscr{O}_n(\mathbf{R})$ est compact si et seulement s'il est fermé et borné. Par définition et puisque $\mathrm{Tr}(I_n) = M$, $\mathscr{O}_n(\mathbf{R})$ est inclus dans la boule de centre 0 et de rayon n, donc est en particulier borné. Le produit étant bilinéaire en dimension finie, il est continu, tout comme la transposition qui est linéaire. Il en résulte que l'application $M \mapsto {}^{\mathrm{t}}MM$ est continue sur $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ et donc que $\mathscr{O}_n(\mathbf{R})$ est fermé en tant qu'image réciproque du singleton (fermé) $\{I_n\}$ par cette application continue. Il en résulte que $\boxed{\mathscr{O}_n(\mathbf{R}) \text{ est compact.}}$

2. Le sens direct est immédiat par multiplicativité du déterminant puisque, pour x réel et U orthogonale, $\det(xI_n - UMU^{-1}) = \det(U(xI_n - M)U^{-1}) = \det(xI_n - M)$.

Réciproquement, d'après le théorème spectral, M et N sont orthosemblables à une matrice diagonale dont la diagonale est leur spectre (compté avec multiplicité), i.e. les racines de leur polynôme caractéristique comptées avec multiplicité. On remarque que, puisque $\mathscr{O}_n(\mathbf{R})$ est un groupe, la relation d'orthosimilarité est une relation d'équivalence. Or, quitte à conjuguer par une matrice de permutation, qui est orthogonale, M et N sont donc orthosemblables à une même matrice diagonale $\Delta(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, avec $\mathrm{Sp}(M) = \mathrm{Sp}(N) = (\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n)$. Elles sont donc orthosemblables et ainsi il existe U dans $\mathscr{O}_n(\mathbf{R})$ tel que

$\boxed{N = UMU^{-1} \text{ si et seulement si } \chi_M = \chi_N.}$

3. Par définition, pour k entier, si on a $x \leq \mu_k$, alors puisque $\mu_k \leq \lambda_k$, il vient $x \leq \lambda_k$. Il en résulte $i \geq j$. On a également $\mu_{k+1} \geq \lambda_{k+2}$ et donc si $x > \mu_{k+1}$, on a aussi $x > \lambda_{k+2}$. Il en résulte $i \leq j+1$. D'où $\boxed{j \leq i \leq j+1.}$

Les deux cas correspondent aux deux possibilités de placement de x par rapport à μ_i. On a soit $\lambda_i \geq \mu_i \geq x > \lambda_{i+1}$, soit $\lambda_i \geq x > \mu_i \geq \lambda_{i+1}$ (avec la convention $\lambda_0 = \mu_0 = +\infty$ et $\lambda_{n+1} = \mu_n = -\infty$). On a toujours $\lambda'_k = \lambda_k$ si $k \leq i$, $\lambda'_{i+1} = x$ et $\lambda'_{k+1} = \lambda_k$ si $k > i$. Dans le premier cas on a $\mu'_k = \mu_k$ pour $k \leq i$, $\mu'_{i+1} = x$ et $\mu'_{k+1} = \mu_k$ si $k > i$, tandis que dans le second on a $\mu'_k = \mu_k$ pour $k < i$, $\mu'_i = x$ et $\mu'_{k+1} = \mu_k$ si $k \geq i$. D'où, dans le premier cas,

$$ \lambda'_1 \geq \mu'_1 \geq \cdots \lambda'_i \geq \mu'_i \geq x = \lambda'_{i+1} = \mu'_{i+1} \geq \cdots \geq \lambda'_{n+1} \geq \mu'_{n+1} \geq \lambda'_{n+2} $$

et, dans le second cas,

$$ \lambda'_1 \geq \mu'_1 \geq \cdots \lambda'_i \geq x = \mu'_i = \lambda'_{i+1} > \mu'_{i+1} \geq \cdots \geq \lambda'_{n+1} \geq \mu'_{n+1} \geq \lambda'_{n+2}\,. $$

Par conséquent $\boxed{\widehat{\lambda}' \text{ et } \widehat{\mu}' \text{ sont enlacés.}}$

PARTIE I

4(a) Soit P dans $\mathbf{R}_n[X]$. Puisque Q n'est pas nul, on peut effectuer la division euclidienne de P par Q. On dispose donc de A et B dans $\mathbf{R}[X]$ tels que $P = AQ + B$ avec B de degré strictement inférieur à n. Il résulte de $AQ = P - B \in \mathbf{R}_n[X]$ que A est un scalaire puisque Q est de degré n. On peut remarquer au passage $A = a_n$ où a_n désigne le coefficient de degré n de P (éventuellement nul). Par ailleurs le polynôme

$$B - \sum_{j=1}^{n} \frac{B(\mu_j)}{P_j(\mu_j)} P_j$$

est bien défini car les μ_j sont tous distincts et donc $P_j(\mu_j) \neq 0$, et il s'annule en tous les μ_j par construction car $P_j(\mu_k) = P_j(\mu_j)\delta_{jk}$. Comme il est de degré strictement inférieur à n, on en déduit qu'il s'annule, d'après le théorème de d'Alembert-Gauss. On en déduit, en remarquant $P(\mu_j) = B(\mu_j)$,

$$P = a_n Q_n + \sum_{j=1}^{n} \frac{P(\mu_j)}{P_j(\mu_j)} P_j$$

et donc la famille $(Q, P_1, P_2, \ldots, P_n)$ est une famille génératrice de $\mathbf{R}_n[X]$. Cet espace étant de dimension $n+1$, par cardinalité on en déduit que $\boxed{(Q, P_1, P_2, \ldots, P_n) \text{ en est une base.}}$

(b) On a

$$P_j(\mu_j) = \prod_{1 \leq i < j} (\mu_j - \mu_i) \times \prod_{j < i \leq n} (\mu_j - \mu_i) = (-1)^{j-1} \prod_{1 \leq i < j} (\mu_i - \mu_j) \times \prod_{j < i \leq n} (\mu_j - \mu_i)$$

et donc, les termes apparaissant dans les produits du dernier membre étant tous strictement positifs par hypothèse sur $\widehat{\mu}$, on a $\boxed{(-1)^{j-1} P_j(\mu_j) > 0.}$

5(a) Puisque P est unitaire de degré $n+1$ et Q unitaire de degré n, $P - XQ$ est de degré au plus n. Puisque $(Q, P_1, P_2, \ldots, P_n)$ en est une base, on en déduit qu'il existe un

$$\boxed{\text{unique } (a, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \text{ dans } \mathbf{R}^{n+1} \text{ tel que } P = (X - a)Q - \sum_{j=1}^{n} \alpha_j P_j.}$$

(b) Par construction on a, pour $1 \leq j \leq n$, $P(\mu_j) = -\alpha_j P_j(\mu_j)$ et donc, puisque α_j est strictement positif, $(-1)^j P(\mu_j) > 0$ d'après la question 4b. Il résulte du théorème de Bolzano (dit des valeurs intermédiaires) que P admet une racine dans chaque intervalle $]\mu_{j+1}; \mu_j[$ pour $1 \leq j < n$. De plus P est unitaire de degré $n+1$ donc de limite $+\infty$ en $+\infty$ et de limite $(-1)^{n+1}\infty$ en $-\infty$. Comme $P(\mu_1) < 0$ et $(-1)^{n+1} P(\mu_n) < 0$, le même argument donne l'existence d'une racine de P dans les intervalles $]-\infty; \mu_n[$ et $]\mu_1; +\infty[$. On en déduit que P admet au moins $n+1$ racines réelles distinctes, donc exactement $n+1$ puisqu'il est de degré au plus $n+1$, i.e. $\boxed{P \text{ a } n+1 \text{ racines réelles distinctes } \lambda_1 > \cdots > \lambda_{n+1}.}$
De plus on a déjà remarqué qu'on a $\lambda_1 > \mu_1 > \lambda_2 > \cdots > \lambda_n > \mu_n > \lambda_{n+1}$ et donc $\boxed{\widehat{\lambda} = (\lambda_1 > \cdots > \lambda_{n+1}) \text{ et } \widehat{\mu} \text{ sont strictement enlacés.}}$

(c) On considère le polynôme $XQ - P$. C'est un polynôme de degré au plus n puisque P et Q sont unitaires, P de degré $n+1$ et Q de degré n. D'après la question Réciproquement on suppose que P a $n+1$ racines réelles distinctes $\lambda_1 > \cdots > \lambda_{n+1}$ et que $\widehat{\lambda} = (\lambda_1 > \cdots > \lambda_{n+1})$ et $\widehat{\mu}$ sont strictement enlacés. Montrer que, pour tout j dans $[\![1;n]\!]$, $\alpha_j > 0$.

6. On revient au cas général, i.e. m_k quelconques. Montrer $Q \wedge Q' = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} (X - \mu_k)^{m_k - 1}$.

7. Soit $(a, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ dans $\mathbf{R}^{n+1}$ et soit P dans $\mathbf{R}[X]$ défini par la formule

$$P = (X - a)Q - \sum_{j=1}^{n} \alpha_j P_j \ .$$

(a) Donner une expression de $P \wedge Q$ en fonction des μ_j, des m_j et de l'ensemble J des indices pour lesquels $\alpha_j = 0$.

(b) On suppose que les nombres $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ sont positifs ou nuls.

Montrer que les racines de P sont toutes réelles.

On admettra par la suite que, dans ce cas le plus général, le $(N+1)$-uplet des racines de P et le N-uplet des racines de Q sont enlacés.

PARTIE II

8. Soit r et s deux entiers naturels non nuls. Soit A dans $\mathscr{M}_r(\mathbf{R})$, B dans $\mathscr{M}_{r,s}(\mathbf{R})$, C dans $\mathscr{M}_{s,r}(\mathbf{R})$ et D dans $\mathscr{M}_s(\mathbf{R})$. On suppose de plus que A est inversible. On considère la matrice M de $\mathscr{M}_{r+s}(\mathbf{R})$ ayant la forme par blocs suivante

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \ .$$

Trouver deux matrices U dans $\mathscr{M}_{r,s}(\mathbf{R})$ et V dans $\mathscr{M}_s(\mathbf{R})$ telles que

$$M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & I_s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_r & U \\ 0 & V \end{pmatrix}$$

et en déduire

$$\det(M) = \det(A)\det(D - CA^{-1}B) \ .$$

On pourra admettre par la suite que cette formule reste vraie lorsque M et ses blocs $A, \ldots, D$ sont à coefficients dans le corps $\mathbf{R}(X)$ des fractions rationnelles.

9. Soit M dans $\mathscr{S}_{n+1}(\mathbf{R})$ une matrice symétrique. On écrit M sous la forme par blocs

$$M = \begin{pmatrix} A & y \\ {}^{\mathrm{t}}y & a \end{pmatrix}$$

avec a réel, y dans $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ et A dans $\mathscr{S}_n(\mathbf{R})$.

(a) Si le spectre de A est $\mathrm{Sp}(A) = (\mu_1 \geq \cdots \geq \mu_n)$, montrer qu'il existe U dans $\mathscr{O}_{n+1}(\mathbf{R})$ et z dans $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ tels que

$$UM\,{}^{\mathrm{t}}U = \begin{pmatrix} \Delta(\mu_1,\ldots,\mu_n) & z \\ {}^{\mathrm{t}}z & a \end{pmatrix} .$$

(b) En déduire qu'il existe des nombres réels positifs ou nuls α_j, pour j dans $[\![1;n]\!]$, tels que

$$\chi_M = (X-a)Q_0 - \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \frac{Q_0}{X-\mu_j}\ , \quad \text{où } Q_0 = \prod_{k=1}^{n}(X-\mu_k)\ .$$

(c) Montrer que $\mathrm{Sp}(M)$ et $\mathrm{Sp}(A)$ sont enlacés.

10. Pour $T = (t_{ij}) \in \mathscr{M}_{n+1}(\mathbf{R})$, on note $T_{\leq n}$ la matrice extraite de taille n dont les coefficients sont les t_{ij} pour $1 \leq i,j \leq n$. Soit M dans $\mathscr{S}_{n+1}(\mathbf{R})$. Montrer que l'ensemble

$$\left\{ \mathrm{Sp}\left((UMU^{-1})_{\leq n}\right) \,\middle|\, U \in \mathscr{O}_{n+1}(\mathbf{R}) \right\}\ ,$$

noté $\mathcal{C}_M$, est une partie compacte de $\mathbf{R}^n$.

11. On suppose de plus que les valeurs propres de M sont distinctes. On a donc $\mathrm{Sp}(M) = (\lambda_1 > \cdots > \lambda_{n+1})$.

(a) Soit $\widehat{\mu} = (\mu_1 > \cdots > \mu_n)$ tel que $\mathrm{Sp}(M)$ et $\widehat{\mu}$ soient strictement enlacés. Montrer que $\widehat{\mu}$ appartient à $\mathcal{C}_M$.

(b) Montrer

$$\mathcal{C}_M = \{\widehat{\mu} \,|\, \mathrm{Sp}(M) \text{ et } \widehat{\mu} \text{ sont enlacés}\}\ . \tag{4}$$

PARTIE III

On considère l'application Diag_n de $\mathscr{S}_n(\mathbf{R})$ dans $\mathbf{R}^n$ envoyant $M = (m_{ij})$ sur $(m_{11}, m_{22}, \ldots, m_{nn})$. Soit M dans $\mathscr{S}_n(\mathbf{R})$. Dans cette partie, on se propose d'étudier l'ensemble suivant

$$\mathcal{D}_M = \left\{ \mathrm{Diag}_n(UMU^{-1}) \,\middle|\, U \in \mathscr{O}_n(\mathbf{R}) \right\}\ .$$

12. On étudie d'abord le cas $n = 2$. On note alors $\mathrm{Sp}(M) = (\lambda_1 \geq \lambda_2)$.
Montrer que $\mathcal{D}_M$ est le segment de $\mathbf{R}^2$ dont les extrémités sont (λ_1, λ_2) et (λ_2, λ_1).

13. Soit $M = (m_{ij})$ dans $\mathscr{S}_n(\mathbf{R})$. On note $\mathrm{Sp}(M) = (\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n) \in \mathbf{R}^n$. On se propose de démontrer que, pour tout s dans $[\![1;n]\!]$, on a :

$$\sum_{i=1}^{s} m_{ii} \leq \sum_{i=1}^{s} \lambda_i\ . \tag{5}$$

(a) Que pensez-vous du cas $s = n$?

(b) Exprimer $\displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} m_{ii}$ au moyen des valeurs propres de la matrice $M_{\leq n-1}$ obtenue en supprimant la dernière ligne et la dernière colonne de M. En déduire l'inégalité (5) lorsque $s = n-1$.

(c) En procédant par récurrence sur n, montrer l'inégalité (5) pour tout s dans $[\![1;n]\!]$.

PARTIE IV

14. On note E l'espace vectoriel $\mathbf{R}^2$ muni du produit scalaire standard et de la base canonique $\mathcal{B} = \{e_1, e_2\}$. On définit une base $\mathcal{C} = \{\omega_1, \omega_2\}$ de E par $\omega_1 = e_1$ et $\omega_2 = \frac{1}{2}(e_1 + \sqrt{3}e_2)$.

(a) Soit s_1 la symétrie orthogonale par rapport à la droite $\mathbf{R}\omega_1$. Montrer que la matrice de s_1 dans la base $\mathcal{C}$ est $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

(b) Soit s_2 la symétrie orthogonale par rapport à la droite $\mathbf{R}\omega_2$. Montrer que la matrice de s_2 dans la base $\mathcal{C}$ est $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

15. Soit H l'ensemble des vecteurs (m_1, m_2, m_3) de $\mathbf{R}^3$ tels que $m_1 + m_2 + m_3 = 0$. On note H^+ le sous-ensemble des (m_1, m_2, m_3) de H tels que $m_1 \geq m_2 \geq m_3$. On considère l'application φ de H dans E donnée par

$$\varphi(m_1, m_2, m_3) = (m_1 - m_2)\omega_1 + (m_2 - m_3)\omega_2 \ .$$

(a) Montrer que φ est un isomorphisme linéaire. Décrire $\varphi(H^+)$.

(b) Montrer que, pour tout (m_1, m_2, m_3) dans H, on a

$$s_1 \circ \varphi(m_1, m_2, m_3) = (m_1, m_3, m_2) \quad \text{et} \quad s_2 \circ \varphi(m_1, m_2, m_3) = (m_2, m_1, m_3) \ .$$

(c) Soit $\widehat{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in H$ tel que $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3$. On note $\mathcal{Q}_{\widehat{\lambda}}$ l'ensemble des (m_1, m_2, m_3) de H^+ tels que $m_1 \leq \lambda_1$ et $m_1 + m_2 \leq \lambda_1 + \lambda_2$. Montrer que $\varphi(\mathcal{Q}_{\widehat{\lambda}})$ est un quadrilatère dont on décrira les sommets.

16. Soit M dans $\mathscr{S}_3(\mathbf{R})$ une matrice de trace nulle. On note $\mathrm{Sp}(M) = (\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3)$. On se propose de décrire $\varphi(\mathcal{D}_M)$.

(a) Soit (m_1, m_2, m_3) dans H. Soit σ une permutation de $\{1, 2, 3\}$. Montrer $(m_1, m_2, m_3) \in \mathcal{D}_M \iff (m_{\sigma(1)}, m_{\sigma(2)}, m_{\sigma(3)}) \in \mathcal{D}_M$.

(b) En utilisant la question 13, montrer que l'intersection $H^+ \cap \mathcal{D}_M$ est incluse dans $\mathcal{Q}_{\widehat{\lambda}}$.

(c) Soit (m_1, m_2, m_3) dans $\mathcal{D}_M$. Montrer que le segment de H dont les sommets sont (m_1, m_2, m_3) et (m_2, m_1, m_3) est inclus dans $\mathcal{D}_M$. On pourra utiliser la question 12.

De même, montrer que le segment de H dont les sommets sont (m_1, m_2, m_3) et (m_1, m_3, m_2) est inclus dans $\mathcal{D}_M$.

(d) Montrer que $\mathcal{D}_M$ contient $\mathcal{Q}_{\widehat{\lambda}}$.

(e) Montrer que si $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3$ alors $\varphi(\mathcal{D}_M)$ est un hexagone, dont on déterminera les sommets.