Le paradoxe de Condorcet et le théorème de Arrow

I) Le paradoxe de Condorcet

a) Mise en évidence du paradoxe

b) Les solutions proposées par Condorcet

II) Le théorème de Arrow

a) Définitions et énoncé

b) Démonstration

III) D'autres exemples de vote

a) Le vote alternatif

b) Méthode de Coombs

c) Méthode du vote pondéré

Marie Jean Antoine Nicolas de Caritat, marquis de Condorcet (1743–1794)

Philosophe, mathématicien et homme politique, nommé à l’Académie des Sciences (1769), élu à l’Académie française (1782), il collabora à l’Encyclopédie (1784-89).

Appliquons le vote majoritaire à trois alternatives:

1 : a > b > c
2 : b > c > a
3 : c > a > b

Que donne le vote paire par paire ?

- 1 et 3 soutiennent a > b tandis que 2 est contre.
- 1 et 2 soutiennent b > c tandis que 3 est contre.
- 2 et 3 soutiennent c > a tandis que 1 est contre.

Mais attention ! L'ordre des comparaisons peut changer le résultat du vote :

Soit X,Y,Z trois membres d'un comité et A,B,C trois projets tels que :

Pour X : C>B>A

Pour Y : A>C>B

Pour Z : B>A>C

La confrontation paire par paire

Soit une assemblée de 60 votants et trois propositions A, B, C à départager :

Résultats :

Nombre de votants	Préférence
23	A>B>C
17	B>C>A
2	B>A>C
10	C>A>B
8	C>B>A

On fait une confrontation paire par paire :
On compare A et B, A à C et B à C.

On élimine celui qui a la moins bonne victoire puis on compare les deux restants.

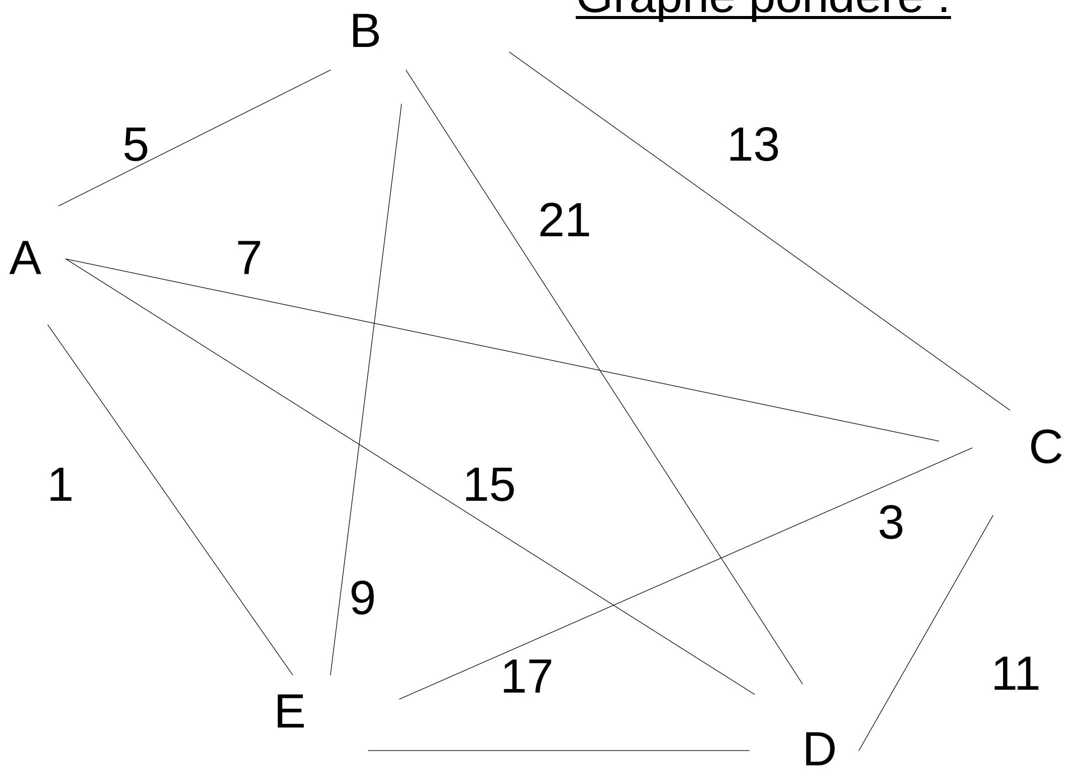
Variante : On désigne gagnant celui qui a la moins mauvaise défaite.

Méthode Condorcet avec rangement des paires par ordre décroissant

Matrice des arcs :

	A	B	C	D	E
A			7	15	
B	5			21	
C		13			3
D			11		
E	1	9		17	

Graphe pondéré :



Kenneth Arrow (1921)

Économiste de formation mathématique, professeur à Stanford (1949–1968 et 1980–1991) et Harvard (1968–1979). Prix Nobel d'économie en 1972 pour ses études sur les choix collectifs.

Unanimité

Principe :

Si tous les individus préfèrent la proposition A à la proposition B, le classement commun doit préférer la proposition A à la proposition B.

Axiome d'unanimité ou de souveraineté :

Le groupe I peut imposer, en cas d'unanimité, n'importe quel classement, i.e :

$\forall\ i \in I\ ((a >_i b) \Rightarrow (a > b))$.

La monotonie

Principe : Si les préférences entre A et B changent en faveur de A, alors leur classement relatif ne peut pas changer en faveur de B.

Axiome de monotonie : Si aPb alors aP′b.

.

La monotonie

Principe : Si les préférences entre A et B changent en faveur de A, alors leur classement relatif ne peut pas changer en faveur de B.

Axiome de monotonie : Si aPb alors aP′b.

.

Enoncé

Toute constitution C : $P^I \rightarrow P$ vérifiant les deux axiomes d'unanimité et de monotonie est dictatoriale !

Partie décisive

Définition : Une partie $J \subset I$ est dite décisive pour (a,b) si elle peut imposer $a > b$, quelles que soient les préférences du complément $I \setminus J$.

Une partie décisive le reste si on lui ajoute un élément.

J est décisive minimale si elle n'est plus décisive quand on lui enlève un élément.

Supposons ***J décisive pour (a,b)*** et :

J : x > a > b   et   I \J : b > x > a

On a x > a par unanimité, puis a > b car J est décisive, donc x > b par transitivité. On conclut que J est décisive pour (x,b).

Supposons maintenant :

J : a > b > y   et   I \ J : b > y > a

On a a > b car J est décisive, puis b > y par unanimité, donc a > y par transitivité. On conclut que J est décisive pour (a,y).

<u>Conclusion</u> : ***J est décisive pour toute paire (x,y)***.

Démonstration du théorème

Soit J une partie décisive minimale et $j \in J$.

Supposons :
j : a > z > b et J\ j : b > a > z et I \J : z > b > a

J est décisive pour (a, z). Elle impose donc a > z.

Si l'on avait b > z alors J\{j} serait décisive pour (b, z). Ceci contredirait la minimalité. On a donc z > b.

Par transitivité a > z et z > b entraînent a > b.

D'autre part, j seul préfère a à b. Il est donc décisif pour (a,b).

Par notre hypothèse de minimalité on conclut que J = {j}.

Conclusion

En France, le mode de scrutin à deux tours ne vérifie pas le critère de Condorcet : le vainqueur officiel n'est pas forcément le vainqueur de Condorcet !!!

Sources :

Wikipédia
www-fourier.ujf-grenoble.fr/