# Actualimaths

1) Intérêts

2) Plan d'épargne

3) Emprunt

a) Intérêts simples

b) Intérêts composés

( Appliqués aux  )

# Définitions :

- Principal ou Solde initial ($p_0$)
- Solde au i$^{ème}$ anniversaire ($p_i$)
- Taux d'intérêt (r)
- Taux nominal
- Taux effectif
-  un finger représentera 500€
  une minute représentera une année

# Intérêts simples :

→ Formule générale

$$\boxed{p_i - p_0 = ir}$$

# Intérêts composés :

→ Formules générales

$$\boxed{p_i = p_0(1+r)^i}$$

$$\boxed{\lim_{n \to \infty}(1+r/n)^n = e^r}$$

# Pour un même taux de 5,65% :

## Avec les intérêts simples :


**en 35 minutes** →


## Avec les intérêts composés :


**en 20 minutes** →

# PLAN ÉPARGNE

# Définitions

- L'**épargne** est la partie du revenu du ménage qui n'est pas consommée mais placée sur un compte dans le but de **fructifier**.
- L'argent épargné est employé sous forme de :

- soit d'épargne liquide, qui reste disponible sous forme liquide (Livret A, Livret jeune);
- soit d**'épargne investie**, affectée à des placements (dans des comptes, plans, titres) : compte d'épargne, livret épargne, <u>***plan d'épargne***</u>, valeur mobilière, ou investissements (dans des moyens de production, l'immobilier, etc.).

- Le plan d'épargne est souvent affecté à la constitution d'épargne pour un *objectif spécifique*. Pour prendre l'exemple français on trouve des plans pour le logement (PEL), en actions (PEA), pour la **retraite (PERP).**

# Fonctionnement d’un plan d ’épargne

<u>Données:</u>

Δ: dépôt annuel de l’épargnant (en euros)

N: durée du plan d’épargne (en année)

r: taux d’intérêt  proposé par la banque (taux constant)

pi: solde du plan à la i-ème année avec i=(0,…,N)

Le jour de la signature du contrat, l’épargnant dépose Δ€ donc on a:

$p_0 = \Delta$

A la fin de la première année, on a:

$$p_1 = p_0 + \mathrm{r}p_0 + \Delta$$

i.e. $$p_1 = (1 + \mathrm{r})\, p_0 + \Delta$$

- En répétant ce raisonnement pour les années suivantes, on a: pi = pi-1 (1+r) + Δ .
- Il s’agit d’une suite récurrente, on déduit un terme du terme précédent.
- Il est donc possible d’exprimer pi en fonction de $p_0$ . Donc:

$$p_i = p_0 (1+r)^i + \Delta \sum_{j=0}^{i-1} (1+r)^{\mathrm{j}}$$

$$p_i = \Delta \sum_{j=0}^{i} (1+r)^{\mathrm{j}}$$

$$p_i = \Delta \frac{(1+r)^{1+\mathrm{i}} - 1}{(1+\mathrm{r}) - 1}$$

$$p_i = \Delta \frac{(1+r)^{1+\mathrm{i}} - 1}{\mathrm{r}}$$

$$\boxed{p_N = \Delta \frac{(1+r)^{1+\mathrm{N}} - 1}{\mathrm{r}}}$$

On utilisera plutôt la formule:

$$q_N = p_N - \Delta$$

# Exemple

- Actuellement, le taux d'épargne retraite est d'environ **4 %.**
- On suppose des placements annuels: **Δ=1000 € pendant 25 ans.**
- On a alors,

$$q_N = 1000\,\frac{(1+0.04)^{1+25} - 1}{0.04} - 1000 = 40\ 645\ €$$

→Dépôt total sur 25 ans: 25 000 €.
→ Bénéfice de 15 645 €.

- Supposons qu'un second épargnant **retarde d'un an le début de ses dépôts**, alors pour le même taux et le même dépôt annuel, on a:

$$q_N = 1000\,\frac{(1+0.04)^{1+24}-1}{0.04} - 1000 = 38\ 082\ €$$

→ Dépôt total : 24 000 €.
→ Bénéfice: 14 082 €.

→ On a une différence de bénéfice d'environ 1600 €.

- Supposons maintenant que le taux soit de **6%,** avec toujours une durée d'épargne de 25 ans et un dépôt annuel de 1000€; on a alors:

$$q_{25} = 1000\,\frac{(1+0.05)^{1+25} - 1}{0.05} - 1000 = 46\ 727\ €$$

→Bénéfice: 21 727 €

→En augmentant le taux de 1%, on augmente le bénéfice de 6082 €.

• Supposons maintenant, pour un taux de 4% et une durée d’épargne de 25 ans, que le **dépôt annuel soit de 900€**, alors:

$$q_{25} = 900\,\frac{(1+0.04)^{1+25} - 1}{0.04} - 900 = 36\ 581\ €$$

→ Dépôt total: 22 500 € soit une différence de 8€/mois.
→ Bénéfice: 14 081 €

→ En diminuant le dépôt annuel de 100€, la différence de bénéfice est de 1600 €

# Conclusion:

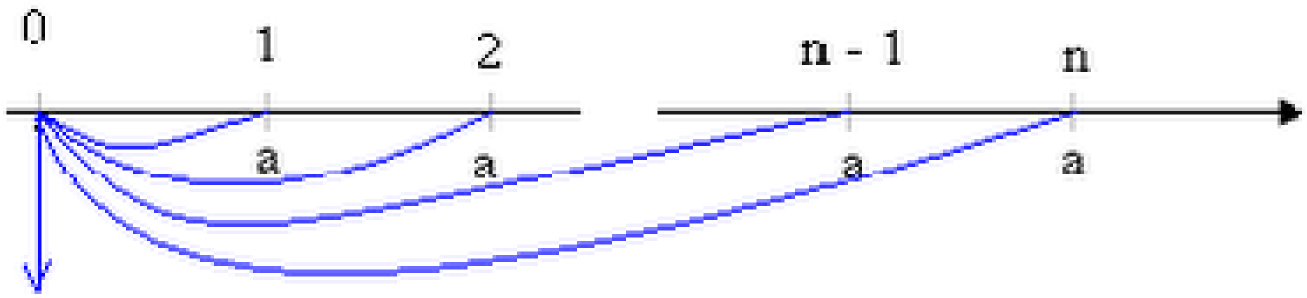
Etant donné que le calcul des bénéfices fait intervenir une suite récurrente, il faut épargner le plus tôt possible !!!

EMPRUNTER

# Calcul d’Emprunt

- **I. Actualisation**

La formule suivante permet de déterminer la valeur de la solde actuelle V0 en fonction de la solde finale Vn:




$$V_0 = a\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

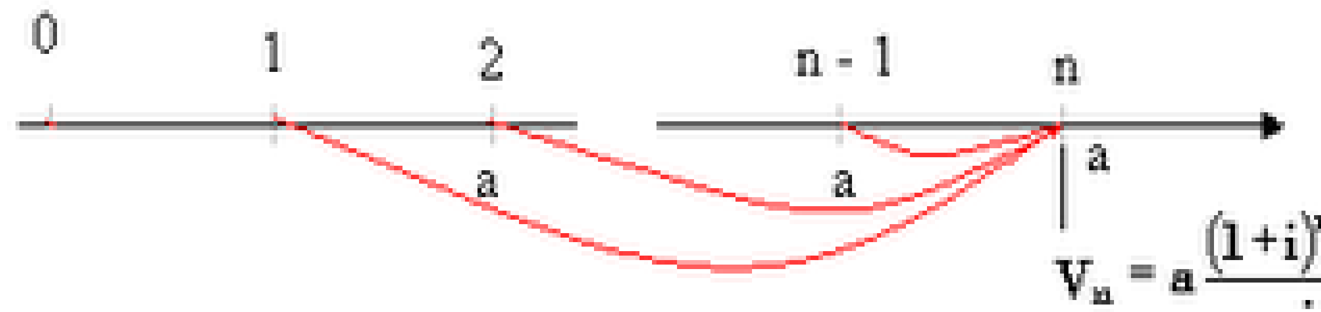
Valeur actuelle d’une suite d’annuités constantes

Avec ,n le nombre d’années, a l’annuité et i le taux.

# Calcul d'Emprunt

- **II. Capitalisation**

Cette seconde formule, plus utile permet de déterminer la solde finale Vn en fonction de la solde initiale V0 :




$$V_n = a\frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

Valeur future Vn d'une suite d'annuités

Avec ,n le nombre d'années, a l'annuité et i le taux.

# Les suites au service des emprunts

Tout comme les suites arithmétiques ou géométriques on peut déterminer la solde d'une année sur l'autre en fonction de l'année précédente.

Il suffit d'un peu de logique pour comprendre les prochaines formules.

# Les suites au service des emprunts

Posons:

-P(i) : Le solde résiduel emprunté au i-ème mois

- Δ: La mensualité

-rm: Le taux d'intérêt effectif

-N la période d'amortissement

## Formules de calcul des soldes (Suites)

$P(1+i)=P(i)x(1+rm)-\Delta$

On en déduit:

$P(i)=P(0)x(1+rm)^i-\Delta\Sigma(1+rm)^j$

$P(i)=P(0)x(1+rm)^i-\Delta x[(1+rm)^i-1]/rm$

| Durée en mois | Taux d'intérêt (annuel) | Montant total du prêt ou de l'emprunt |
|---|---|---|
| 12 | 10 % | 30000 |

Cliquez pour obtenir le tableau d'amortissement

Programme d'amortissement:Payer 30000 pendant 12 mois au taux de 10%.

| Nombre Paiement | Montant Paiement | Montant InterÃªt | Principal | Restant Ã payer |
|---|---|---|---|---|
| 1. | 2637.49 | 250.00 | 2387.49 | 27612.51 |
| 2. | 2637.49 | 230.10 | 2407.38 | 25205.12 |
| 3. | 2637.49 | 210.04 | 2427.45 | 22777.68 |
| 4. | 2637.49 | 189.81 | 2447.68 | 20330.00 |
| 5. | 2637.49 | 169.42 | 2468.07 | 17861.93 |
| 6. | 2637.49 | 148.85 | 2488.64 | 15373.29 |
| 7. | 2637.49 | 128.11 | 2509.38 | 12863.91 |
| 8. | 2637.49 | 107.20 | 2530.29 | 10333.62 |
| 9. | 2637.49 | 86.11 | 2551.38 | 7782.24 |
| 10. | 2637.49 | 64.85 | 2572.64 | 5209.60 |
| 11. | 2637.49 | 43.41 | 2594.08 | 2615.52 |
| 12. | 2637.32 | 21.80 | 2615.52 | 0.00 |

# Autres Formules

- $0 = p(12xN) = P(0)x(1+rm)^{12N} - (\Delta/rm)x((1+rm)^{12N}-1)$

- $\Delta = rm \times P(0) \times (1+rm)^{12N} / [(1+rm)^{12N}-1]$

# Tableau d’amortissement 30000€ sur 12 mois à 10%

Programme d'amortissement:Payer 30000 pendant 12 mois au taux de 10%.

| Nombre Paiement | Montant Paiement | Montant InterÃªt | Principal | Restant Ã payer |
|---|---|---|---|---|
| 1. | 2637.49 | 250.00 | 2387.49 | 27612.51 |
| 2. | 2637.49 | 230.10 | 2407.38 | 25205.12 |
| 3. | 2637.49 | 210.04 | 2427.45 | 22777.68 |
| 4. | 2637.49 | 189.81 | 2447.68 | 20330.00 |
| 5. | 2637.49 | 169.42 | 2468.07 | 17861.93 |
| 6. | 2637.49 | 148.85 | 2488.64 | 15373.29 |
| 7. | 2637.49 | 128.11 | 2509.38 | 12863.91 |
| 8. | 2637.49 | 107.20 | 2530.29 | 10333.62 |
| 9. | 2637.49 | 86.11 | 2551.38 | 7782.24 |
| 10. | 2637.49 | 64.85 | 2572.64 | 5209.60 |
| 11. | 2637.49 | 43.41 | 2594.08 | 2615.52 |
| 12. | 2637.32 | 21.80 | 2615.52 | 0.00 |

# Systèmes de Calcul du Taux effectif

- <u>Avantageux pour l'emprunteur:</u>
- $(1+r)=(1+rm)^{12N}$

- <u>Avantageux pour le banquier:</u>
- $r=rm/12$