

# CONSTRUISONS DES GAMMES D'APRÈS PYTHAGORE, ZARLINO

## Le cycle des quintes

La gamme de Pythagore est construite sur le cycle des quintes : on peut obtenir les 12 degrés d'une gamme en montant successivement des quintes :

FA → DO → SOL → RE → LA → MI → SI → FA♯ → DO♯ → SOL♯ → RE♯ → LA♯ → MI♯

Comme le rapport définissant une quinte juste est  $3/2$ , le rapport entre les deux notes extrêmes (FA et MI♯) fait  $(\frac{3}{2})^{12}$  qui n'est pas très éloigné de  $2^7$ , soit 7 octaves. Néanmoins il n'y a pas égalité :

**Théorème 1** Il n'existe aucun couple de nombres entiers positifs  $(k, l)$  tel que  $3^k = 2^l$ .

En conséquence, le cycle des quintes n'est pas réellement un *cycle* mais plutôt une suite. On tronque cette suite en choisissant par exemple d'identifier MI♯ et FA, ce qui introduit une quinte particulière (appelée souvent *quinte du loup*) entre MI♯ et DO.

On peut calculer les rapports successifs (ramenés à une seule octave par la Règle 1) des différentes notes de la gamme pythagoricienne :

DO	DO♯	RE	RE♯	MI	MI♯	FA	FA♯	SOL	SOL♯	LA	LA♯	SI	DO
1								3/2					2

Une fois ces rapports trouvés, on peut calculer les fréquences des notes correspondantes à partir de DO = 261,6 Hz :

DO	DO♯	RE	RE♯	MI	MI♯	FA	FA♯	SOL	SOL♯	LA	LA♯	SI	DO
261,6								392,4					523,2

On peut faire jouer nos diapasons à ces fréquences pour écouter les intervalles, et les comparer aux intervalles correspondant à la gamme tempérée

DO	DO♯	RE	RE♯	MI	FA	FA♯	SOL	SOL♯	LA	LA♯	SI	DO
261,6	277,1	293,6	311,0	329,5	349,1	369,8	391,8	415,2	439,9	465,9	493,7	523,2

On peut, suivant Zarlino, fabriquer plutôt une gamme en utilisant les quintes justes (rapport  $3/2$ ) ainsi que les quarts justes (rapport  $4/3$ ) et les tierces majeures (rapport  $5/4$ ). On peut ainsi retrouver tous les (12) degrés de la gamme classique :

Intervalle		$\times 3/2$	$\times 4/3$	$\times 5/4$	$\times 5/3$
Gamme	DO	SOL	FA	MI	LA
Unisson	1/1 = DO	3/2 = SOL	4/3 = FA	5/4 = MI	5/3 = LA
Tierce m	6/5 = MI♭	9/5 = S♭	8/5 = LA♭	3/2 = SOL	2/1 = DO
Tierce M	5/4 = MI	15/8 = SI	5/3 = LA	25/16 = SOL♯	25/24 = DO♯
Quarte	4/3 = FA	2/1 = DO	16/9 = S♭	5/3 = LA	10/9 = RE
Quinte	3/2 = SOL	9/8 = RE	2/1 = DO	15/8 = SI	5/4 = MI
Sixte M	5/3 = LA	5/4 = MI	10/9 = RE	25/24 = DO♯	25/18 = FA♯

Que remarque-t-on ?