La scène se passe au bar, à Cracovie. Deux hommes, rendus gais par la vodka, regardent une équipe vêtue de bleu se faire écraser par des joueurs en blanc. L'un d'eux s'exclame : « Tu sais quoi, Stefan, ces diables là, on dirait qu'ils jouent avec plusieurs balles ! ». Son compère lui répond : « Je vais te dire, Alfred, moi je vois bien au moins deux ballons ! Je ne comprends pas pourquoi l'arbitre laisse faire ça ! ». Et puis ils éclatent d'un rire nerveux. Stefan reprend : « Ben moi, je n'arrive même pas à compter le nombre de ballons ! ».
Arrive alors un homme au regard triste arborant une barbichette. Il dit, avec un fort accent allemand : « Là, vous avez un peu trop forcé sur la vodka. Multiplier les ballons, oui, mais de façon non dénombrable, non ! ». Il sourit. Il se saisit de son verre de vodka, le vide une première fois dans le verre de Stefan, puis (sans le remplir) une seconde fois dans celui d'Alfred et le lève (toujours rempli) pour trinquer avec les deux compères. Machinalement les deux hommes vident leur verre, avant de se regarder.
Quand ils vont pour poser une question à l'homme, il a disparu. Seuls restent deux parchemins, identiques, découpés en petits morceaux, une infinité de petits morceaux, au fond de leurs verres. Après avoir laissé les deux équipes s'expliquer entre elles et éteint la télé, après avoir passé des heures à reconstituer le puzzle, ils purent lire ce que vous tenez dans les mains ...

1. Donner un exemple simple d'ensemble A tel que A soit la réunion disjointe de B et C, avec $A \simeq B$ et $A \simeq C$ (l'écriture $X \simeq Y$ signifie qu'il existe $\varphi\ : X \to Y$ bijective).
2. Dans le groupe $SO(3,\mathbf{R})$ des isométries directes de l'espace vectoriel $\mathbf{R}^3$ euclidien orienté, on considère τ le demi-tour d'axe e_1+e_2 et ρ la rotation d'axe orienté e_1 et d'angle $2\pi/3$, i.e. matriciellement $\tau = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $\rho = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$. Soit G l'ensemble formé de Id_3, τ et des rotations de la forme $r = \tau^{\varepsilon_1}\rho^{n_1}\tau\rho^{n_2}\cdots\rho^{n_{k-1}}\tau\rho^{n_k}\tau^{\varepsilon_2}$ avec $k \in \mathbf{N}^*$, $\varepsilon_i = 0$ ou 1, $n_i = 1$ ou 2. Montrer que G est un sous-groupe de $SO(3,\mathbf{R})$.
3. Montrer que G est une partie dénombrable de $SO(3,\mathbf{R})$, i.e. $G \simeq \mathbf{N}$.
4. Soit $r = \rho^{n_1}\tau\rho^{n_2}\cdots\rho^{n_{k-1}}\tau\rho^{n_k}\tau$. Montrer qu'on a $r = \dfrac{1}{2^k}\begin{pmatrix} p_1 & p_2 & p_3\sqrt{3} \\ q_1 & p_4 & q_2\sqrt{3} \\ q_3\sqrt{3} & p_5\sqrt{3} & q_4 \end{pmatrix}$ avec p_i et q_i des entiers respectivement pairs et impairs.
5. En déduire que l'écriture d'un élément de G est unique.
6. Soit A l'ensemble des éléments de G dont l'écriture commence par τ (y compris τ lui-même), $B = \rho A$ et $C = \rho^2 A$. Soit $N = \{(\rho^2\tau)^n \mid n \in \mathbf{N}^*\}$ et $N' = N \cup \{Id_3\}$. Montrer que N est inclus dans C, $\tau N'$ est inclus dans A et $\rho\tau N'$ est inclus dans B.
7. On pose $A' = (A \setminus \tau N') \cup N'$, $B' = \rho A'$, $C' = \rho B' = \rho^2 A'$. Montrer que G est réunion disjointe de A', B', C' et qu'on a $A' = \tau(B' \cup C')$.
8. Soit maintenant T l'ensemble des points de la sphère unité S qui appartiennent à l'axe d'une rotation appartenant à G et S' les autres points de S. Montrer que T est dénombrable, i.e. $T \simeq \mathbf{N}$.
9. Montrer que S' est réunion disjointe de trois ensembles X, Y et Z tels que chacun soit isométrique aux autres et tel que X soit isométrique à $Y \cup Z$ (on dit que deux ensembles sont isométriques s'il existe une rotation qui envoie l'un sur l'autre).
10. Soit S_1, S_2 et S_3 trois sphères de rayon unité disjointes. Montrer qu'il existe T_1, T_2 et T_3 des parties dénombrables telles que $S_1 \setminus T_1$ est équivalente par découpage et recollement à $(S_2 \setminus T_2) \cup (S_3 \setminus T_3)$ au sens suivant : E et F sont équivalents par découpage et recollement si on peut écrire A comme réunion disjointe finie de $(A_i)_{1\le i\le n}$ et B de $(B_i)_{1\le i\le n}$, de sorte que chaque A_i soit isométrique à B_i.
11. Montrer que S_1 est équivalente par découpage et recollement à $S_2 \cup S_3$.
12. Soit maintenant B_1, B_2, B_3 trois boules de rayon 1 disjointes. Montrer que B_1 est équivalente par découpage et recollement à $B_2 \cup B_3$. *Felix.*

Question subsidiaire : combien faut-il de morceaux pour dédoubler un ballon de football ? Peut-on multiplier les ballons dans $\mathbf{R}^n$ pour $n \neq 3$?
Question encore plus subsidiaire : quel sont les patronymes de Stefan et Albert ? Qui est le mystérieux homme à barbichette ? Pourquoi avait-il le regard triste ?