La scène se passe au jardin des plantes, sur une terrasse ensoleillée. Un groupe regarde deux enfants faire un château de sable et se demande lequel est le plus créatif. C'est qu'ils aimeraient bien leur offrir une chocogrenouille, mais voilà, il ne leur en reste plus qu'une. N'arrivant pas à un consensus, ils décident de passer au vote, mais làs ! le vote se solde par un échec : 3 voix pour la petite fille rousse et 3 voix pour le petit garçon brun. La discussion reprend de plus belle quand une amie mathématicienne passe par là avec ses trois enfants. Le groupe lui propose de venir prendre part au vote et lui explique l'enjeu, pendant que ses enfants en profitent pour aller, eux aussi, faire des châteaux de sable. Le groupe est maintenant en nombre impair, mais il y a maintenant 5 châteaux à admirer. Et ils sont tous aussi inventifs les uns que les autres ! Alors les discussions reprennent et on finit par en venir au vote.

Mais c'est alors que la mathématicienne met en garde le groupe. Comment procéder ? Uninominal à deux tours ? Vote alternatif ? C'est que, dans le cas d'une alternative à plus de trois branches, on tombe vite dans le paradoxe de Shifumi !

1. Un premier paradoxe

- **a.** Donner la somme des nombres entiers de 1 à 9.
- **b.** Donner le nombre de partitions de 15, i.e. le nombre de façons d'écrire 15 comme somme d'entiers naturels strictement positifs.
- **c.** Combien de ces partitions sont formées de trois nombres tous distincts et compris entre 1 et 9 ?
- **d.** En déduire le nombre de carrés magiques d'ordre 3, i.e. de matrices $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq 3}$ telles que, pour tout i dans $[\![1;3]\!]$, on ait $\sum_{j=1}^{3} a_{ij} = \sum_{j=1}^{3} a_{ji} = Tr(A) = a_{13} + a_{22} + a_{31}$.
- **e.** On choisit un carré magique et on interprète chaque ligne comme une équipe. On oppose les équipes entre elles, deux par deux, en confrontant les termes d'une même colonne : le terme le plus élevé permet à son équipe de marquer un point. Montrer que cette façon de procéder ne permet pas de déterminer un vainqueur.
- **f.** Déduire de la situation précédente une configuration de vote amenant au blocage suivant : une population a le choix entre trois possibilités et décide de les classer. Chaque individu produit donc un classement (strictement ordonné) entre les trois possibilités. On confronte ensuite les possibilités deux par deux et, à chaque fois, chaque individu vote selon sa préférence. Aucune des possibilités ne l'emporte sur ses deux concurrentes.

2. Une extension

Soit X un ensemble fini de candidats et I un ensemble d'individus $I = \{i_1, \cdots, i_n\}$. Tout individu i de I possède une relation de préférence notée $\preceq_i$: $a \preceq_i b$ si i préfère b à a au sens large. On note $a \prec_i b$ si la relation est stricte et $a \sim_i b$ si $a \preceq_i b$ et $b \preceq_i a$. Le problème est de déterminer une relation $\preceq_I$ qui reflète les préferences de tous les individus, i.e. une fonction qui à un ensemble $(\preceq_i)_{i\in I}$ associe une relation $\preceq_I$. Cette fonction doit être définie quelque soit l'ensemble I et l'ensemble $(\preceq_i)_{i\in I}$ et avoir les propriétés suivantes :

Unanimité Si on a $\forall i \in I$, $a \prec_i b$, alors $a \prec_I b$.

Indépendance des alternatives $a \prec_I b$ ne dépend que de l'ensemble $\{i \in I \mid a \prec_i b\}$ et de même pour $a \preceq_I b$.

- **a.** Démontrer le lemme de neutralité stricte : on suppose qu'on a deux paires d'alternatives (a, b) et (α, β) dont les préférences sont les mêmes. Autrement dit on suppose que pour tout i on a $a \prec_i b \Leftrightarrow \alpha \prec_i \beta$ et $b \prec_i a \Leftrightarrow \beta \prec_i \alpha$. On suppose de plus qu'on n'a jamais $a \sim_i b$ (préférences strictes). Alors il en est de même collectivement : $a \prec_I b \Leftrightarrow \alpha \prec_I \beta$ et la préférence est stricte.
- **b.** On part d'une situation où $a \prec_i b$ pour tout i. On a alors $a \prec_I b$. On change maintenant un par un les votes pour étudier l'évolution de $\prec_I$. Montrer qu'il existe j minimal tel que la situation $a \prec_i b$ pour $i \geq j$ et $b \prec_i a$ pour $i < j$ entraîne le choix $b \prec_I a$.
- **c.** Montrer que j est un dictateur : les préférences de j sont exactement les préférences collectives. Autrement dit $a \preceq_j b \Rightarrow a \preceq_I b$ et $a \prec_j b \Rightarrow a \prec_I b$

3. Un dernier paradoxe : on reprend ce qui précède avec trois options et on suppose toutes les préférences strictes. **On ne suppose plus l'unanimité ni l'indépendance des alternatives**. Alors, quelle que soit la méthode démocratique pour déterminer l'option vainqueur à partir des votes des électeurs, on peut trouver une situation dans laquelle certains électeurs ont intérêt à voter un suffrage qui ne reflète pas leur opinion véritable.

- **a.** On suppose qu'on a trouvé une méthode où personne n'a intérêt à mentir. Montrer qu'un changement de vote ne mettant pas en jeu a et b ne doit pas modifier l'ordre collectif entre a et b.
- **b.** Montrer que le résultat ne dépend que des proportions p_{ab}, p_{bc} et p_{ca} d'individus préférant(strictement) a à b etc.
- **c.** Montrer que l'ensemble des triplets (p_{ab}, p_{bc}, p_{ca}) forme l'intérieur d'un octaèdre de $\mathbf{R}^3$ (et le préciser).
- **d.** Montrer que les frontières entre les parties de cet octaèdre correspondant à chaque cas possible de victoire (a, b ou c vainqueur du vote) sont des plans perpendiculaires aux axes de coordonnées.
- **e.** Conclure.

Questions subsidiaires : Qui l'homme politique et mathématicien français à qui l'on doit le premier paradoxe ? A qui doit la généralisation ? Par quel prix fut-il récompensé ? Lequel de ces théorèmes est dû à deux personnes dont un philosophe ? Qui est ce philosophe ?