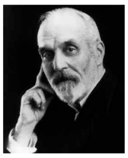
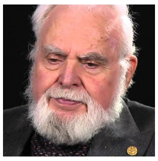
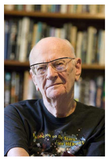
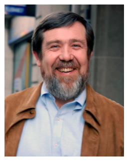
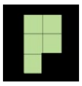
    

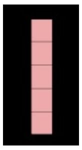
Les enfants perdus se sont introduits dans le lycée Clemenceau. Par le trou de la serrure, ils observent. Inès joue toute seule aux échecs. Jean-Loup est encore en train de jouer à Tétris. Aucun ne semble motivé par son DS. Mais les enfants perdus savent bien à quoi conduit un tel renoncement ! Alertés par le tic-tac infernal du reptile, ils décident d'agir et de réveiller les neurones endormis des amis de Peter ...
– Tétris ? Pourquoi pas des dominos ?
– Tu me donnes une idée. Pourquoi ne pas lui changer ses tétraminos en pentaminos !
– Et enlever des cases de son échiquier !



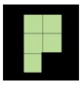
Un polyomino est une figure plane composée de carrés unitaires ayant au moins un côté de commun. Plus généralement une surface quarrable s'obtient en retirant certains des carrés unitaires formant un polyomino, de sorte à autoriser qu'il ait des trous, comme par exemple .

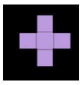
Pentaminos On dit que deux polyominos sont de même type s'ils sont identiques à rotation ou symétrie près. On parle de domino, triomino, tétramino, pentamino lorsque le nombre de carrés qui composent le polyomino est 2, 3, 4 ou 5. On dit qu'un polyomino est **rectifiable** s'il permet de paver (remplir sans superposition) un rectangle, qu'il est **auto-pavant** s'il permet de paver son image par une homothétie de rapport strictement supérieur à 1 et enfin qu'il est **pavant** s'il permet de paver le plan.

1. Classifier les pentaminos. On s'attachera démontrer qu'on les a tous trouvés et qu'il n'y a pas de redondance dans la classification.
2. Montrer qu'un polyomino rectifiable est auto-pavant et qu'un polyomino auto-pavant est pavant.



3. Quels pentaminos sont pavants ? On s'attachera à donner explicitement les transformations permettant de paver si c'est possible et à démontrer l'impossibilité sinon. Exemple : pour le pentamino I (5 carrés alignés), on peut placer le premier sur le rectangle de sommets $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,5)$ et $(1,5)$ puis placer tous ceux obtenus par une translation de vecteur $(a,5b)$ avec a et b dans $\mathbf{Z}$.
4. Quels rectangles peuvent être pavés en utilisant une fois et une seule chaque pentamino ?

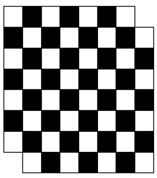




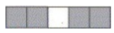
5. On note P le pentamino obtenu en formant un carré 2x2 et en rajoutant un carré unitaire sur l'un des côtés.
   (a) Pour quels n dans $\mathbf{N}^*$ peut-on paver le rectangle $R(5,n)$ de taille $5\times n$?
   (b) Pour tout couple (m,n) d'entiers strictement positifs, dire si le rectangle $R(m,n)$ de taille $m\times n$ est pavable par le pentamino P.
6. On note X le pentamino en forme de croix. Est-il rectifiable ? auto-pavant ?
7. Montrer que le triomino L (en forme de L) est auto-pavant pour tout rapport d'homothétie dans $\mathbf{N}^*$, i.e. permet de paver son image par une homothétie de rapport dans $\mathbf{N}^*$.

Polynômes À tout point (a,b) à coordonnées entières, i.e. de $\mathbf{Z}^2$, on associe le monôme X^aY^b. À toute surface quarrable S on associe le polynôme $P(S)$ égal à la somme des monômes associés au sommet en bas à gauche d'un carré formant S. Par exemple pour un carré dont le sommet en bas à gauche est à l'origine, on a $P(S)=1$ pour le carré unité et $P(S)=1+X+Y+XY$ pour le carré de côté 2.

1. *On identifiera polynômes, fonctions polynomiales, fonctions et fractions rationnelles.* Soit $R_{m,n}$ le rectangle dont deux sommets opposés sont l'origine et (m,n), montrer $P(R_{m,n})=\dfrac{X^m-1}{X-1}\dfrac{Y^n-1}{Y-1}$.
2. Montrer que si une surface quarrable S est pavable par des dominos, alors $P(S)$ est de la forme $U(X,Y)(1+X)+V(X,Y)(1+Y)$ où U et V sont dans $\mathbf{Z}[X,Y]$, i.e. des polynômes en X et Y à coefficients entiers.



3. La condition précédente est-elle suffisante ? Si oui le démontrer, sinon en donner une.
4. En évaluant $P(S)$ en des valeurs particulières, montrer qu'on ne peut pas paver par des dominos un échiquier (8×8) dont on a retiré des coins opposés. Proposer une interprétation utilisant la couleur des cases de l'échiquier.
5. Montrer que $1+X+X^3+X^5+X^6$ admet une racine dans $]-1,0[$. En déduire qu'on ne peut pas paver de rectangle avec ce pentamino troué .

6. Peut-on paver un rectangle avec ce tétramino troué  ?

Culture générale Donner les nationalités de Arthur Clarke, John Conway, Henry Dudeney, Solomon Golomb et Aleksei Pajitnov, puis indiquer quelle personne correspond à quel portrait.
– Qui a inventé Tétris ? En quelle année ?
– Qui a écrit *Imperial Earth* ? En quelle année ? Quel est le lien avec le reste ?
– Qui a écrit *The Canterbury puzzles* ? En quelle année ? Quel est le lien avec le reste ?
– Qui a inventé le Jeu de la vie ? En quelle année ?
– Qui a inventé les polyominos ? En quelle année a-t-il reçu le prix Claude Shannon ?
– Qui sont Inès et Jean-Loup ? En quelle année ont-ils représenté la France à ITYM ?