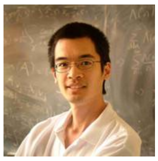
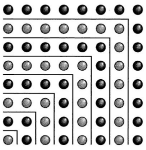
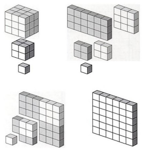
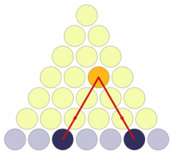
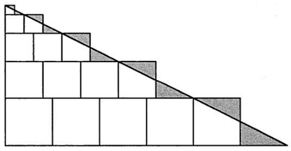






— *Dis comment on fait pour avoir la médaille Fields ?*
— *Ben, il faut avoir moins de 40 ans, et savoir faire des maths.*
— *Ah. Et c'est tout ? Faut pas être un garçon ?*
— *Pas sûr. Enfin probablement pas. C'est pas qu'y faut, mais on n'a que ça pour l'instant.*
— *Ah. Tu veux dire que le signe égal, en maths, c'est pour de faux ?*
— *Un peu. Mais c'est comme tout en maths, on peut tout inventer et donner de nouveaux sens. Tu vois, comme les carrés négatifs, les sommes infinies, et même les sommes d'un demi terme.*
— *Et quand est-ce qu'on inventera une femme médaillée Fields ? Cette année ?*
— *Si les ballons sont des cubes, alors, oui, pourquoi pas une femme médaillée Fields !*

Premiers résultats Énoncer les résultats contenus dans ces figures et les démontrer

Opérateur Δ

1. Montrer que l'application Δ de $\mathbf{R}[X]$ dans lui-même définie par $\Delta(P) = P - P(X-1)$ est linéaire, en donner son noyau et donner une base $(U_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de $\mathbf{R}[X]$ vérifiant $\Delta(U_n) = U_{n-1}$ pour $n \in \mathbf{N}^*$.
2. Utiliser cette base pour calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^5$.
3. Soit P dans $\mathbf{R}[X]$. Montrer qu'il existe un unique Q dans $\mathbf{R}[X]$ vérifiant $Q(0) = 0$ et $\Delta(Q) = P$. On pose pour x et y réels $\displaystyle\sum_{k=x}^{y} P(k) = Q(y) - Q(x-1)$. Justifier et interpréter à l'aide d'une intégrale.
4. Que vaut $\displaystyle\sum_{k=1}^{1/2}(1+k+k^2)$? Montrer que la définition précédente est la seule qui vérifie les conditions suivantes :

$$\sum_{k=x}^{y} f(k) + \sum_{k=y+1}^{z} f(k) = \sum_{k=x}^{z} f(k)\,,\quad \sum_{k=x+z}^{y+z} f(k) = \sum_{k=x}^{y} f(k+z)\,,\quad \sum_{k=x}^{y}(\lambda f(k)+\mu g(k)) = \lambda\sum_{k=x}^{y} f(k) + \mu\sum_{k=x}^{y} g(k)\,, \sum_{k=1}^{1} f(k) = f(1)$$

et $y \mapsto \displaystyle\sum_{k=x}^{y} k^d$ est polynomiale ($x \in \mathbf{R}$ et $d \in \mathbf{N}$). On pourra commencer par le cas $y - x \in \mathbf{Q}$.

Fonction ζ On pose $\zeta(s) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n^{-s}$ lorsque cela a un sens.

1. En considérant le polynôme $\displaystyle\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{2m+1}{2k+1}X^{m-k}$, démontrer $\displaystyle\sum_{k=1}^{m}\cot^2\left(\frac{k\pi}{2m+1}\right) = \frac{2m(2m-1)}{6}$.
2. En déduire une valeur de $\displaystyle\sum_{k=1}^{m}\sin^{-2}\left(\frac{k\pi}{2m+1}\right)$ et la valeur de $\zeta(2)$.

Troncature Soit $\eta \in C^\infty(\mathbf{R}_+, \mathbf{R}_+)$ à support dans $[0,1]$ (i.e. $\eta(x) = 0$ pour $x \geq 1$) et valant 1 sur $[0,a]$ avec $0 < a$.

1. Montrer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\eta(n/N)n^{-2} = \zeta(2) + O(1/N)$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\eta(n/N)(-1)^n = \frac{1}{2} + O(1/N)$. Combien vaut $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$?
2. Montrer, pour f de classe C^∞ de $\mathbf{R}_+$ dans $\mathbf{R}$ et N dans $\mathbf{N}^*$, $\displaystyle\int_0^N f(x)dx = \frac{1}{2}f(0) + f(1) + \cdots + f(N-1) + \frac{1}{2}f(N) + O(N\sup|f''|)$.
3. En déduire $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\eta(n/N) = -\frac{1}{2} + \alpha N + O(1/N)$ pour une certaine valeur de α. Que dire de l'équation $\zeta(0) = -\dfrac{1}{2}$?
4. Avec la convention précédente, montrer $1 + 2 + \cdots + n + \cdots = -\dfrac{1}{12}$!

Culture générale Indiquer quelle personne correspond à quel portrait en vous aidant des questions suivantes.

— Qui a écrit le premier traité sur les séries, le calcul intégral et les équations différentielles ? Quel est son prénom ?
— Quel prodige a obtenu la médaille Fields à 31 ans et une médaille d'or aux olympiades internationales à 13 ? Quelle est sa nationalité ?
— Qui a donné une méthode générale de calcul des puissances des entiers ? Quel est son prénom ?
— Qui pourrait bien obtenir une médaille Fields à Séoul cette année ? Quelle est sa nationalité ?
— Qui a étudié la fonction ζ et a formulé des conjectures célèbres à son sujet ? Quel prix récompense toute personne démontrant ces conjectures ?