Fred et Georges aiment bien ramener des Chocogrenouilles de Hogsmeade et les distribuer avant le cours de Snape, qui a lieu le matin à 7h de sorte que personne n'ait vraiment le temps de bien déjeuner avant. Ils les distribuent de façon un peu aléatoire. Elles sont rapidement mangées, à l'exception de celle avec l'image d'Albus Dumbledore que les élèves de première année aiment bien collectionner et manger tou(te)s ensemble. Aussi, juste avant le cours de Madam Hooch, ils se mettent en cercle (toujours de la même façon, selon la volonté de la professeure) et se passent la fameuse chocogrenouille.

On définit la suite de polynômes $(U_k)_{k\in\mathbf{N}}$ par $U_0 = 1$ et pour tout entier naturel k,

$$U_k = \frac{X(X-1)\cdots(X-k+1)}{k!}\ .$$

Dans le problème n et k désignent des entiers naturels, $\mathbf{R}[X]$ (resp. $\mathbf{R}_n[X]$) désigne l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels (resp. de degré inférieur ou égal à n).

Opérateur Δ

1. Montrer que l'application Δ de $\mathbf{R}[X]$ dans lui-même définie par $\Delta(P) = P - P(X-1)$ est linéaire et en donner son noyau.
2. Montrer que pour tout entier relatif x, $U_k(x)$ est aussi un entier relatif.
3. Énoncer puis démontrer une caractérisation des polynômes de $\mathbf{R}[X]$ prenant des valeurs entières en tous les entiers relatifs.
4. On note $s_{k,n}$ le nombre de surjections de $[\![1,k]\!]$ dans $[\![1,n]\!]$. Montrer
$$n^k = \sum_{j=0}^{n} U_j(n)s_{k,j}$$
et en déduire une formule pour $s_{k,n}$.

Collection Ron a commencé depuis longtemps sa collection de chocogrenouilles. Il sait que la collection complète comporte N cartes. La probabilité d'apparaître de chacune est donnée par une famille $(p_i)_{1\leq i\leq N}$ vérifiant bien sûr $\displaystyle\sum_{i=1}^{N} p_i = 1$. On commence par supposer $\forall i \in [\![1,N]\!]$, $p_i = \dfrac{1}{N}$.

1. On note T_k le nombre de chocogrenouilles à acheter avant d'obtenir une nouvelle image, la k^{e}. Montrer $\mathbf{P}(T_k = i) = \left(\dfrac{k-1}{N}\right)^{i-1}\dfrac{N-k+1}{N}$, pour $i \in \mathbf{N}^*$.
2. Calculer $\displaystyle\sum_{i=1}^{+\infty} i\mathbf{P}(T_k = i)$ et en déduire que le nombre moyen de cartes à acheter avant d'obtenir une collection complète est donnée par $H_N = N\displaystyle\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k}$.
3. Donner un équivalent, quand N tend vers l'infini, de ce nombre moyen.
4. Donner un équivalent de la variance de T_N lorsque N tend vers l'infini.
5. Calculer $\mathbf{P}(T_N > n)$ pour n dans $\mathbf{N}^*$, d'abord dans le cas équiprobable, puis dans le cas général.
6. On fixe une partie J de $[\![1,N]\!]$ et on note A_J et B_J les événements correspondant au fait, qu'en n cartes la collection obtenue est incluse (respectivement contient) les cartes dont les numéros sont dans J.
   (a) Calculer $\mathbf{P}(A_J)$, d'abord dans le cas équiprobable, puis dans le cas général.
   (b) Calculer $\mathbf{P}(B_J \mid A_J)$, d'abord dans le cas équiprobable, puis dans le cas général.
7. En déduire la probabilité d'obtenir k cartes différentes avec n chocogrenouilles.

Quidditch Au début du cours de Madam Hooch, chaque élève mange ses chocogrenouilles et passe à son voisin de droite (dans le cercle) les images de Dumbledore qu'il a eues. Son voisin fait alors de même dès qu'il a aperçu le directeur. Cela lui prend environ une seconde. On note T le nombre de secondes qu'il faut pour que tout le monde ait eu une chance de voir Dumbledore.

1. Quelles sont les plus grandes et plus petites valeurs que peut prendre T sachant qu'il y a n élèves et m images de Dumbledore (réparties au hasard par Fred et Georges de façon équiprobable).
2. Estimer une valeur de m, en fonction de n, telle que la probabilité $\mathbf{P}(T = 0)$ soit supérieure à $\dfrac{1}{2}$. On supposera que Fred et Georges distribuent les chocogrenouilles de façon équiprobable.
3. On suppose $m = n$. Dans les mêmes conditions, déterminer la médiane de T.
4. On revient au cas général et on suppose qu'un élève ne transmet une chocogrenouille avec l'image de Dumbledore que s'il en a déjà une ... de façon à ce que tous puissent manger la chocogrenouille ensemble et donc voir Dumbledore aussi ensemble. Reprendre les questions précédentes dans ce cadre.

Culture générale Indiquer quelle personne correspond à quel portrait sachant que s'y trouve un Animagus mythique. Le cas échéant donner des faits remarquables concernant ces personnes.