  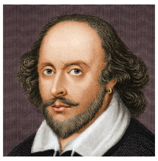  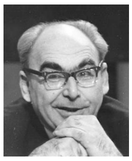

La scène se passe durant l'hiver 1854-1855 à Scutari, dans un hôpital militaire britannique. Une jeune femme passe avec une lampe au milieu des blessés. Il fait nuit. On entend un oiseau chanter. L'un d'eux, Stanislav, la contemple.

> *Wilt thou be gone? It is not yet near day. It was the nightingale, and not the lark, That pierced the fearful hollow of thine ear. Nightly she sings on yond pomegranate tree. Believe me, love, it was the nightingale.*

L'infirmière le regarde doucement. Au même moment, à côté, Hugo se lamente : Donne-nous plutôt un café ! Et pas de ce jus de chaussette !. *Elle sourit et leur verse un peu d'un liquide brûlant et sombre :* Il ne faut pas non plus mettre trop de poudre, faute de quoi, il n'y aura pas de café ! La percolation est tout un art. *Une larme coule sur sa joue, comme si un violon lui soutirait son âme. Pendant ce temps Stanislav regarde du miel s'étirer dans son café, comme si une longue molécule s'étirait le long d'une grille hexagonale sans se refermer.*

Dans ce problème n et m désignent des entiers naturels et x un réel dans $]0;1[$. On appelle partition sans contrainte de n sa décomposition en somme d'entiers strictement positifs $n = a_1 + \cdots + a_m$, l'ordre n'ayant pas d'importance. On dit que les $(a_i)_{1\le i\le m}$ sont les *parties* de la partition. On note p_n le nombre de telles partitions de n. Par exemple $p_1 = 1$, $p_2 = 2$, $p_3 = 3$. On convient $p_0 = 1$.

Préliminaires

1. Donner les domaines de validité des inégalités $\sqrt{1-t} \le 1 - \dfrac{t}{2}$ et $t \le \operatorname{sh}(t)$. Justifier.
2. Justifier $\sum_{n=0}^{+\infty} n x^n = \dfrac{x}{(1-x)^2}$.
3. Soit (a_n) une suite réelle positive vérifiant $a_{n+m} \le a_n + a_m$. Montrer $\lim \dfrac{a_n}{n} = \inf\limits_{k\in\mathbf{N}} \dfrac{a_k}{k}$.
4. (a) En considérant le polynôme $\sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{2m+1}{2k+1} X^{m-k}$, démontrer $\sum_{k=1}^{m} \cot^2\left(\dfrac{k\pi}{2m+1}\right) = \dfrac{2m(2m-1)}{6}$.

   (b) En déduire une valeur de $\sum_{k=1}^{m} \sin^{-2}\left(\dfrac{k\pi}{2m+1}\right)$ puis conclure qu'on a $\sum_{n=1}^{+\infty} n^{-2} = \dfrac{\pi^2}{6}$.

Étude de p_n

1. Montrer que le nombre de partitions de n en m parties est égal au nombre de partitions en un nombre quelconque de parties mais dont la plus grande est égale à m. Illustrer par un dessin.
2. Justifier l'existence de $F(x) = \lim_{m\to+\infty} \prod_{k=1}^{m} (1-x^k)^{-1}$. On pourra utiliser un logarithme.
3. Justifier que l'on peut écrire $F_m(x) = \prod_{k=1}^{m}(1-x^k)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} p_{n,m} x^n$ et interpréter $p_{n,m}$.
4. Montrer $\sum_{n=0}^{m} p_n x^n < F_m(x) < F(x)$ et en déduire $F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n x^n$. On écrira $\prod_{k=1}^{+\infty}(1-x^k)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n x^n$.
5. Montrer que le nombre de partitions de n en parties **distinctes** est égal au nombre de ses partitions en parties **impaires**. On pourra démontrer $\prod_{k=1}^{+\infty}(1+x^k) = \prod_{k=0}^{+\infty}(1-x^{2k+1})^{-1}$ ou, au choix, utiliser l'écriture en binaire.
6. Par un argument graphique, montrer que le nombre de partitions de n en un nombre pair de parties **distinctes**, noté p_n^{pair}, est égal au nombre de ses partitions en un nombre impair de parties **distinctes**, noté p_n^{impair}, sauf si n est de la forme $n = \frac{k(3k\pm1)}{2}$. Dans ce cas montrer qu'on a $p_n^{pair} = p_n^{impair} + (-1)^k$.
7. En déduire la formule $p_n - p_{n-1} - p_{n-2} + p_{n-5} + \cdots + (-1)^k p_{n-k(3k-1)/2} + (-1)^k p_{n-k(3k+1)/2} + \cdots = 0$.
8. Montrer $n p_n = \displaystyle\sum_{a=1}^{n} \sum_{k=0}^{[n/a]} a p_{n-ka}$ et en déduire, en utilisant fortement les préliminaires, $p_n \le \exp\left(\pi\sqrt{\dfrac{2n}{3}}\right)$.

Théorème de Hammersley-Welsh On fixe d un entier supérieur ou égal à 2 et on note $\Gamma = \mathbf{Z}^d$. Dans la suite $\|u\|$ et $e_1^*(u)$ désigne respectivement la norme euclidienne canonique et la première coordonnée de u dans $\mathbf{R}^d$.

1. On note $\Omega_n = \left\{(\omega_k)_{0\le k\le n} \in \Gamma^{n+1} \mid \omega_0 = 0\,, \forall i < n\ \ \|\omega_{i+1} - \omega_i\| = 1\,, \forall i \ne j\ \omega_i \ne \omega_j\right\}$. Interpréter.
2. On note $c_n = \operatorname{Card}\Omega_n$. Montrer $c_{n+m} \le c_n c_m$ puis que la limite de $c_n^{1/n}$ existe. On la note μ. Montrer $d \le \mu \le 2d$.
3. On suppose désormais $d = 2$.

   (a) On note $\Lambda_n = \{(\omega_k)_{0\le k\le n} \in \Omega_n \,|\, \forall i > 0\,,\ 0 < e_1^*(\omega_i) \le e_1^*(\omega_n)\}$. Interpréter.

   (b) On note $b_n = \operatorname{Card}\Lambda_n$. Montrer que la limite de $b_n^{1/n}$ existe. On la note μ'. Montrer $\mu' \le \mu$.

   (c) Construire par dépliage une application de Ω_n dans Λ_n, surjective et dont le nombre d'antécédents d'un élément de Λ_n est majoré par une fonction dans $O(p(n))$.

   (d) En déduire $\mu^n \le c_n \le \mu^n \exp(O(\sqrt{n}))$ puis que $\sum c_n x^n$ converge pour $x < 1/\mu$ et diverge pour $x > 1/\mu$.

Culture générale

1. De quelle pièce est tirée la citation ? Quel en est l'auteur ? Quel personnage dit cette tirade ?
2. Qui a inventé les statistiques, et les diagrammes en camembert, lors de la guerre de Crimée ? Quel célèbre tableau de Henrietta Rae la représente ? Qui peut-être récompensé par la médaille qui porte son nom ? Quelle médaille fut-elle la première femme à recevoir ?
3. Qui a dit « Un(e) mathématicien(ne) est une machine à transformer du café en théorèmes » ? Quelle théorie a-t-il axiomatisée à l'instar de son aîné Andreï Kolmogorov ? Quel est le plus célèbre de ses collaborateurs ?
4. Quelle célèbre actrice pleure en écoutant un futur médaillé Fields jouer du violon ? Quel est le titre de ce film ? Quel est le nom de ce médaillé Fields ? Qui y incarne le « rossignol viennois » ?
5. Quel mathématicien a reçu la médaille Fields la même année, et juste avant, Cédric Villani ? Dans quelle université travaille-t-il ? Quel rapport entretient-il avec le nombre 239 ? et avec 42 ? !