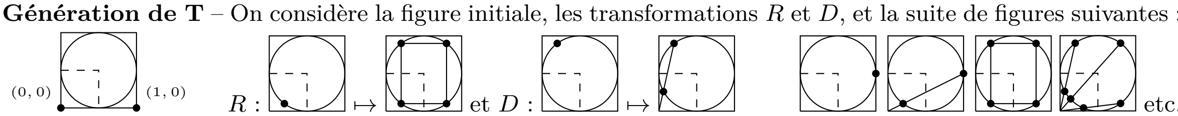
Alors Katherin ? Ces triangles sont-ils rectangles ?
Oui monsieur. Si a est la longueur de leur plus petit coté et que je note $\ell = a/3$ alors les longueurs des côtés de ces triangles sont toutes de la forme 3ℓ, 4ℓ et 5ℓ. Puis-je vous faire remarquer, monsieur, que ce n'est pas très original ?

On appelle triplet pythagoricien un triplet (a, b, c) d'entiers naturels non nuls et premiers entre eux vérifiant $a^2+b^2 = c^2$. On note $\mathbf{T}$ leur ensemble. On remarque qu'il est équivalent de se donner l'ensemble $\mathbf{P}$ des fractions pythagoriciennes obtenue par $(a, b, c) \mapsto \dfrac{a}{b}$. On note $\mathbf{Z}[i] = \left\{a + ib \;\middle|\; (a, b) \in \mathbf{Z}^2\right\}$, $\mathbf{Q}[i] = \left\{a + ib \;\middle|\; (a, b) \in \mathbf{Q}^2\right\}$, $\mathbf{S}^1$ l'ensemble des complexes de module 1, $\mathbf{Z}[i]^\times = \mathbf{Z}[i] \cap \mathbf{S}^1$. Les éléments de $\mathbf{Z}[i]^\times$ sont appelés unités.

1. **Détermination de T** – Montrer que $\mathbf{Z}[i]$ est un anneau et que $\mathbf{Q}[i]$ est un corps. Décrire les unités de $\mathbf{Z}[i]$.
2. On dit que z dans $\mathbf{Z}[i]$ est premier si : $\forall (a, b) \in \mathbf{Z}[i]^2$, $z = ab \Longrightarrow a$ ou b est une unité. Déterminer si 2, 3, 5 et $1 + i$ sont premiers dans $\mathbf{Z}[i]$.
3. Soit a et b dans $\mathbf{Z}[i]$ avec b non nul. Montrer qu'il existe q et r dans $\mathbf{Z}[i]$ tels que $a = bq + r$ avec $|r| < |b|$. Une telle écriture est-elle unique ? *On pourra considérer l'élément a/b de $\mathbf{Q}[i]$.*
4. En déduire que tout élément non nul de $\mathbf{Z}[i]$ s'écrit sous la forme $\varepsilon \prod p_i^{n_i}$ avec ε une unité, p_i des nombres premiers dans $\mathbf{Z}[i]$ et n_i des entiers naturels non nuls. Préciser le défaut d'unicité.
5. Conclure en se ramenant au cas b pair et en considérant les décompositions de $c - ia$ et $c + ia$.
6. **Génération de T** – On considère la figure initiale, les transformations R et D, et la suite de figures suivantes :



Donner l'expression analytique des transformations.
7. Soit t dans $\mathbf{T}$. Donner les coordonnées d'un point $A(x, y)$ du cercle ci-dessus vérifiant de plus $0 \leq x, y \leq \dfrac{1}{2}$ et tel que le rapport des longueurs du rectangle associé soit égal à la fraction pythagoricienne associée à t.
8. Écrire matriciellement le résultat de l'application suivante : à t on associe A comme ci-dessus, puis on associe les trois points obtenus en appliquant R puis D au point A. On note les applications obtenues R_1, R_2 et R_3.
9. On pose $J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\mathscr{O}_{2,1}(\mathbf{R}) = \left\{M \in \mathscr{M}_3(\mathbf{R}) \;\middle|\; {}^{\mathrm{t}}MJM = J\right\}$ et $\mathscr{O}_{2,1}(\mathbf{Z})$ son intersection avec $\mathscr{M}_3(\mathbf{Z})$.
Montrer que $\mathscr{O}_{2,1}(\mathbf{R})$ est un groupe multiplicatif et que $\mathscr{O}_{2,1}(\mathbf{Z})$ en est un sous-groupe.
10. Montrer que R_1, R_2 et R_3 appartiennent à $\mathscr{O}_{2,1}(\mathbf{Z})$.
11. Montrer par récurrence descente (ou plutôt par descente infinie) que tout élément de $\mathbf{T}$ s'obtient par applications répétées de R_1, R_2 ou R_3 à partir de $(3, 4, 5)$. Obtient-on chaque triplet pythagoricien une fois et une seule ?
12. Montrer que tout élément de $\mathscr{O}_{2,1}(\mathbf{Z})$ peut s'écrire comme un produit de matrices parmi J, R_1, R_2 et R_3.
13. **Groupes orthogonaux** On note $\Gamma(a, r)$ le cercle du plan euclidien $\mathbf{R}^2$ de centre a et de rayon r. À quelle condition nécessaire et suffisante admet-il une équation rationnelle, i.e. existe-t-il un polynôme P dans $\mathbf{Q}[X, Y]$ tel que $\Gamma(a, r) = \left\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \;\middle|\; P(x, y) = 0\right\}$?
14. On suppose cette condition satisfaite et on note $\Gamma_{\mathbf{Z}}(a, r)$ et $\Gamma_{\mathbf{Q}}(a, r)$ les points de $\Gamma(a, r)$ à coordonnées entières (resp. rationnelles), i.e. son intersection avec $\mathbf{Z}[i]$ (resp. $\mathbf{Q}[i]$). Pour chacun de ces ensembles dire s'il est possible qu'il soit vide, infini, fini mais non vide ? Dans le cas où cet ensemble est infini est-il nécessairement dense dans $\Gamma(a, r)$?
15. Montrer, pour $n = 2$ puis $n = 3$, que les points rationnels de $\mathscr{O}_n(\mathbf{R})$ y sont denses, i.e. si toute matrice M dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ vérifiant ${}^{\mathrm{t}}MM = I_n$ s'écrit comme limite d'une suite (M_k) vérifiant : tous les coefficients de M_k sont rationnels et ${}^{\mathrm{t}}M_kM_k = I_n$.

Questions subsidiaires : Donner le(s) patronyme(s) de Katherin. Quel a été son rôle dans le programme spatial américain ? Quel est le nom de l'initiatrice de Pythagore ? Quel nom porte l'anneau $\mathbf{Z}[i]$? Donner un autre objet ou résultat portant ce nom. Un de ses correspondants utilisait le pseudo Antoine Auguste Le Blanc : quel est son vrai nom ? Quelle est la date de naissance de ce correspondant et quels nombres premiers portent son nom ? Qui a démontré le dernier théorème de Fermat ? Quand la médaille Fields lui a-t-elle été attribuée ?