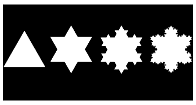
La princesse Alice révise pour son examen. Elle a criblé son baldaquin de gomettes de toutes les couleurs et y a inscrit tout ce que sa mémoire ne peut contenir. Elle en a des rondes, des carrées, des triangulaires et même des pentagonales. En fait, elle en a de toutes les formes, mais celles qu'elle préfère sont celles qui sont régulières, n'en déplaise à cet affreux Edwin Abbott. Elle rêve déjà à des volumes, qu'elle fabrique en recollant ses gomettes, et surtout à ses chères tesseracte et hexadécachore.

Le baldaquin Alice a superposé des gomettes carrées de sorte que chaque coin de ses carrés coïncide avec le coin d'un autre carré. Elle s'est alors demandé combien il lui faudrait de gomettes pour parfaire son rêve coloré. Elle a commencé par faire un patchwork, comme un damier. Mais d'une part les quatre coins du damier n'étaient pas appariés et d'autre part c'était bien trop rigide : à l'intérieur du damier les coins étaient superposés 4 par 4 et deux gomettes adjacentes coïncidaient le long d'une arête. Alors, comment faire ? Comment placer des carrés, tous identiques à l'exception de la couleur, sur une surface plane, en les superposant si nécessaire, de sorte que n'importe quel sommet d'un carré coïncide avec le sommet d'exactement un autre carré et que deux carrés aient au plus un sommet en commun ?

1. Donner une borne au nombre minimal de gomettes nécessaire pour accomplir le rêve d'Alice, en fournissant soit un argument théorique, soit un exemple.
2. Donner des exemples (différents de celui éventuellement exhibé à la question précédente).
3. Déterminer le nombre minimal de gomettes nécessaires.

La poussière et le flocon Alice n'aime pas compter les moutons, elle préfère s'endormir en imaginant des couleurs qui dansent sur la poutre blanche au dessus de son lit. Elle l'imagine peinte en deux couleurs, vert et orange. Elle peint un tiers en vert et un tiers en orange. Elle n'aime pas compter les moutons mais elle est très fière. Puis elle trouve que c'est trop. Le premier tiers, elle préfère ne pas le peindre entièrement et le peindre un tiers en vers et l'autre en orange. Et pareil pour le second tiers. Puis à nouveau elle trouve que cela fait trop, et chacun des quatre morceaux, elle préfère n'en colorier que deux tiers, l'un en vert, l'autre en orange. Elle s'endort souvent vers la dixième itération.

1. Combien y a-t-il alors de parties coloriées en vert ? en orange ? et laissées blanches ?
2. On dit qu'une partie K de $\mathbf{R}$ est compacte si de toute suite (x_n) de réels avec $\forall n \in \mathbf{N}\ x_n \in K$, on peut extraire une sous-suite $(x_{\varphi(n)})$ convergente vers une limite ℓ vérifiant de plus $\ell \in K$. Montrer qu'une famille décroissante (K_n) de parties compactes non vides est d'intersection non vide : on suppose K_n compact et $\emptyset \subsetneq K_{n+1} \subset K_n$, et on veut en déduire $\bigcap_{n\in\mathbf{N}} K_n \neq \emptyset$.
3. En déduire qu'à la fin de son rêve, tout n'est pas blanc.
4. Montrer qu'à la fin de son rêve danse devant elle la poussière de Cantor, à savoir les points dont les coordonnées peuvent s'écrire $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n 3^{-n}$ avec (a_n) une suite d'entiers valant chacun soit 0 soit 2. Cette écriture est-elle unique ? De quelle couleur sont ces points lors de la n^{e} itération ? Et à la fin du rêve ?



5. Son ami Johannes rêve, quant à lui, de flocons de neige. Expliquer la construction. On note F le flocon final, après une infinité d'itérations.
6. Soit r dans $\mathbf{R}_+^*$. Montrer qu'il existe $(x_i)_{1\leq i\leq n}$ des points du flocon F tel que F soit recouvert par des gomettes centrées en x_i et de taille r (on pourra au choix prendre des gomettes rondes assimilées à des disques de rayon r ou des gomettes carrées assimilées à des carrés de côté r). On note ces gomettes $B(x_i, r_i)$.
7. Soit A l'ensemble des familles U données par $U = ((x_i, r_i))_{1\leq i\leq n}$ avec $r_i \in \mathbf{R}_+^*$ et $F \subset \bigcup_{i=1}^n B(x_i, r_i)$. Soit d un **réel** positif. On pose, pour U dans A, $g_d(U) = \sum_{i=1}^n r_i^d$ et $r(U) = \max(r_i)$. Donner une interprétation de U, $r(U)$ et $g_d(U)$. Pour g_d on pourra commencer par interpréter dans les cas $d = 2$ et $d = 0$, puis $d = 1$ et enfin d non entier.
8. Montrer qu'on peut définir, pour r dans $\mathbf{R}_+^*$, $h_d(r) = \inf_{U\in A, r(U)\leq r} g_d(U)$.
9. Étudier les variations de h_d en fonction de r et aussi en fonction de d, dans le cas $r < 1$.
10. On pose $k_d = \lim_{r\to 0} h_d(r)$. Montrer que k_d est bien défini dans $\mathbf{R}_+ \cup \{+\infty\}$ et qu'il existe un unique réel, noté $d(F)$, tel qu'on ait : $k_d = 0$ pour $d > d(F)$ et $k_d = +\infty$ pour $d < d(F)$.
11. Calculer $d(F)$. On pourra commencer par donner un encadrement.

Saute-mouton Alice aime compter de 2 en 2, de 3 en 3 et elle a remarqué qu'elle a du mal à obtenir tous les nombres à cause de tous ces sauts. Pour s'en convaincre elle utilise ses gomettes.

1. On appelle n-polygone régulier du plan (pour $n \geq 2$) un polygone régulier ayant n côtés, avec la précision suivante si $n = 2$ il s'agit d'un segment. Montrer que ses sommets ont des affixes de la forme $(a + \zeta^k b)$ avec a, b, ζ complexes, b non nul, $\zeta^n = 1$ et k dans $[\![1, n]\!]$.
2. Quel est le centre de gravité du polygone ? Que se passe-t-il si on autorise $n = 1$?
3. On considère maintenant le cas $a = 0$ et $b^p = 1$, et on autorise le cas $n = 1$. Un 1-polygone régulier est donc un point d'affixe une racine p^{e} de l'unité. Montrer que si l'on peut recouvrir un p-polygone régulier ($a = 0$, $b = 1$, $n = p$) en un nombre fini de polygones réguliers ($a_k = 0$, b_k tel que $b_k^p = 1$, $n_k \geq 1$), alors deux de ces polygones ont le même nombre de côtés ($n_k = n_{k'}$).
4. En déduire que si $(E_i)_{1\leq i\leq n}$ sont des parties recouvrant $\mathbf{N}$, et formées de valeurs en progressions arithmétiques, $E_i = \{n_i + k a_i \mid k \in \mathbf{N}\}$, avec $n \geq 2$, alors soit deux a_i sont égaux, soit $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i} > 1$.

Culture générale 1. Quelles sont les nom, prénom et nationalité d'Alice ?

2. On a fêté le 158e anniversaire de sa naissance la semaine dernière. Citer une mathématicienne contemporaine d'Alice (à défaut, citer un mathématicien).
3. Donner un autre nom de la tesseracte. Qu'est-ce qu'un hexadécachore et quel est le lien avec la tesseracte ?
4. Pour quel livre Edwin Abbott est-il connu ? Pourquoi Alice le juge-t-elle affreux ?
5. Citer des événements marquants de la fin du XIXe siècle en liaison avec la géométrie.