– Alors Marta ? Encore la tête dans les étoiles ? à moins que ce ne soit la 4e dimension !
– C'est-à-dire que le ballon avec lequel vous voulez me faire jouer ... n'existe pas. Pour la photo, passe encore, mais pour les reprises de volée, c'est gênant !

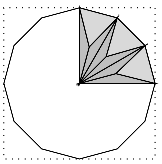
Fig. 1a

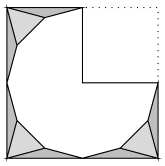
Fig. 1b

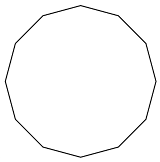
Fig. 2a

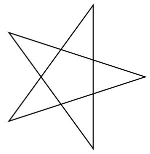
Fig. 2b

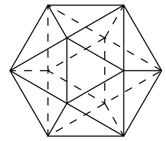
Fig. 2c

Fig. 3

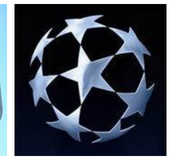
Fig. 4

1. **Questions de symboles** Énoncer et démontrer le théorème donné par les figures 1a et 1b.
2. Ludwig désigne par $\{12\}$, $\{5/2\}$ et $\{3,5\}$ les trois objets des figures 2a-2c. Que représentent les symboles $\{5,3\}$ et $\{4,4\}$? Construire en le justifiant un patron de $\{5,3\}$.
3. Plus généralement : $\{4\}$ est un carré ; $\{4,3\}$ est un cube, $\{4\}$ indique ses faces et $\{3\}$ la figure formée par les voisins d'un sommet. L'hypercube est $\{4,3,3\}$. Ses faces sont des cubes $\{4,3\}$ et les voisins d'un sommet forment $\{3,3\}$. Quelle est cette figure ? Combien y a-t-il de cubes dans un hypercube ? En dessiner un patron.
4. Alicia demanda « Quelle forme verrions-nous si un objet de dimension 4 traversait notre univers de dimension 3 ? ». Elle fabriqua des patrons de tous les polychores, du pentachore au 600-cellules, constitué de 600 tétraèdres, dont le symbole est $\{3,3,5\}$. Combien chaque sommet y a-t-il de voisins ?
5. Avec Harold, iels se sont intéressé·e·s à la figure représentée par $\{3,4,3\}$. Le décrire autant que possible.
6. **This, a foot ball, really ?** Quel(s) problème(s) peut-on voir sur le panneau de la figure 3 ?
7. Un ballon est fabriqué avec des morceaux polygonaux cousus deux à deux. On en déduit un graphe Γ sur la sphère ayant S sommets (les sommets des polygones), A arêtes (les côtés des polygones) et F faces (les polygones). On appelle composante de Γ une partie maximale telle que l'on puisse joindre deux points quelconques de cette partie en suivant des arêtes de cette partie. On note C le nombre de composantes de Γ. On crée un nouveau graphe Γ' en effaçant une arête. Comment évolue la quantité $S-A+F-C$ lors de ce processus ?
8. En déduire que pour tout polyèdre régulier convexe on a $S-A+F=2$ et le nombre de faces de $\{3,4\}$.
9. En déduire que le ballon de la figure 4, utilisé comme logo par l'UEFA, n'existe pas.
10. **Entiers** On considère l'espace vectoriel $\mathbf{R}^8$, noté C, muni d'une base $(e, e_r)_{1\le r\le 7}$. On se donne les règles
$$e_r^2 = -e\,,\quad e_{r+1}e_{r+3} = e_{r+2}e_{r+6} = e_{r+4}e_{r+5} = e_r\,,\quad e_{r+3}e_{r+1} = e_{r+6}e_{r+2} = e_{r+5}e_{r+4} = -e_r$$
en convenant $e_{r+7} = e_r$. Déterminer les triplets (triades) (i,j,k) telles que $e_i(e_je_k) = (e_ie_j)e_k$. Que se passe-t-il pour les autres triplets ? Ruth a montré $(e_ie_j)(e_ke_i) = e_i((e_je_k)e_i)$. Proposer une ou deux autres telles identités.
11. Pour a dans C, on note $a = a_0e + \sum_{i=1}^{7} a_ie_i$. On définit $ab = a_0b_0 + a_0\sum_{i=1}^{7}(a_0b_i + a_ib_0)e_i + \sum_{i=1}^{7}\sum_{j=1}^{7} a_ib_j(e_ie_j)$, les produits e_ie_j étant ceux ci-dessus. Enfin on pose $\overline{a} = 2a_0 - a$ et $N(a) = a\overline{a}$. Montrer que a est solution de $x^2 - 2a_0x + N(a)e = 0$ et qu'on a $N(ab) = N(a)N(b)$.
12. On note C_n l'ensemble des entiers sommes de n carrés d'entiers. Montrer que C_8, C_4, C_2 et C_1 sont stables par produit. En déduire $C_4 = \mathbf{N}$ en montrant que pour p premier, il existe a et b tels que p divise $1+a^2+b^2$.
13. On dit que E est un ensemble d'entiers s'il est maximal pour les trois conditions suivantes : E contient le neutre, est stable par addition et soustraction et tous ses éléments sont solutions d'une équation à coefficients entiers. Soit $\mathbf{Z}[i] = \left\{a+ib \;\middle|\; (a,b)\in\mathbf{Z}^2\right\}$. Montrer que c'est un ensemble d'entiers de $\mathbf{C}$. En identifiant $\mathbf{C}$ à $\mathbf{R}e \oplus \mathbf{R}e_1$, caractériser les unités $\mathbf{U}$ de $\mathbf{Z}[i]$, i.e. les éléments de $\mathbf{Z}[i]$ vérifiant $N(z) = 1$. Quels symboles sont associés par Ludwig à $\mathbf{Z}[i]$ et à $\mathbf{U}$?
14. Soit $\mathbf{H} = \mathbf{R}e \oplus \mathbf{R}e_1 \oplus \mathbf{R}e_2 \oplus \mathbf{R}e_4$. Montrer que l'ensemble E des éléments de $\mathbf{H}$ à coordonnées toutes entières ou toutes demi-entières, est un ensemble d'entiers de $\mathbf{H}$. Quelles en sont les unités ? Montrer qu'il y en a 24 et qu'elles forment une figure que Ludwig, Harold et Alicia ont noté $\{3,4,3\}$. En déduire un joli pavage de $\mathbf{R}^4$.
15. Et en dimension 8 ? Proposer un ensemble d'entiers. Combien d'unités ?

Questions subsidiaires : Quels sont les noms de famille, nationalité et dates approximatives d'Alicia, Harold, Ludwig, Marta et Ruth ? Quel est le surnom de Marta ? Qui a popularisé le mot polytope en anglais ? Pourquoi Ruth n'a-t-elle pu avoir de poste de professeure après sa thèse ? Laquelle de ces personnes a étudié le sanskrit et traduit le Rig-Véda ? Qui a été une source d'inspiration pour l'artiste M. C. Escher ? Outre qu'elle a été citée comme candidate sérieuse à la médaille Fields en 2018, pour quelle question liée à la dimension 8 Maryna Viazovska est-elle connue ? Quelle est sa nationalité ? Quelle autre dimension l'intéresse-t-elle ? A-t-elle encore une chance d'obtenir la médaille Fields ?